

Equação da difusão fracionária não-linear: solução exata

Giane Gonçalves¹, Marcelo Kaminski Lenzi^{2*}, Ervin Kaminski Lenzi^{3*}, Fernando José Antonio³ e Alexandre Schot³

¹Departamento de Engenharia Química, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, Brasil. ²Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Jardim das Américas, Cx. Postal 19011, 81531-990, Curitiba, Paraná, Brasil. ³Departamento de Física, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 5790, 87020-900, Maringá, Paraná, Brasil. *Autor para correspondência. e-mail: eklenzi@dfi.uem.br

RESUMO. Neste trabalho investigaremos as soluções de uma equação da difusão generalizada que contém derivadas fracionárias aplicadas a variável espacial e termos não-lineares. Nesta equação também consideraremos a presença de forças externas e termos absorventes. As soluções encontradas aqui poderão ter um comportamento de cauda curta ou longa. Em particular, no último caso que é caracterizado pelas distribuições de cauda longa será relacionado com as distribuições de Lévy. Além disso, a partir dos resultados encontrados aqui, poderemos obter uma rica classe de processos difusivos incluindo normais e anômalos.

Palavras-chave: difusão anômala, equação de difusão não linear, distribuições de Lévy.

ABSTRACT. Nonlinear fractional diffusion equation: exact solutions. We devote this work to investigate the solutions of a generalized diffusion equation which contains spatial fractional derivatives and nonlinear terms. The presence of external forces and absorbent terms is also considered. The solutions found here can have a compact or long tail behavior. Particularly in the last case in the asymptotic limit, we relate these solutions to the Lévy or Tsallis distributions. In addition, from the results presented here, a rich class of diffusive processes, including normal and anomalous ones, can be obtained.

Key words: anomalous diffusion, nonlinear diffusion equation, Lévy distributions.

Introdução

Recentemente, as equações de difusão que generalizam a equação de difusão usual por empregarem derivadas fracionárias ou termos não lineares, têm recebido considerável atenção devido sua grande variedade de aplicações em física, em particular, à fenômenos que possuem difusão anômala. De fato, elas têm sido aplicadas com sucesso em diversas situações, tais como relaxação ao equilíbrio em sistemas (por exemplo, cadeias de polímeros e membranas) com memória temporal longa, transporte anômalo em sistemas desordenados (Metzler, 1999), processos não-markovianos envolvendo proteínas (Plotkin e Wolynes, 1998), transporte de gases através de meios porosos (Muskat, 1937), modelos de crescimento de superfícies, difusão através de membranas finas devido à gravidade (Buckmaster, 1977) e dedos viscosos (Grosfils e Boon, 2005). Essa grande variedade de aplicações também tem motivado uma constante investigação a respeito das propriedades formais dessas equações de difusão. Dentre elas, para o caso das equações de difusão fracionárias, temos a análise de problemas de contorno (Metzler e Klafter,

2000a; Agrawal, 2002; Lenzi *et al.*, 2005; Mainardi e Pagnini, 2003; Schneider e W. Wyss, 1989), o estudo do comportamento da equação de difusão fracionária na origem (Ryabov, 2003) e a conexão entre a função H de Fox e as equações fracionárias (Mainard *et al.*, 2005). Situações multidimensionais envolvendo equações de difusão fracionárias foram abordadas considerando termos convectivos (Meeschaert, 1999), situações que envolvem simetria radial (Achar e Hanneken, 2004) e generalizações do movimento Browniano (Uchaikin, 2002). As equações de difusão não lineares também têm sido estudadas levando em conta várias situações como, por exemplo, a presença de forças externas (Tsallis e Bukman, 1996; Compte *et al.*, 1996; Giordano *et al.*, 2001), termos de absorção (Drazer *et al.*, 2000), dependência espacial para o coeficiente de difusão (Silva *et al.*, 2004). Por sua vez, situações em que temos a presença de derivadas fracionárias espaciais em equações de difusão não lineares foram investigadas em (Bologna, 2000; Lenzi *et al.*, 2003a, b). A conexão entre estas equações e um contexto termodinâmico seja ele ditado pelo formalismo de Boltzmann-Gibbs ou o formalismo de Tsallis

(Plastino e Plastino, 1995); Frank, 2002; Anteneodo 2005) também é tema de constante investigação.

