

# Análise de problemas de fronteira móvel usando a técnica dos elementos de contorno

Gracielle Johann<sup>1</sup> e Edson Antonio da Silva<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Curso de Engenharia Química. Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Rua da Faculdade, 645, 85903-300, Toledo, Paraná, Brasil. <sup>2</sup>Núcleo de Biotecnologia e Desenvolvimento de Processos Químicos, Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste). \*Autor para correspondência. e-mail: edsondeq@unioeste.br

**RESUMO.** O presente trabalho tem como objetivo o emprego da técnica de elementos de contorno na solução do problema unidimensional de solidificação em coordenadas cartesianas. A técnica de elementos de contorno transforma o problema original, que era a resolução de uma equação diferencial parcial, na resolução de um sistema de equações não lineares, tendo como incógnitas a posição da frente de congelamento e os fluxos de calor em cada uma das extremidades. Os resultados obtidos com as simulações numéricas foram comparados com um problema de solidificação que apresenta solução analítica. O método empregado apresentou-se rápido e eficiente na solução do problema de solidificação e verificou-se a concordância entre os resultados obtidos com a solução numérica e os obtidos com a solução analítica. A análise mostrou que a técnica de elementos de contorno foi eficiente na resolução do problema de mudança de fase e que a metodologia empregada pode ser estendida para situações mais complexas que não apresentem solução analítica.

**Palavras-chave:** solidificação, método dos elementos de contorno, transferência de calor.

**ABSTRACT.** Analysis of the problem with chang phase. The present work aims the employment of the boundary elements method for the solution to the one-dimensional solidification problem in Cartesian coordinates. The boundary elements method transforms the original problem, which was the resolution of a partial differential equation, for the solution to a system of non linear equations, and it has as unknowns the front position of freezing and the flows of heat at each one of the extremities. The results obtained with the numeric simulations were compared with a problem that presents analytic solution. The method employed showed fast and efficient for the solution to the problem investigated, and the agreement was verified between the result obtained with numeric solution and the one with analytic solution. The analysis showed that the boundary elements method was efficient for the solution to the problem of change phase, and the proposed methodology can be applied for more complex situations that do not present analytic solution.

**Key words:** solidification, boundary elements method, heat transfer.

## Introdução

A solidificação é de interesse prático em diversas áreas, como na refrigeração, na eletroquímica, na fusão de ligas metálicas, etc. (Prud'homme e Enguyen, 1989). Na indústria alimentícia, a refrigeração e o congelamento à baixa temperatura são técnicas muito utilizadas para a preservação de alimentos perecíveis (Campañone *et al.*, 2002). Uma outra aplicação dos processos com mudança de fase é o banco de gelo que corresponde a equipamentos que armazenam energia na forma de calor latente a baixas temperaturas. Esses equipamentos são usados principalmente no condicionamento de ar em prédios, residências, escritórios, comércio e indústria em geral, onde conforto é um aspecto importante para o desempenho humano (Ismail, 1998).

A condução de calor envolvendo mudança de fase é um processo muito conhecido e têm diversas aplicações industriais (Alhama e Gonzales-Fernandez, 2002). Problemas em que a solução da equação diferencial deve satisfazer certas condições de contorno na fronteira do domínio prescrito são chamados de problemas de valor de fronteira. Em casos muito importantes, a posição da fronteira não é conhecida, havendo a necessidade de ser determinada. A posição da fronteira deve ser determinada como função do tempo e do espaço (Crank, 1996). Problemas de fronteira móvel são freqüentemente denominados de problemas de Stefan, em função da contribuição de diversos trabalhos desenvolvidos por Joseph Stefan (Crank, 1996; Zerroukat *et al.*, 1998). Devido à complexidade

desse tipo de problema, soluções analíticas são muito difíceis de serem obtidas. Dessa forma, torna-se necessário o emprego de técnicas numéricas, como Diferenças Finitas, Volumes Finitos, Elementos Finitos e Elementos de Contorno (DeLima-Silva e Wrobel, 1995; Crank, 1996).

