Acta Scientiarum 21(4):891-896, 1999.
ISSN 1415-6814.

O teorema de Poincaré-Hopf para superfície com bordo

Nelson Martins Garcia

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 5790, 87020-900, Maringá-Paraná, Brazil.
e-mail: nmgarcia@dma.uem.br

RESUMO. O maior resultado neste trabalho é uma versão do teorema de Poincaré-Hopf para superfície com bordo não vazio. As ferramentas utilizadas são o teorema clássico de Poincaré-Hopf e o "florescer do campo ∂/∂t", devido a J. L. Arraut.

Palavras-chave: superfície com bordo, teorema de Poincaré-Hopf.

ABSTRACT. **The theorem of Poincaré-Hopf for surfaces with nonempty boundary.** The main goal of this work is to present a version of the theorem of Poincaré-Hopf for surfaces with non empty boundary. The main tools are the theorem of Poincaré-Hopf and an idea called "blossoming of the field ∂/∂t", due to J. L. Arraut.

Key words: surfaces with nonempty boundary, theorem of Poincaré-Hopf.

O teorema de Poincaré-Hopf para superfície compacta e sem bordo é um dos resultados mais surpreendentes da topologia, pois relaciona objetos de naturezas distintas, a saber, a característica de Euler, que é um invariante topológico, e o índice de um campo vetorial, que é um invariante diferencial.

O objetivo neste trabalho é apresentar esse resultado para superfície compacta e com bordo não vazio. Para isto, será usado o conceito de "o florescer do campo ∂/∂t", (Arraut e Randall, 1982).

Neste trabalho apresenta-se o conceito de superfície com bordo e os conceitos de dobro de uma superfície com bordo, que origina uma superfície sem bordo e a noção do florescer do campo ∂/∂t.

O comportamento transversal do campo vetorial no bordo da superfície é capital, pois, caso o campo seja tangente ao bordo, em algum ponto o resultado é falso.

Neste trabalho, a palavra diferenciável significará infinitamente diferenciável e todas as superfícies são conexas.

Superfície com Bordo

Um subconjunto $W^m \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de *superfície diferenciável com bordo* de dimensão m, se, para cada $p \in W^m$, existir uma vizinhança $V \subset W$ (aberto em W^m) imagem de um homeomorfismo,
$\varphi : V_o \to V$, onde V_o é um aberto em

$$\mathbb{H}^m = \{(x_1,\ldots,x_m) \,/\, x_m \geq 0\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Exige-se ainda que φ seja *diferenciável*★ e o posto de $\varphi'(x)$ seja m para todo $p \in V$. A função φ é chamada de uma parametrização de V.
(★) *Diferenciável* aqui significa que φ admite uma extensão diferenciável a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$, e, por definição, a derivada de φ é a derivada de uma extensão, que não depende da extensão de φ.

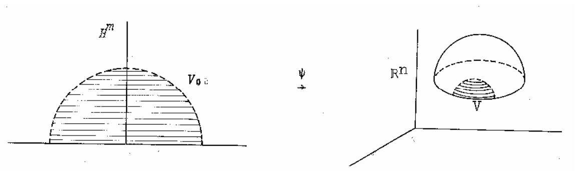

Figura 1.

Notação. O bordo de W é o subconjunto ∂W, formado pelos pontos de W, que são imagens de pontos da forma $(x_1,\ldots,x_{m-1},0)$ de $\mathbb{H}^m$, por alguma parametrização.

Se W é uma superfície com bordo ∂W, então o bordo, é uma superfície sem bordo onde:
$dim\partial W = dim\partial W - 1$ (veja Lima, 1985, , VII §7).

Exemplos.

$$\mathbb{D}^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \,/\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n;\ \partial\mathbb{D}^n = S^{n-1};$$

$W^n = \{(x_1,x_2,x_3) \ / \ z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$; $\partial W^n = T^2$.

As noções de espaço vetorial tangente e campos de vetores tangentes a uma superfície com bordo $W^m \subset \mathbb{R}^n$ são as apresentadas em Lima (1985, p.52), página 52, para superfícies sem bordo, somente com a ressalva de que podem existir caminhos diferenciáveis:

$$\lambda: [-\xi,\xi] \to W,$$

com $\lambda'(\xi)$ definido naturalmente por uma extensão de λ.