Do exposto acima, observamos a importância destas equações, suas aplicações e soluções, fazendo com que investigações a respeito de sua natureza sejam importantes a fim de termos um suporte para descrever situações onde o formalismo usual não funciona de forma adequada, e conseqüentemente necessita de extensões. Um exemplo típico é o deslocamento de um fluido viscoso em outro menos viscoso em um reservatório de petróleo que requer um formalismo mais geral do que o conhecido atualmente para descrevermos de forma adequada o comportamento não linear da interface analisada, uma vez que as rochas nos quais o óleo está presente tem características fractais ou multifractais. E em particular, a geoestatística destes reservatórios são perfeitamente descritas por um movimento Browniano fracionário e um movimento tipo Lévy (Hewett, 1988). Assim, visando uma compreensão melhor destes formalismos que empregam estas equações de difusão generalizadas (sejam elas fracionárias ou não lineares), dedicaremos o presente trabalho a estabelecer algumas classes de soluções para uma equação da difusão não linear unidimensional fracionária. Mais precisamente, consideraremos a seguinte equação de difusão:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathcal{D}(t) \frac{\partial^\mu}{\partial |x|^{\mu'}} \left\{ |x|^{-\theta} \rho^\gamma \frac{\partial^\mu}{\partial |x|^{\mu'}} \left[|x|^{-\eta} \rho^\nu \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial x} [F(x,t)\rho] - \alpha'(t)\rho^{\bar{\mu}} \quad (1)$$

onde o coeficiente de difusão, dado por $\mathcal{D}(t)$, é dependente do tempo, $F(x,t)$ é uma força externa aplicada ao sistema, dada por $F(x,t) = -k(t)x$ e $\alpha'(t)$ é um termo absorvente ou de fonte o qual tem sua origem, e.g., em um processo que contenha algum tipo de reação além da difusão. Seguindo (Bologna, 2000; Lenzi *et al.*, 2003a, b), usaremos o operador de Riemann-Liouville (Oldham, 1974; Hilfer, 2000; Metzler e Klafter, 2000b) para a derivada fracionária e trabalharemos com o eixo x positivo. Depois, usaremos a simetria para estender os resultados obtidos para o todo o eixo real. Começaremos investigando as soluções da equação acima na presença de termos absorventes lineares, i.e., com $\bar{\mu}=1$. Na seqüência, estudaremos situações caracterizadas por $\bar{\mu} \neq 1$ na ausência de forças externas com um coeficiente de difusão constante. Neste caso, obteremos soluções para alguns valores particulares dos parâmetros presentes na equação (1). Tais desenvolvimentos serão feitos na Sec. II e na Sec. III apresentaremos as discussões e

conclusões a respeito dos resultados obtidos.

Equação de difusão não linear fracionária

Investigaremos as soluções dependentes do tempo para a equação (1) utilizando o método de similaridade para reduzi-lá a uma equação diferencial ordinária. Observando que a forma explícita da equação que será obtida depende das condições de contorno ou de restrições impostas pelas leis de conservação, e.g., a condição de normalização. Assim, como estamos interessados em soluções para uma equação de difusão vamos considerar em nossas investigações soluções que são do tipo:

$$\bar{\rho}(x,t) = \frac{1}{\Phi(t)} \tilde{\rho} \left[\frac{x}{\Phi(t)} \right] \quad (2)$$

Estas soluções devem satisfazer as condições de contorno, inicial e de normalização, quando $\alpha'(t)=0$. Antes de analisarmos as soluções da equação (1), vamos considerar a mudança

$$\rho(x,t) = \exp \left(- \int_0^t \tilde{\alpha}'(\tilde{t}) d\tilde{t} \right) \bar{\rho}(x,t)$$

onde $\bar{\rho}(x,t)$ é a função a ser determinada, sendo ela dada pela equação (2) e $\bar{\mu}=1$. Desta forma, deixamos para uma etapa posterior o estudo do caso $\bar{\mu} \neq 1$ e suas soluções. Aplicando estas considerações na equação (1) obtemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \bar{\mathcal{D}}(t) \frac{\partial^{\mu'}}{\partial |x|^{\mu'}} \left\{ |x|^{-\theta} \rho^\gamma \frac{\partial^\mu}{\partial |x|^{\mu'}} \left[|x|^{-\eta} \rho^\nu \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial x} [F(x,t)\rho] \quad (3)$$

Com

$$\bar{\mathcal{D}}(t) = \mathcal{D}(t) \exp \left[(1-\nu-\gamma) \int_0^t \tilde{\alpha}'(\tilde{t}) d\tilde{t} \right].$$