Dos vários métodos existentes para a resolução do problema de Stefan, a técnica de elementos de contorno (BEM) se destaca por causa de sua eficiência (Hsieh e Kassab, 1995). Essa virtude vem do fato de que, nesse método, os pontos nodais estão localizados na fronteira. Estes pontos nodais movem-se junto com a interface entre as fases (Hsieh e Kassab, 1995). No método de contorno, os problemas de Stefan podem ser resolvidos sem interferência das malhas de discretização do domínio do problema, sejam elas fixas ou móveis. Entretanto, em outros métodos numéricos, tais como diferenças finitas ou elementos finitos, a malha de discretização é importante, além de ser freqüentemente parte integrante da solução (Hsieh e Kassab, 1995). O método de elementos de contorno é um método numérico para a solução de equações integrais de contorno, baseado em um procedimento de discretização (Ibáñez e Power, 2002); atualmente é uma alternativa importante aos métodos de domínio que prevalecem na análise de sistemas microscópicos que envolvam transferência de massa e de energia (Ibáñez e Power, 2002). A fórmula de representação da integral de Green para a equação de calor foi extensivamente usada na literatura e a sua formulação é apresentada por Morse e Feshbach (1953) e por Carslaw e Jaeger (1959). Chang *et al.* (1973) e Shaw (1974) foram os pioneiros na aplicação da formulação direta da técnica de elementos de contorno. Chuang e Szekely (1971), Shaw (1982), Wrobel (1983) e DeLima-Silva e Wrobel (1995) empregaram a técnica de elementos de contorno em problemas de fronteira móvel unidimensional com uma fase. DeLima-Silva e Wrobel (1995) empregaram a solução fundamental dependente do tempo para a equação de difusão, junto com um esquema de marcha no tempo cumulativo e um algoritmo iterativo preditor-corretor para localizar a frente móvel.

Nesse trabalho, foi aplicada a formulação direta da técnica de elementos de contorno na resolução do problema de Stefan. Foi empregado um esquema de marcha no tempo passo a passo e um procedimento iterativo foi empregado em função da não-linearidade do problema. Para validar a formulação matemática apresentada, os resultados foram comparados com um problema que apresenta solução analítica (Prud'homme e Nguyen, 1989). Os resultados

numéricos obtidos ficaram em concordância com a solução analítica. Esses resultados mostram a eficácia do método e a confiabilidade para a sua aplicação em outras situações em que não seja possível obter a solução analítica.

## Material e métodos

Neste trabalho, é empregada a técnica de elementos de contorno aplicada a uma única fase em um processo da solidificação. Nesse caso, só uma região é considerada com uma superfície móvel, ao invés de duas fases com uma interface móvel entre eles. Na construção do modelo matemático será considerado que, inicialmente, o sistema se encontra na fase líquida e que a temperatura é homogênea no sistema e igual à temperatura de solidificação. Em uma das extremidades do sistema, em  $x = R_W$ , a temperatura é abruptamente alterada e mantida constante em um valor inferior à temperatura de fusão, iniciando o processo de solidificação. A Figura 1 representa o processo de solidificação.

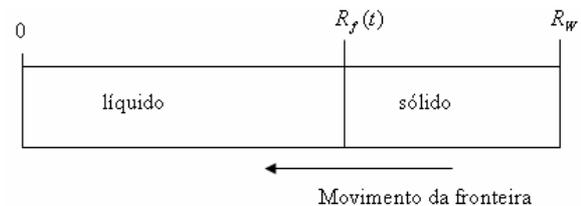


Figura 1. Movimento da fronteira de solidificação.

A equação da difusão que descreve a transferência de calor nesse sistema é dada pela seguinte expressão:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Onde  $u$  é a Temperatura e  $\alpha_s$  é a difusividade térmica do sólido.