Para $p \in \partial W$, distinguem-se três tipos de vetores em T_pW:

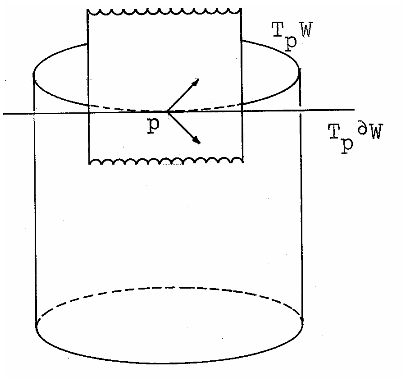

Figura 2.

Como T_pW é um espaço vetorial de dimensão m e é um subespaço de T_pW de dimensão $m-1$, então $T_p\partial W$ "divide" T_pW em dois semi-espaços, que serão chamados de *semi-espaço interior* e *semi-espaço exterior* em relação a W.

Com isto, os três tipos de vetores tangentes a W em $p \in \partial W$ são:

i) os vetores tangentes a ∂W, isto é, $v_p \in T_p\partial W$, $v_p = \lambda'(0)$, $v_p = \lambda'(0)$, onde
$$\lambda : (-\xi,\xi) \to \partial W;$$
ii) os vetores interiores a W, isto é, os vetores $v_p \notin T_p\partial W$, onde $v_p = \alpha'(0)$, com
$$\alpha : [0\ ,\ \xi) \to W \text{ e } \alpha(0) = p;$$
iii) os vetores exteriores a W, isto é, os vetores $v_p \notin T_p\partial W$, onde $v_p = \beta'(0)$, com
$$\beta : (-\xi,0] \to W \text{ e } \beta(0) = p;$$

O dobro de uma superfície com bordo

Considere os dois subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$D_+^2 = \{(x_1,x_2,x_3)/\, z = \sqrt{1-x^2-y^2} \text{ e } x^2+y^2 \le 1\}$$
$$D_-^2 = \{(x_1,x_2,x_3)/\, z = -\sqrt{1-x^2-y^2} \text{ e } x^2+y^2 \le 1\}$$

e veja que a esfera unitária $S^2 = D_+^2 \cup D_-^2$.

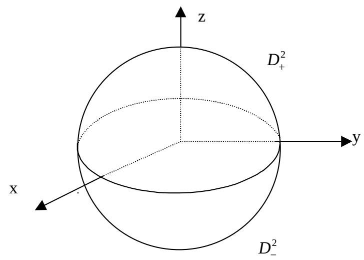

Figura 3.

Essa construção geométrica é o que se chama o dobro do disco $\mathbb{D}^2$, também notado por $2\mathbb{D}^2 = S^2$.

A construção informal acima carece de precisão, uma vez que a estrutura diferenciável no dobro depende da estrutura em cada cópia, ou seja, a questão não é somente de união de conjuntos, pois, começando a operação com duas "calotas" menores, isto é, com bordo não sendo círculo máximo, não se tem diferenciabilidade como superfície do espaço euclidiano. A superfície resultante é parecida com uma bola de "futebol americano" com uma "quina".

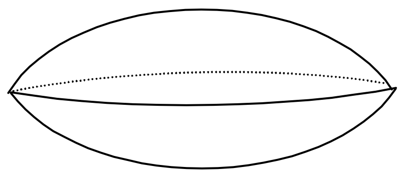

Figura 4.

O dobro de um disco, nas condições acima, não é uma superfície diferenciável em $\mathbb{R}^3$.

Observe que, para realizar essa operação, precisou-se "sair" do espaço ambiente de $\mathbb{D}^2$, que é $\mathbb{R}^2$.