Agora, utilizando a equação (2) na equação (3), considerando $z = |x|/\Phi(t)$, encontramos

$$\frac{d^{\mu'}}{dz^{\mu'}} \left\{ z^{-\theta} \tilde{\rho}^\gamma(z) \frac{d^\mu}{dz^\mu} \left[z^{-\eta} \tilde{\rho}^\nu(z) \right] \right\} = \bar{k} \frac{d}{dz} z \tilde{\rho}(z) \quad (4)$$

com $\dot{\Phi}(t) = -\bar{k}\bar{\mathcal{D}}(t)[\Phi(t)]^{2-\xi} - k(t)\Phi(t)$, onde $\xi = \theta + \gamma + \nu + \eta + \mu + \mu'$ e $\bar{k}$ é uma constante arbitrária que pode ser determinada pela condição de

normalização. Resolvendo a equação para $\Phi(t)$, obtemos

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(0)} = \left[1 + k' \int_0^t \tilde{D}(t') e^{(\xi-1) \int_0^{t'} dt'' k(t'')} \right]^{\frac{1}{\xi-1}} e^{-\int_0^t dt' k(t')} \quad (5)$$

onde $k' = (1-\xi)\bar{k}/[\Phi(0)]^{\xi-1}$. Observe que esta equação contempla a possibilidade de considerarmos como condição inicial a distribuição com uma certa largura. Voltando nossa atenção para a equação (4), a primeira simplificação que podemos fazer nela é efetuar uma integração, o que resulta em

$$\frac{d^{\mu'-1}}{dz^{\mu'-1}} \left\{ z^{-\theta} \tilde{\rho}^{\gamma}(z) \frac{d^{\mu}}{dz^{\mu}} [z^{-\eta} \tilde{\rho}^{\nu}(z)] \right\} = \bar{k} z \tilde{\rho}(z) + C \quad (6)$$

a partir da qual analisaremos várias situações para os parâmetros $\mu', \mu, \theta, \gamma, \eta \in \mathbb{R}$. Em particular, primeiramente estudaremos o caso $\mu' = 1$ com $\mu, \theta, \gamma, \eta$ e V arbitrários, após este estudo, consideraremos situações que envolvem valores arbitrários de μ' e casos particulares para estes parâmetros. Vamos considerar, para todos estes casos, $C = 0$, para que seja satisfeita a condição de contorno $\rho(\pm\infty, t) = 0$.

Desta forma, considerando $\mu' = 1$ juntamente com $C = 0$ a equação (6) fica reduzida a

$$z^{-\theta} \tilde{\rho}^{\gamma}(z) \frac{d^{\mu}}{dz^{\mu}} [z^{-\eta} \tilde{\rho}^{\nu}(z)] = \bar{k} z \tilde{\rho}(z) \quad (7)$$

A equação (7) é uma equação de difusão não linear e fracionária, o que torna difícil (ou impossível) empregarmos procedimentos baseados no princípio da superposição que são comumente usados na obtenção das soluções das equações diferenciais parciais lineares. Assim, proporemos o *ansatz* $\tilde{\rho}(z) = \mathcal{N} z^{\frac{\alpha}{\nu}} (1+bz)^{\frac{\beta}{\nu}}$ como uma solução para a equação (7), ressaltando que esta proposta de solução satisfaz as condições de contorno e inicial pertinentes a este problema de difusão. Aplicando o *ansatz* na equação (7) e utilizando a propriedade abaixo, que é obtida usando a definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville,

$$\frac{d^{\delta}}{dz^{\delta}} \left[z^{\alpha} (1+bz)^{\beta} \right] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-\delta)} \frac{z^{\alpha-\delta}}{(1+bz)^{\delta-\beta}} \quad (8)$$

para $\delta = \alpha + \beta + 1$, encontramos os parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ presentes no *ansatz* e na equação de difusão em termos dos demais parâmetros como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\nu} &= \frac{(1+\theta+\mu+\eta)(2+\mu+\theta)}{(\gamma-1)(1+\theta+2\mu+\eta)} \\ \frac{\beta}{\nu} &= \frac{\mu(2+\mu+\theta)}{(\gamma-1)(1+\theta+2\mu+\eta)} \\ \nu &= \frac{(1-\gamma)(1-\mu-\eta)}{2+\theta+\mu} \end{aligned} \quad (9)$$

Com

$$\mathcal{N} = \left[\frac{\Gamma(1+\alpha-\eta)}{\bar{k}\Gamma(1+\alpha-\mu-\eta)} \right]^{\frac{1}{1-\nu-\gamma}}.$$