Seja  $L$  o operador diferencial representado pela seguinte equação:

$$L[u] = \alpha_s u_{xx} - u_t = 0 \quad (2)$$

Seja  $M$  o operador adjunto de  $L$  e  $v$  uma função tal que:

$$M[v] = \alpha_s v_{xx} + v_t = 0 \quad (3)$$

Da multiplicação da Eq. (2) por  $v$  e da Eq. (3) por  $u$  e fazendo-se a subtração destes dois termos,

obtém-se a seguinte expressão:

$$vL[u] - uM[v] = (\alpha_s v u_x - \alpha_s v_x u)_x - (uv)_t = 0 \quad (4)$$

Nos problemas de congelamento, o domínio do problema não é conhecido em função da variação da interface entre as fases com o tempo, representada por  $R_f(t)$ . Esse comportamento é ilustrado na Figura 2. Nessa figura,  $t_f(x)$  representa o tempo para uma determinada posição da frente de congelamento.

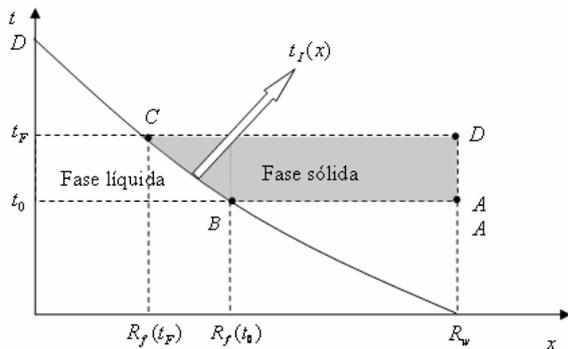


Figura 2. Representação do domínio do problema de solidificação unidimensional.

A integração da Eq. (4) sobre a região de domínio do problema (ABCD), conforme ilustrado na Figura 2, resulta na seguinte equação:

$$\int_{ABCD} (\alpha_s v u_x - \alpha_s v_x u) dt - \int_{ABCD} uv dx = 0 \quad (5)$$

Aplicando-se os limites de integração na Eq. (5) e rearranjando-os, tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi, t_F) &= \int_{R_f(t_0)}^{R_w} u(x, t_0) G(\xi, x, t_0, t_F) dx - \\ &u_M \int_{R_f(t_0)}^{R_f(t_F)} G(\xi, x, t_f(x), t_F) dx + \alpha_s q_R \int_{t_0}^{t_F} G(\xi, R_w, t_0, t_F) dt - \\ &\alpha_s u_R \int_{t_0}^{t_F} G_x(\xi, R_w, t, t_0) dt - \alpha_s q_M^S \int_{t_0}^{t_F} G(\xi, R_f(t), t, t_0) dt + \\ &\alpha_s u_M \int_{t_0}^{t_F} G_x(\xi, R_f(t), t, t_0) dt \end{aligned} \quad (6)$$

Na construção da formulação integral da técnica de elementos de contorno, utilizou-se a formulação direta na qual se estabelece uma relação de reciprocidade entre o estado real (incógnito) e o estado auxiliar, escolhido para conduzir a representação integral envolvendo

quantidades diretamente relacionadas com as do problema sobre análise (Cruze e Rizzo, 1968). Na Eq. (6), escolhe-se  $v$  como estado auxiliar (formulação direta) a solução fundamental  $G(\xi, x, t_F, t)$ , isto é, a função de Green. Em coordenadas cartesianas unidimensionais, a solução fundamental da equação da difusão é dada pela seguinte equação (Brebis *et al.*, 1984; Zerroukat *et al.*, 1998):

$$v = G(\xi, x, t_F, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha_s(t_F - t)}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4\alpha_s(t_F - t)}\right) \quad (7)$$