A mesma operação com a faixa de Möebius compacta e com bordo $\mathbb{M}^2$

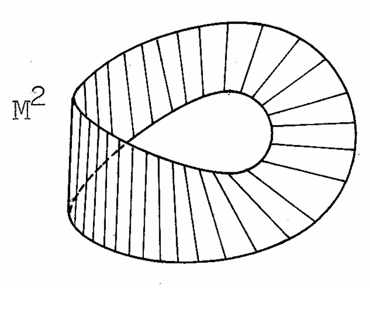

Figura 5.

precisa de, no mínimo, do espaço $\mathbb{R}^4$ para realizar,

$$\mathbb{M}^2 = \mathbb{K}^2,$$

onde $\mathbb{K}^2$ é a garrafa de Klein. Nesse exemplo, mesmo como união de subconjuntos, os interiores se interceptam, ou seja, $\mathbb{K}^2$ não "cabe" no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ como superfície sem auto-intersecção. A razão mais geral é que $\mathbb{K}^2$ não mergulha no espaço euclidiano de dimensão 3.

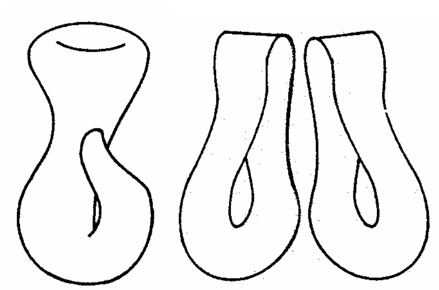

Figura 6.

Para realizar esta operação com precisão, constrói-se o dobro de uma superfície como espaço quociente. O que se faz é abstrair-se do espaço ambiente e tomar a superfície como objeto abstrato, com estrutura diferenciável ou, mais geralmente, como variedade diferenciável.

Seja W uma superfície com bordo e considere duas cópias de W:
$W_0 = W\times\{0\}$ e $W_1 = W\times\{1\}$,
onde $\partial W_0 = \partial W\times\{0\}$ e $\partial W_1 = \partial W\times\{1\}$.

Tomando $Z = W_0 \coprod W_1$, soma disjunta de W_0 com W_1, defina a relação de equivalência em Z por:
$(x,0)R(x,1)$, para $x \in \partial W$.

O dobro de W é definido por $2W = Z/R$, o espaço quociente obtido de Z pela relação de equivalência R.

Exemplos

1. Se $W = IH^m_+ = \{(x_1,\ldots,x_m) / \ x_m \geq 0\} \subset \mathbb{R}^m$,

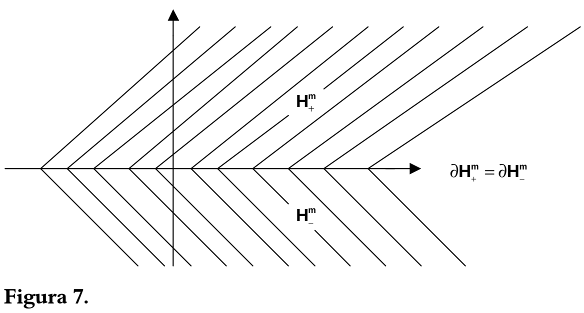

Figura 7.

tem-se $2\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^m$ onde $\mathbb{H}^m_- = \{ (x_1,\ldots,x_m) / \ x_m \leq 0 \} \subset \mathbb{R}^m$

2. Se $D^2 = \{(x_1,x_2,x_3)/ z = \sqrt{1-x^2-y^2} \text{ e } x^2+y^2 \leq 1\}$, então $2\mathbb{D}^2 = S^2$.

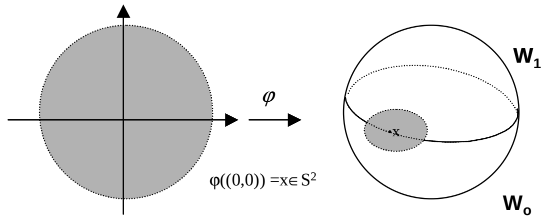

Figura 8.

Observe que, se $\varphi_1 : D^2_+ \to \vartheta_1$ e $\varphi_2 : D^2_- \to \vartheta_2$ são parametrizações em torno de $x \in \partial W$, então $\varphi : D^2 \to \vartheta_1 \cup \vartheta_2$ será uma parametrização em torno de $x \in 2W$.