Substituindo estes resultados na solução proposta chegamos em

$$\rho(z) = \mathcal{N} \left[z^{\frac{1+\theta+\mu+\eta}{\gamma-1}} (1+bz)^{\frac{\mu}{\gamma-1}} \right]^{\frac{2+\mu+\theta}{1+\theta+2\mu+\eta}} \quad (10)$$

onde b é uma constante que, de acordo com a situação analisada vale ± 1 . Ressaltando que $b = -1$ consiste em uma solução compacta, ao passo que $b = 1$ nos conduz a uma solução que cobre todo o espaço. Consequentemente, dependendo da escolha dos parâmetros μ, θ, η e γ , a solução adquire uma cauda curta ($b = -1$) ou longa ($b = 1$). Em particular, o último caso está relacionado com as distribuições do tipo Lévy. De fato, se considerarmos o limite assintótico para argumentos grandes na equação (10), para o caso caracterizado por uma cauda longa, teremos

$$\rho(x) \sim 1/z^{\frac{2+\mu+\theta}{1-\gamma}}.$$

Neste ponto, é interessante notar que as distribuições que emergem do formalismo de Tsallis se comportam segundo uma lei de potência e podem se referir às distribuições de Lévy. Por este ponto de vista, também podemos aproximar nossas soluções às distribuições que emergem do formalismo de Tsallis (Tsallis, 1994; Tsallis *et al.*, 1998). Estabelecida tal relação, podemos dar uma interpretação termoestatística para estas distribuições de forma análoga às distribuições que emergem da equação de difusão usual e a termoestatística de Boltzmann-Gibbs.

Empregando o procedimento acima, podemos estender a solução encontrada para o caso caracterizado por $\mu' \neq 1$. Desta forma, utilizando o

ansatz descrito acima na equação (6) com $c=0$ obtemos como solução

$$\rho(z) = \tilde{\mathcal{N}} \left[z^{\frac{\theta+\mu'+\eta}{1-\gamma}} (1+bz)^{\frac{\mu'+\mu'-1}{1-\gamma}} \right]^{\frac{\theta+2\mu'+\mu}{1-2(\mu+\mu')-\theta-\eta}} \quad (11)$$

com $\gamma = (1 - (\mu + \mu' + \theta)) / (1 + \mu')$,

$$\tilde{\mathcal{N}} = \left[\frac{\Gamma(1+\bar{\alpha}-\eta)}{\bar{k}\Gamma(1+\bar{\alpha}-\mu-\eta)} \frac{\Gamma\left(1+\left(1+\frac{\gamma}{\bar{v}}\right)\bar{\alpha}-(\theta+\eta+\mu)\right)}{\Gamma\left(2+\left(1+\frac{\gamma}{\bar{v}}\right)\bar{\alpha}-(\theta+\eta+\mu+\mu')\right)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$\bar{\alpha}/\bar{v} = [(\theta+2\mu'+\mu)/(1-2(\mu+\mu')-\theta-\eta)][(\theta+\mu+\mu'+\eta)/(1-\gamma)]$, de forma análoga ao caso anterior $b = \pm 1$ e $\bar{v} = (1-\gamma)(1-\mu-\eta)/(\theta+\mu+2\mu')$ (veja Figura 1 e Figura 2). Usando os resultados obtidos, podemos obter o segundo momento. Em particular, no caso em que o mesmo é finito ele é dado por $\langle x^2 \rangle_{\infty} [\Phi(t)]^2$, com $\Phi(t)$ definido pela equação (5). Este resultado para o segundo momento simplifica-se para $\langle x^2 \rangle_{\infty} \propto t^{2/(\xi-1)}$ na

ausência de forças externas e termos absorventes quando consideramos tempos longos. Esta relação para o segundo momento nos diz o processo difusivo pode ser superdifusivo, normal ou subdifusivo se $2/(\xi-1)$ for maior, igual ou menor que um, respectivamente.

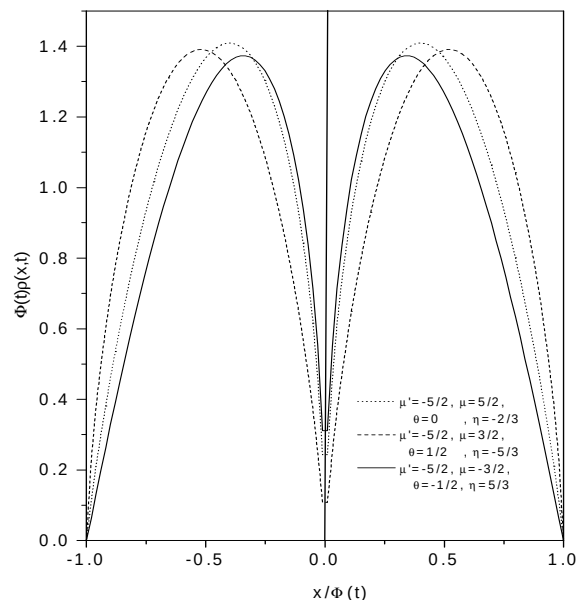


Figura 1. Nesta figura mostramos o comportamento da $\Phi(t)\rho(x,t)$ versus $x/\Phi(t)$ obtido a partir da equação (11) para valores típicos dos parâmetros η, μ', θ e μ , na ausência de termos absorventes, que nos conduza a uma distribuição com a forma compacta.