A função de Green é obtida resolvendo-se a equação de difusão quando é aplicada uma fonte de calor na posição  $x = \xi$  no instante de tempo  $t = t_F$ , para condições limite de homogeneidade em um meio infinito (Chuang e Szekely, 1971). Para investigar a singularidade da integral na variável  $t$ , subtrai-se uma pequena quantidade arbitrária ( $\epsilon$ ) no tempo ( $t_F$ ) e toma-se limite quando  $\epsilon$  tende a zero; dessa forma, tem-se que (Brebis *et al.*, 1984):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int u(x, t) G(\xi, x, t_F, t) \Big|_{t=t_F-\epsilon} dx = c(\xi)u(\xi, t_F) \quad (8)$$

$$\text{Em que } c(\xi) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } \xi \in \Gamma \text{ (contorno)} \\ 1 & \text{se } \xi \in \Omega \text{ (domínio)} \end{cases}$$

As condições de contorno do problema são:

$$u(R_w, t) = u_R \quad (9)$$

$$u(R_f, t) = u_M \quad (10)$$

Sendo que  $u_R$  é a temperatura na parede e  $u_M$  é a temperatura de fusão do sólido.

Os fluxos de calor na fase sólida serão representados pelas seguintes expressões:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = q_R \text{ em } x = R_w \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = q_M^S \text{ em } x = R_f \quad (12)$$

Na resolução da formulação integral resultante da aplicação do método de elementos de contorno, serão empregados elementos constantes em cada passo do tempo, isto é, será considerado que a temperatura e as suas respectivas derivadas

são constantes em cada passo do tempo, portanto a formulação integral resultante da aplicação da técnica de elementos de contorno resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \alpha(\xi)u(\xi,t_F) &= \int_{R_f(t_0)}^{R_w} u(x,t_0)G(\xi,x,t_0,t_F)dx - u_M \int_{R_f(t_0)}^{R_f(t_F)} G(\xi,x,t_f(x),t_F)dx + \\ \alpha_S q_R \int_0^{t_F} G(\xi,R_w,t_0,t_F)dt - \alpha_S u_R \int_0^{t_F} G_x(\xi,R_w,t,t_0)dt - \alpha_S q_M^S \int_0^{t_F} G(\xi,R_f(t),t,t_0)dt + \\ \alpha_S u_M \int_0^{t_F} G_x(\xi,R_f(t),t,t_0)dt \end{aligned} \quad (13)$$

A Eq. (13) é válida para qualquer ponto  $\xi$  do domínio e é a formulação integral para esse problema. Para se obter a equação integral no contorno, leva-se o ponto  $\xi$  para o contorno. Uma das incógnitas do problema de mudança de fase é a posição da fronteira móvel. O balanço de energia em um elemento de volume na fronteira móvel resulta na seguinte expressão:

$$\Delta H^F \rho_S \frac{dR_f}{dt} = k^S \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=R_f} \quad (14)$$

A integração da Eq. (14) no tempo resulta na seguinte expressão:

$$R_f(t_F) = R_f(t_0) + \frac{(t_F - t_0) k^S}{\Delta H^F \rho_S} q_M^S \quad (15)$$

A integral no domínio que aparece na Eq. (13) foi resolvida numericamente empregando-se o método de Quadratura de Gauss com dez pontos de integração. Deve-se destacar que, na formulação matemática, a única integral sobre o domínio é avaliada no instante de tempo  $t_0$  (tempo inicial), em que são conhecidos os valores da temperatura. Dessa forma, quando se aplica como ponto de colocação os valores das variáveis no contorno, obtém-se um sistema de equações cujas incógnitas são a posição da fronteira móvel e os valores da temperatura e dos fluxos no contorno. As integrais na variável tempo na fronteira fixa, isto é, em  $x = R_w$ , foram resolvidas analiticamente. As integrais na frente de congelamento apresentam singularidade no ponto  $x = R_f(t_F)$ , enquanto as integrais na variável tempo na fronteira móvel também apresentam singularidade quando  $t = t_F$ . Todas as integrais que apresentam singularidade foram resolvidas numericamente empregando a subrotina QDAGS, desenvolvida por Piessens et al. (1983), cujo código fonte está em linguagem FORTRAN. Ela subdivide um intervalo

dado e usa a Regra de Gauss-Kounrod com 21 pontos para estimar a integral sobre cada subintervalo. O erro para cada subintervalo é estimado por comparação com a regra de Gauss com 10 pontos. Essa rotina é usada em funções que apresentam singularidade em seus pontos finais. As integrais no tempo na fronteira fixa (em  $x = R_w$ ) foram resolvidas analiticamente e são apresentadas das Eq. (16) à (19).