A estrutura diferenciável em $2W$ é dada a partir da estrutura em W. Para isto deve-se usar uma vizinhança tubular de ∂W em W. Para maiores detalhes, veja Lima (1981, p.32). Em particular, em Lima (1981, p.62), mostra-se que a estrutura diferenciável não depende da vizinhança tubular escolhida.

O teorema de Poincaré- Hopf para superfície com bordo

O teorema de Poincaré- Hopf para superfícies compactas e sem bordo é um dos resultados mais surpreendentes da topologia, pois relaciona objetos de naturezas distintas, a saber, a característica de Euler, que é um invariante topológico e o índice de um campo vetorial, que é um invariante diferencial.

Teorema (Poincaré-Hopf). Se um campo diferenciável de vetores tangentes a uma superfície compacta M tem apenas um número finito de singularidades, então a soma dos índices locais dessas singularidades é igual a característica de Euler-Poincaré de M.

Em outras palavras,

$$\sum_{p \in S(v)} i(v,p) = \chi(M),$$

onde:
$S(v)=\{p \in M; v(p)=0\}$ é finito, $\partial(M)=\phi$, $i(v,p)$ é o índice local na singularidade p e $\chi(M)$ é a característica Euler da superfície M.

A demonstração deste teorema pode ser consultada em Milnor (1965) ou Lima (1985).

Seja v: $W \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial diferenciável sobre a superfície W. Dizemos que v é *exterior* (respectivamente interior) a *W* se $v(x)$ é exterior (respectivamente interior) a *W* para todo $x \in \partial W$.

Exemplo:

tome $v : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $v(z) = z^n$, mostra-se que $i(v,0) = n.$

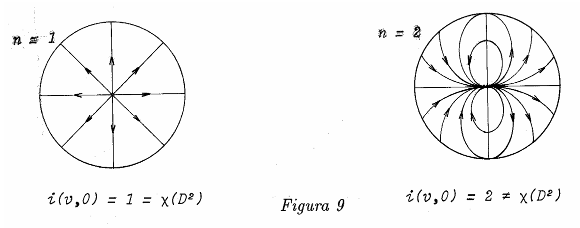

Figura 9.

Será útil entender como se constrói um campo de vetores sobre *2W*, a partir de um campo dado sobre *W*. Suponha que se tem v um campo vetorial sobre *W*, com $v(x)$ "normal" e exterior a *W* para todo $x \in \partial W$. Assim, têm-se campos $v_0 \; e \; v_1$ sobre W_0 e W_1, mas não é verdade que $v_0 \; e \; v_1$ definem um campo sobre *2W*

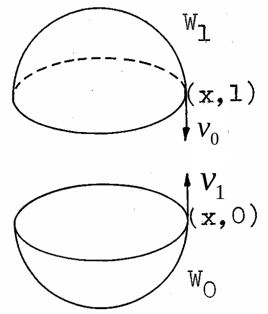

Figura 10.

Definindo $v(x) = \begin{cases} v_0(x) \; para \; x \in W_0 \\ v_1(x) \; para \; x \in W_1 \end{cases}$, obtém-se um campo vetorial sobre *2W*.

As Figuras 10 e 11 ilustram a necessidade de inversão dos vetores ao longo do bordo,

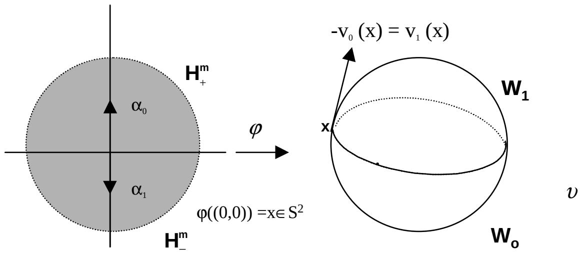

Figura 11.

pois considerando $\varphi : D^m \to \vartheta_1 \cup \vartheta_2$ uma parametrização local em torno de $x \in \partial W$, dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x); x \in D_+^m \\ \varphi_2(x); x \in D_-^m \end{cases}$$

onde $\varphi_1 : D_+^m \to \vartheta_1 \; e \; \varphi_2 : D_-^m \to \vartheta_0$ são parametrizações, com $\vartheta_0 \; e \; \vartheta_1$ abertos em W_0 e W_1 respectivamente, então $v_1(x) = \varphi_1'(0)(\alpha_1)$ onde α_1 é exterior a $\mathbb{H}_+^m$, e $v_0(x) = \varphi_0'(0)(\alpha_0)$ com α_0, exterior a $\mathbb{H}_-^m$. Como as parametrizações numa superfície com bordo preservam as posições interiores e exteriores dos vetores, respectivamente W_0 e W_1, teremos uma ambigüidade.