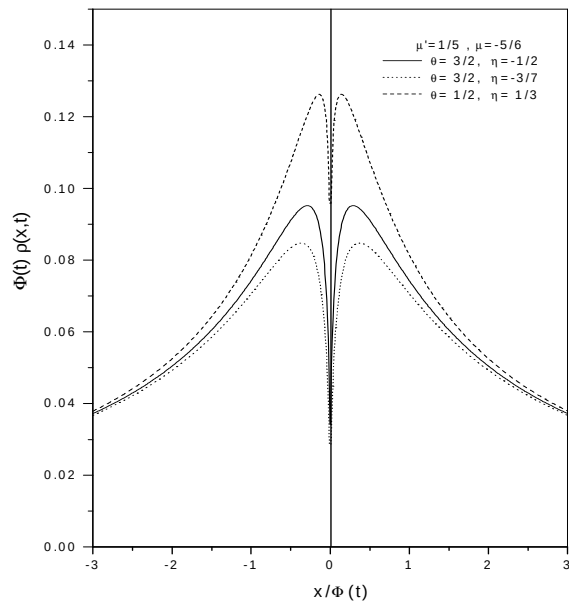


Figura 2. Nesta figura mostramos o comportamento da $\Phi(t)\rho(x,t)$ versus $x/\Phi(t)$ obtido a partir da equação (11) para valores típicos dos parâmetros η, μ', θ e μ , na ausência de termos absorventes, que nos conduza a uma distribuição com uma cauda alongada, cobrindo todo espaço.

Agora vamos considerar alguns casos particulares da equação (1). Mais precisamente, consideraremos os seguintes casos: (i) $\mu'=1$ e $\mu=1$, (ii) $\mu'=1$ e $\mu=-1$ e (iii) $\mu'=2$ e $\mu=0$. Entretanto antes de começarmos nossas investigações a respeito desses casos, vamos fazer a seguinte mudança $\bar{k}$ por $\tilde{k}$ com $\tilde{k}$ definido pela condição de normalização. Assim, aplicando este requisito na equação (6), obtemos para o caso $\mu'=1$ e $\mu=1$ que

$$z^{-\theta} \tilde{\rho}^{\gamma}(z) \frac{d}{dz} [z^{-\eta} \tilde{\rho}^{\nu}(z)] = -\tilde{k} z \tilde{\rho}(z) \quad (12)$$

A solução para a equação acima é dada por

$$\rho(z) = z^{\nu} \exp_q \left[-\frac{\tilde{k} z^{2+\theta+(1-\gamma)\frac{\eta}{\nu}}}{(2+\theta)\nu + (1-\gamma)\eta} \right] \quad (13)$$

onde $q = 2 - \nu - \gamma$ com $\exp_q[x] \equiv (1 - (1-q)x)^{\frac{1}{1-q}}$ para $1 - (1-q)x \geq 0$ e $\exp_q[x] \equiv 0$ para $1 - (1-q)x < 0$. Note que $\exp_q[x]$ é a função q-exponencial que emerge do formalismo de Tsallis ao maximarmos a entropia de Tsallis $S_q = \left(1 - \int dx \rho^q\right)/(q-1)$ com vínculos adequados (Tsallis et al., 1998). Para o segundo caso, i.e., $\mu'=1$ e

$\mu = -1$, temos que

$$z^{-\theta} \tilde{\rho}^{\gamma}(z) \int_0^z d\bar{z} \bar{z}^{-\eta} \tilde{\rho}^{\nu}(\bar{z}) = -kz \tilde{\rho}(z) \quad (14)$$

Resolvendo a equação (14), obtemos como solução

$$\rho(z) = z^{\frac{1+\theta}{\gamma-1}} \exp_q \left[-\frac{1}{\tilde{\kappa}} z^{\frac{1-\eta+\nu}{\gamma-1}} \right] \quad (15)$$

com $\tilde{\kappa} = k((1-\gamma)(1-\eta) - \nu(1+\theta))$. No terceiro caso, $\mu' = 2$ e $\mu = 0$, a equação (7) fica dada por

$$\frac{d}{dz} [z^{-\theta-\eta} \tilde{\rho}^{\gamma+\nu}(z)] = -kz \tilde{\rho}(z) \quad (16)$$

De forma análoga aos casos anteriores podemos também expressar, a solução para este caso em termos das funções q-exponenciais, obtendo como resultado

$$\rho(z) = z^{\frac{\eta+\theta}{\nu+\gamma}} \exp_q \left[-\frac{\tilde{\kappa} z^{\frac{2+\eta+\theta}{\nu+\gamma}}}{2(\nu+\gamma)+\theta+\eta} \right] \quad (17)$$

com $q = 2 - \nu - \gamma$. As soluções para estes casos podem também exibir uma forma compacta ou alongada dependendo dos valores dos parâmetros ν, γ, θ e η .