$$\int_{t_0}^{t_F} G(R_w, R_w, t, t_0) dt = -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\alpha_S^2}} \quad (16)$$

$$\int_{t_0}^{t_F} G_x(R_w, R_w, t, t_0) dt = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_F} G(R_f(t_F), R_w, t, t_0) dt &= \frac{1}{2\pi\alpha_S^2} \sqrt{\pi} \sqrt{h} \sqrt{\alpha_S^2} \exp\left(-\frac{R_f(t_F)^2}{4\alpha_S^2 h}\right) + \\ \frac{1}{2\pi\alpha_S^2} R_f(t_F) \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \frac{R_f(t_F)}{\sqrt{\alpha_S^2 h}}\right) - \frac{1}{2\pi\alpha_S^2} R_f(t_F) \pi \end{aligned} \quad (18)$$

$$\int_{t_0}^{t_F} G_x(R_f(t_F), R_w, t, t_0) dt = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{0.5R_f(t_F)}{\sqrt{\alpha_S^2 h}}\right) - 1}{\alpha_S^2} \quad (19)$$

Onde  $h = t_F - t_0$ .

Existem na literatura duas abordagens alternativas para implementação do esquema de marcha no tempo. Um dos esquemas envolve a reinicialização em cada passo no tempo e as integrais do domínio são calculadas a cada passo (Silva et al., 2001). No outro esquema, a integral no domínio é calculada apenas no instante de tempo inicial, contudo são requeridos que sejam armazenados todos os valores das variáveis primitivas em todos os passos de tempo. A desvantagem do segundo esquema é o maior espaço de memória computacional para o armazenamento das variáveis (Brebbia et al., 1984).

Neste trabalho, foi adotado o esquema de marcha no tempo passo a passo. No método de elementos de contorno, devem-se inicialmente determinar os valores das variáveis no contorno, que, nesse caso, são as seguintes:  $u_R, u_M, q_M^S, q_R$  e  $R_f(t_F)$ . Nesse problema, as condições de contorno especificadas são os valores das temperaturas em cada uma das extremidades:  $u_R$  e  $u_M$ , portanto as incógnitas do problema são as derivadas em cada uma das fronteiras  $q_M$  e  $q_R$  e a posição da fronteira móvel  $R_f(t_F)$ . Para se obter a equação integral no contorno, leva-se o ponto  $\xi$  para o contorno, isto é,

faz-se  $\xi = R_w$  e  $\xi = R_f(t_f)$  na Eq. (13). Dessa forma, obtém-se um sistema de duas equações. A não linearidade do problema, devido ao desconhecimento da localização da frente de solidificação, torna necessário o emprego de procedimento iterativo para a sua solução. O algoritmo empregado na resolução desse problema, em cada passo do tempo, é apresentado na Figura 3. O algoritmo iterativo adotado assume que sejam conhecidos todos os valores das temperaturas e dos fluxos no instante de tempo  $t_0$ . Após o cálculo dos valores das variáveis no contorno e da posição da fronteira móvel, procede-se, então, ao cálculo das variáveis no domínio. Esse cálculo é efetuado aplicando  $\xi = x_i$  na Eq.(13); deve-se destacar que o cálculo dos valores da temperatura do domínio envolve apenas o cálculo de uma equação explícita. Os métodos empregados no cálculo das integrais da Eq.(13) nos pontos do domínio foram análogos aos procedimentos empregados no cálculo dos pontos de contorno. Foram calculados os valores em dez pontos do domínio.