Por fim, consideraremos a situação em que temos $\bar{\mu} \neq 1$. Trataremos desse caso na ausência de forças externas, com o coeficiente de difusão e o termo absorvente constantes. Empregando todas essas condições na equação (1), podemos reduzi-la a forma que segue abaixo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^{\mu'}}{\partial |x|^{\mu'}} \left\{ |x|^{-\theta} \rho^{\gamma} \frac{\partial^{\mu}}{\partial |x|^{\mu}} \left[|x|^{-\eta} \rho^{\nu} \right] \right\} - \alpha' \rho^{\bar{\mu}} \quad (18)$$

Assim, como nos casos trabalhados anteriormente a equação (18) é uma equação não linear, sendo que a não linearidade está presente no termo difusivo e no termo absorvente. Seguindo o procedimento empregado acima, vamos considerar que a solução para a equação (18) seja do tipo $\rho(x,t) = \phi(t) \varphi(t)x$ sendo $\phi(t)$ e $\varphi(t)$ funções dependentes do tempo a serem determinadas. Observe que contrariamente a equação (2), $\phi(t)$ e $\varphi(t)$ não precisam ser necessariamente iguais.

Continuando nossa investigação sobre as soluções da equação (18), vamos analisar a equação cinética que emerge ao tomarmos $\mathcal{D} = 0$, ou seja, a equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\alpha' \rho^{\bar{\mu}} \quad (19)$$

A solução para esta equação é dada por $\rho = (1 - (1 - \mu') \alpha' t)^{\frac{1}{1-\mu'}}$, o que nos sugere a considerar

que ϕ seja dada por $\phi(t) = (1 - (1 - \mu') \kappa t)^{\frac{1}{1-\mu'}}$ (κ sendo uma constante arbitrária), uma vez que para $\mathcal{D} = 0$ a solução deve ser formalmente equivalente a solução da equação cinética. Agora para obter φ , vamos substituir a solução proposta na equação (18) com $\phi(t)$ definido acima. Desta forma, após alguns

cálculos é possível mostrar que $\varphi(t) = [\phi(t)]^{\frac{\gamma+\nu-\bar{\mu}}{\mu+\mu'+\theta+\eta}}$ e reduzirmos a equação (18) a seguinte equação ordinária:

$$-\kappa \mathcal{P} - \frac{(\gamma+\nu-\bar{\mu})\kappa}{\mu+\mu'+\theta+\eta} \frac{d\mathcal{P}}{d\zeta} = \mathcal{D} \frac{d^{\mu'}}{d\zeta^{\mu'}} \left\{ \zeta^{-\theta} \varphi^{\gamma} \frac{d^{\mu}}{d\zeta^{\mu}} \left[\zeta^{-\eta} \varphi^{\nu} \right] \right\} - \alpha \mathcal{P}^{\bar{\mu}} \quad (20)$$

com $\zeta = \phi(t)x$. Neste ponto é interessante ressaltarmos que conhecendo $\phi(t)$ e $\varphi(t)$ podemos determinar o comportamento temporal do segundo,

é claro supondo que $\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \zeta^2 \mathcal{P}(\zeta)$ seja finita. Neste

caso, aplicando a definição, $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \rho(x,t)$,

obtemos que $\langle x^2 \rangle \propto \phi(t)/[\varphi(t)]^3$, agora tomando o limite de tempos suficientemente longo obtemos

$\langle x^2 \rangle \sim t^{\frac{3(1+\bar{\mu}-\gamma-\nu)}{(1-\bar{\mu})(\mu+\mu'+\theta+\eta)}}$. Deste último resultado

observamos que para $3(1+\bar{\mu}-\gamma-\nu)/[(1-\bar{\mu})(\mu+\mu'+\theta+\eta)]$ maior, igual ou menor que a unidade temos um processo superdifusivo, normal ou subdifusivo, respectivamente. Nosso problema agora reside em encontrar soluções analíticas para a equação (20), o que é uma tarefa difícil ao considerarmos $\mu, \mu', \theta, \eta, \gamma$ e ν arbitrários. Assim, vamos considerar duas situações particulares envolvendo estes parâmetros a fim conseguirmos obter soluções analíticas para a equação (20). Elas são (i) $\gamma + \nu = \bar{\mu}$ com $\mu = 1$ e $\mu' = 0$ e (ii) $\gamma + \nu - \bar{\mu} = \mu + \mu' + \theta + \eta$ com $\mu = \mu' = 1$. Assim, começaremos por considerar $\gamma + \nu = \bar{\mu}$, $\mu = 1$ e $\mu' = 0$ com os demais parâmetros podendo assumir valores arbitrários. Para este caso a