Um programa computacional em linguagem FORTRAN foi desenvolvido para a resolução desse problema. Para analisar os resultados obtidos com as simulações, foram feitas comparações com a solução analítica desse problema obtida por Prud'homme e Nguyen (1989), representadas pelas Eq.(20) e Eq.(21).

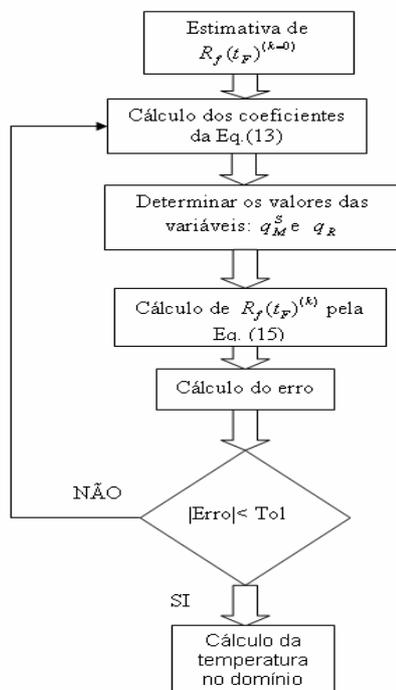


Figura 3. Algoritmo empregado na resolução do problema de solidificação.

$$u(x,t) = \Delta u \sqrt{\frac{\pi C}{2\epsilon}} \exp\left(-\frac{\epsilon C}{2}\right) \times \text{erf}\left(\sqrt{\frac{\epsilon C}{2}} \frac{1-r}{1-R_f(t)}\right) + u_R \quad (20)$$

$$R_f(t) = 1 - \sqrt{2C \frac{tk^S \Delta u}{\rho_S \Delta H^F R_w^2}} \quad (21)$$

Onde  $\Delta u = u_m - u_R$ ,  $r = x/R_w$ ,  $\epsilon = (Cp_S \Delta u / \Delta H^F)$ ,  $C$  é uma constante de integração que é obtida pelo emprego da Eq.(9) na Eq.(20).

Resultados

Na investigação do processo de solidificação, foi selecionada a água para realizar as simulações. Os valores das propriedades do gelo e os parâmetros do modelo empregados na simulação estão apresentados na Tabela 1. O passo no tempo utilizado no método foi de  $1,75 \times 10^{-2}$  min. A tolerância para o cálculo iterativo da posição da fronteira móvel foi de  $10^{-7}$ .

Tabela 1. Parâmetros e propriedades do gelo usado na simulação.

<sup>(1)</sup> Densidade (g/cm <sup>3</sup> )	0.8928
<sup>(1)</sup> Calor latente de fusão (cal/g)	80.00
<sup>(2)</sup> Calor específico (cal/g.K)	0.487
<sup>(2)</sup> Condutividade térmica (cal.min.cm.K)	0.2694
Comprimento da placa (cm)	5.00
Temperatura da parede (K)	253.15
Temperatura de solidificação da água(K)	273.15

<sup>(1)</sup> Fonte – Azevedo, 2000; <sup>(2)</sup> Fonte – Incropera, 2003

Na Figura 4, são apresentados os resultados da posição da frente de congelamento em função do tempo, calculado pela aplicação do método de elementos de contorno e os resultados obtidos com a solução analítica desse problema que foi calculada pela Eq.(21).

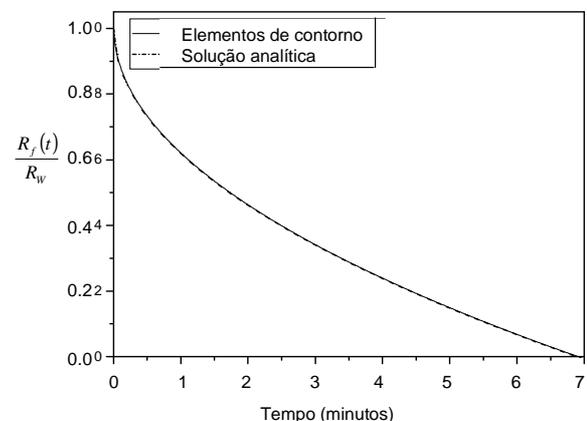


Figura 4. Posição da frente de congelamento em função do tempo.

## Discussão

Existem na literatura diversos métodos numéricos empregados na resolução de problemas de solidificação, tais como diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos. Esses métodos requerem que o domínio do problema seja discretizado e os resultados dependem muito do esquema de discretização. Nos métodos numéricos que empregam a malha fixa, as condições de contorno devem ser calculadas empregando dois pontos da malha de discretização em cada passo do tempo. Portanto, são necessárias formulações especiais para as equações na frente de solidificação que geralmente requerem um procedimento iterativo. O método de Elementos de Contorno é uma alternativa importante na resolução de equações diferenciais. A base desse método é a transformação da equação diferencial parcial original, ou sistema original, que descreve o sistema físico em questão, em uma equação integral equivalente, ou sistema, por meio do uso da função de Green. Essa função é obtida pela solução do operador adjunto do problema original. O método apresenta muitas vantagens em relação a outras técnicas, sendo a principal a possibilidade de redução do esforço computacional na resolução do problema ao qual é empregado. Outra vantagem do método de elementos de contorno em relação a outros métodos numéricos é que as incógnitas do problema são apenas variáveis no contorno. Os valores obtidos no domínio são obtidos por uma equação algébrica desde que conhecidos os valores do contorno. A técnica de elementos de contorno reduz a dimensão do problema em análise, pois, ao levar a formulação integral do domínio para o contorno do problema, a sua dimensão que antes era de  $(m)$  passa a ser  $(m - 1)$ , proporcionando uma redução no tempo computacional. Neste caso, a dimensão do problema era um, e a aplicação dessa técnica reduziu a dimensão para ordem zero, isto é, as incógnitas dos problemas ficaram restritas às duas extremidades da barra. Os resultados apresentados na Figura 4 mostram que houve uma concordância entre os resultados obtidos com o emprego do método de Elementos de Contorno com a solução analítica, demonstrando a eficácia do método utilizado.

## Conclusão

Neste trabalho, foi realizado um estudo da aplicação do Método de Elementos de Contorno na análise de problemas com mudança de fase. A formulação matemática resultante da aplicação do método também é apresentada detalhadamente. O

esquema de marcha no tempo passo a passo foi empregado. No desenvolvimento do método matemático, foi aplicado um procedimento iterativo para o cálculo da posição da fronteira móvel. Desenvolveu-se um programa computacional em linguagem computacional FORTRAN para a resolução do problema de fronteira móvel. Os resultados obtidos com as simulações foram comparados com um problema da literatura que apresenta solução analítica. Os resultados mostraram a eficácia do método e a confiabilidade na solução do problema de mudança de fase. O Método de Elementos de Contorno pode ser estendido para o caso de problemas de ordem superior, em superfícies mais complexas, ou ainda em outras situações mais gerais em que não seja possível obter a solução analítica. Em virtude das características do programa desenvolvido, pode-se adaptá-lo a outros problemas de transferência de calor com mudança de fase.

## Nomenclatura

$C$	Constante de integração
$Cp_s$	Capacidade calorífica do sólido, cal/gK
$k^s$	Condutividade térmica do sólido, cal/min. m K
$q_R$	Fluxo de calor na fronteira fixa
$q_M^s$	Fluxo de calor na fronteira móvel
$R_f$	Posição da fronteira móvel, m
$R_w$	Posição da fronteira fixa, m
$t_F$	Tempo final, min
$t_0$	Tempo inicial, min
$u_m$	Temperatura de fusão, K
$u_R$	Temperatura da parede, K
$u$	Temperatura, K
$x$	Coordenada na direção axial