equação (20) pode ser reduzida a equação que segue abaixo:

$$-\kappa \mathcal{P} = \mathcal{D} \zeta^{-\theta} \mathcal{P}^\gamma \frac{d}{d\zeta} \left[\zeta^{-\eta} \mathcal{P}^\nu \right] - \alpha' \mathcal{P}^{\gamma+\nu} \quad (21)$$

cujas é dada por

$$\mathcal{P}(\zeta) = \zeta^\nu e^{\frac{\eta}{(1+\theta+\eta)\mathcal{D}\nu}} \times \exp_q \left[\frac{-\kappa}{\mathcal{D}\nu} \int du u^{\theta+\frac{\eta}{\nu}(1-\gamma)} e^{\frac{(1-q)\alpha' u^{1+\theta+\eta}}{(1+\theta+\eta)\mathcal{D}\nu}} \right] \quad (22)$$

para $q=2-\gamma-\nu$. Outro caso interessante aparece ao considerarmos $\gamma+\nu-\bar{\mu}=\mu+\mu'+\theta+\eta$ com $\mu=\mu'=1$. Para este caso a equação (20) adquire o seguinte aspecto:

$$-\kappa \frac{d}{d\zeta} [\zeta \mathcal{P}] = \mathcal{D} \frac{d}{d\zeta} \left\{ \zeta^{-\theta} \mathcal{P}^\gamma \frac{d}{d\zeta} [\zeta^{-\eta} \mathcal{P}^\nu] \right\} - \alpha' \mathcal{P}^{\bar{\mu}} \quad (23)$$

A solução para este caso pode ser obtida de forma implícita e tem como resultado

$$\mathcal{P}(\zeta) = \zeta^\nu \exp_q \left[-\frac{\kappa \zeta^{2+\theta+\frac{\eta}{\nu}(1-\gamma)}}{\mathcal{D}((2+\theta)\nu+\eta(1-\gamma))} + \frac{\alpha'}{\mathcal{D}\nu} \int du u^{\theta+\frac{\eta}{\nu}(1-\gamma)} \frac{u}{\mathcal{P}(u)} \int d\bar{u} [\mathcal{P}(\bar{u})]^{\bar{\mu}} \right] \quad (24)$$

com $q=2-\gamma-\nu$. De forma análoga outras situações envolvendo os parâmetros presentes na equação (20) podem ser analisados.

Resultado e discussão

Em resumo, investigamos as soluções de uma equação unidimensional de difusão que apresenta termos não lineares e derivadas fracionárias aplicadas a variável espacial, a equação (1). Particularmente, levamos em conta a presença de termos absorventes, forças externas e uma grande variedade de situações envolvendo os parâmetros $\mu, \mu', \bar{\mu}, \gamma, \theta, \nu \in \eta$ presentes na equação (1). Desta forma, os resultados aqui obtidos estendem os resultados encontrados em Bologna, (2000); Lenzi et al. (2003a, b). Outro fato importante, constitui a relação das soluções obtidas com as distribuições de Lévy quando estas possuíam um comportamento de cauda longo ou com o formalismo de Tsallis por meio de suas funções q -

exponenciais. Ressaltando que ao estabelecermos a conexão com o formalismo de Tsallis estamos fornecendo uma base termodinâmica a estas equações de forma análoga como ocorre com a equação de difusão usual e as distribuições de Boltzmann-Gibbs. Finalmente, esperamos que os resultados encontrados aqui venham a ser úteis nas discussões que envolvam processos difusivos anômalos.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq e a CAPES pelo suporte financeiro.