## Símbolos gregos

$\alpha_s$	Difusividade térmica do sólido, m <sup>2</sup> /min
$\epsilon$	Número de Stefan
$\Delta H^F$	Calor latente de fusão, cal/g
$\rho_s$	Densidade do material da fase sólida, g/cm <sup>3</sup>
$\xi$	Ponto de aplicação da fonte de calor referente à função de Green

## Referências

- ALHAMA, F.; GONZALES-FERNANDES, F. Network simulation method for solving phase-change heat transfer problems with variable thermal properties. *Heat and Mass Transf.*, Berlin, v. 38, p. 327-335, 2002.
- AZEVEDO, E.G. *Termodinâmica Aplicada*. 2. ed. São Paulo: Escolar, 2000.

- BREBIA, C.A. *et al.* *Boundary Element Techniques*. Berlin: Springer Verlag, 1984.
- CAMPAÑONE, L.A. *et al.* Monitoring of weight Losses in meat products during freezing and frozen storage. *Food Sci. Tech. Int.*, Frederick, v.8, p.229-238, 2002.
- CARSLAW, H.S.; JAEGER, J.C. *Conduction of Heat in Solids*, 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 1959.
- CHANG, Y.P. *et al.* The use of fundamental Green's functions for the solution of problems of heat conduction in anisotropic media, *Int. J. Heat Mass Transf.*, Oxford, v. 16, p. 1905-1918, 1973.
- CHUANG, Y.K.; SZEKELY, J. On the use of Green's functions for solving melting or solidification, *Int. J. Heat Mass Transf.*, Oxford, v. 14, p. 1285-1294, 1971.
- CRANK, J. *Free and moving boundary problems*. Oxford: Science Publications, 1996.
- CRUZE, T.A.; RIZZO, F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic Problem. *Int. J. Math. Anal. Appl.*, v. 22, p. 244, 1968.
- DELIMA-SILVA, W. Jr.; WROBEL, L.C. A front-tracking BEM formulation for one-phase solidification/melting problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Southampton, v. 16, p. 171-182, 1995.
- HSIEH, C.K.; KASSAB, A.J. A source and sink method for numerical and exact solutions of Stefan problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Southampton, v. 16, p. 149-160, 1995.
- IBÁÑEZ, M.T.; POWER, H. Numerical scheme for phase change problems using Fourier Series, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Amsterdam, v. 191, p. 2371-2402, 2002.
- INCROPERA, F.P.; WITT, D.P. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. LTC: 2003.
- ISMAIL, A.R.K. *Bancos de gelo fundamentos e modelagem*. São Paulo: Edição do Autor, 1998.
- MORSE, P.M.; FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*, New York: McGraw-Hill, 1953.
- PIESSENS A. *et al.* *A Subroutine Package for Automatic Integration*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1983.
- PRUD'HOMME, M.; NGUYEN, T. A heat transfer analysis for solidification of slabs, cylinders and spheres. *J. Heat Transf.*, New York, v. 111, p. 699-705, 1989.
- SHAW, R.P. A boundary integral equation approach to the one-dimensional ablation problem. *In: Boundary Element Methods in Engineering*. Computational Mechanics Publications, Berlin: Southampton and Springer-Verlag, 1982.
- SHAW, R.P. An integral equation approach to diffusion, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Oxford, v. 17, p. 693-699, 1974.
- SILVA, E.A. *et al.* Gelatin Drying Process. *Braz. J. Chem. Eng.*, São Paulo, v. 18, p. 467-478, 2001.
- WROBEL, L.C. A boundary element solution to Stefan's problem. *Boundary Elements V*. Computational Mechanics Publications, Berlin: Southampton and Springer-Verlag, 1983.
- ZERROUKAT, M. *et al.* Heat and solute diffusion with a moving interface: a boundary element approach, *Int. J. Heat Mass Transf.*, Oxford, v. 41, p. 2429-2436, 1998.

Received on September 20, 2005.

Accepted on December 21, 2005.