Referências

- ACHAR, B.N.N.; HANNEKEN, J.W., Fractional radial diffusion in a cylinder. *J. Mol. Liq.*, Amsterdam, v. 114, p. 147-151, 2004.
- AGRAWAL, O.M.P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain. *Nonlinear Dyn.*, Dordrecht, v. 29, p. 145-155, 2002.
- ANTENEODO, C. Non-Extensive random walks. *Physica*, La Haye, v. 358, p. 289-298, 2005.
- BOLOGNA, M. et al. Anomalous diffusion associated with nonlinear fractional derivative Fokker-Planck-like equation: Exact time-dependent solutions. *Phys. Rev. E*, New York, v. 62, p. 2213-2218, 2000.
- BUCKMASTER, J. Viscous sheets advancing over dry bed. *J. Fluid Mech.*, v. 81, p. 735-756, 1977.
- COMPTE, A. et al. Anomalous diffusion in linear shear flows. *J. Phys. A / Math. Gen.*, v. 30, p. 1023-1030, 1997.
- DRAZER, G. et al. Anomalous diffusion with absorption: Exact time-dependent solutions. *Phys. Rev. E*, New York, v. 61, p. 1417-1422, 2000.
- FRANK, T.D. On a general link between anomalous diffusion and nonextensivity. *J. Mathem. Phys.*, New York, v. 43, p. 344-350, 2002.
- GIORDANO, C. et al. Nonlinear diffusion under a time dependent external force: q-maximum entropy solutions. *Eur. Phys. J. B*, Les Ules, v. 22, p. 361-368, 2001.
- GROSFILS, P.; BOON, J.B. Nonextensive statistics in viscous fingering. *Physica A*, Amsterdam, v. 362, p. 168-173, 2006.
- HEWETT, T.A. *Fractal distributions of reservoir heterogeneity and their influence on fluid transport*, 61st Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, New Orleans, 1988.
- HILFER, R., *Applications of fractional calculus in physics*. Singapore: World Scientific, , 2000.
- LENZI, E.K. et al. Exact solutions to nonlinear nonautonomous space-fractional diffusion equations with absorption. *Phys. Rev. E*, New York, v. 67, p. 051109, 2003a.
- LENZI, E.K. et al. Anomalous diffusion, nonlinear fractional Fokker-Planck equation and solutions. *Physica*

A, Amsterdam, v. 319, p. 245-252, 2003b.

LENZI, E.K. *et al.* $\mathcal{N}$ -dimensional fractional diffusion equation and Green function approach: spatial dependent diffusion coefficient and external force. *Phys. Rev. E*, New York, v. 71, p. 052109, 2005.

MAINARDI, F.; PAGNINI, G. The Wright functions as solutions of the time-fractional diffusion equation. *App. Math. Comput.*, New York, v. 141, p. 51-62, 2003.

MAINARDI, F. Fox H functions in fractional diffusion. *J. Comput. App. Math.*, Antwerpen, v. 178, p. 321-331, 2005.

MEESCHAERT, M.M. *et al.* Multidimensional advection and fractional dispersion. *Phys. Rev. E*, New York, v. 59, p. 5026, 1999.

METZLER, R.; KLAFTER, J. Boundary value problems for fractional diffusion equations. *Physica A*, Amsterdam, v. 278, p. 107-125, 2000a.

METZLER, R.; KLAFTER, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 339, p. 1-77, 2000b.

METZLER, R. Anomalous transport in disordered systems under the influence of external fields. *Physica A*, Amsterdam, v. 266, p. 343-350, 1999.

MUSKAT, M. *The flow of homogeneous fluid through porous media*. New York: McGraw-Hill, 1937.

OLDHAM, K.B.; SPANIER, J. *The fractional calculus*. New York: Academic Press, 1974.

PLASTINO, A.R.; PLASTINO, A. Non-extensive statistical mechanics and generalized Fokker-Planck equation. *Physica A*, Amsterdam, v. 222, p. 347, 1995.

PLOTKIN, S.S.; WOLYNES, P.G. Non-Markovian configurational diffusion and reaction coordinates for protein folding. *Phys. Rev. Lett.*, v. 80, p. 5015-5018, 1998.

RYABOV, Y.E. Behavior of fractional diffusion at the origin. *Phys. Rev. E*, New York, v. 68, p. 030102(R), 2003.

SCHNEIDER, W.R.; WYSS, W. Fractional Diffusion and Wave equations. *J. Math. Phys.*, New York, v. 30, p. 134-144 1989.

SILVA, P.C. *et al.* Anomalous diffusion and anisotropic nonlinear Fokker-Planck equation. *Physica A*, Amsterdam, v. 342, p. 16-21, 2004.

TSALLIS, C. What are the numbers that experiments provides?. *Quím. Nova*, São Paulo, v. 27, p. 468-472, 1994.

TSALLIS, C. *et al.* The role of the constraints within generalized nonextensive statistics. *Physica A*, Amsterdam, v. 261, p. 534-554, 1998.

TSALLIS, C.; BUKMAN, D.J. Anomalous diffusion in the presence of external forces: Exact time-dependent solutions and their thermostistical basis. *Phys. Rev. E*, New York, v. 54, p. R2197-R2200, 1996.

UCHAIKIN, V.V. Multidimensional symmetric anomalous diffusion. *Chem. Phys.*, Amsterdam, v. 284, p. 507-520, 2002.

Received on April 28, 2005.

Accepted on June 23, 2006.