Teorema (Poincaré-Hopf para superfície com bordo). Seja *W* uma superfície com bordo, de dimensão *m* e $v: W \to \mathbb{R}^n$, um campo vetorial diferenciável com

$S(v) = \{p \in M; v(p) = 0\}$ *é finito*, $\partial(M) \neq \phi$, $S(v) \cap \partial W = \phi$ *e v é exterior a W*, então

$$\sum_{p \in S(v)} i(v,p) = \chi(W).$$

Uma maneira de mostrar esse teorema é construir, a partir de v, um campo *w* sobre o dobro *2W,* onde já sabe que

$$\sum_{p \in S(v)} i(v,p) = \chi(2W),$$

pois, ***2W*** é uma superfície sem bordo, lembrando que, se v não é exterior ao longo do bordo, o resultado é falso. Por exemplo, tome $W = D^2$ e v o campo constante; com isto $S(v) = \phi$ e $\sum_{p \in S(v)} i(v,p) = 0$, sendo que $\chi(\boldsymbol{D^2}) = 1.$ Mais geralmente é fácil mostrar que toda superfície com bordo admite um campo vetorial sem singularidade.

Sejam $W \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície diferenciável, com bordo e compacta. Para cada $x \in \partial W$, $T_x \partial W$ é um subespaço vetorial de $T_x W$. O *complemento ortogonal* de $T_x \partial W$ em $T_x W$ é definido por:

$$T_x \partial W^{\perp} = \{v \in T_x W \,/ < v, \alpha >= 0, \alpha \in T_x \partial W\},$$

onde <.,.> denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Proposição. Seja v um campo vetorial diferenciável exterior a *W*, com $S(v)$ finito. A partir de v, pode-se obter um campo vetorial *w* sobre *W*, de modo que:

$$\sum_{p\in S(v)} i(v,p) = \sum_{p\in S(w)} i(w,p)$$

e $w(x)\in T_x\partial W^{\perp}$ *para todo* $x\in\partial W$.

Demonstração. Para $x\in\partial W$, tem-se $T_xW = T_x\partial W \oplus T_x\partial W^{\perp}$, logo pode-se definir um campo vetorial $\tilde{v}$ sobre ∂W, dado por: $\tilde{v}(x)=\pi_x(v(x))$, onde $\pi_x : T_xW \to T_xW$ é a projeção ortogonal, segundo o subespaço $T_x\partial W^{\perp}$. Agora tome uma extensão qualquer de $\tilde{v}$ sobre *W*, de modo que se anule fora de uma vizinhança "colar" de ∂W, $V(\partial W)$. Essa extensão é também chamada de $\tilde{v}$ (para vizinhança "colar" do bordo, veja Lima (1985, p.51).

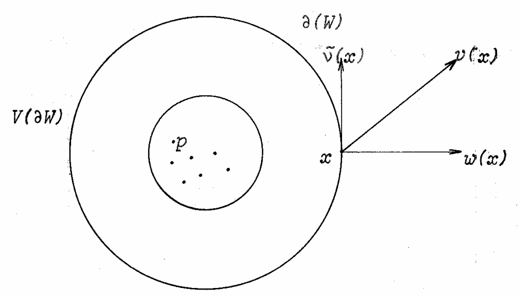

Figura 12.

Tomando $w(x)=v(x)-\tilde{v}(x)$, tem-se o campo desejado. Para isto, deve-se tomar a vizinhança $V(\partial W)$, de modo que $S(v)\cap V(\partial W)=\phi$, e que $v(x)\neq w(x)$ para todo $x\in V(\partial W)$. Isto é possível, pois $v(x)\neq 0$ para $x\in V(\partial W)$, e $v,\tilde{v}$ são contínuos.

Agora, sem perda de generalidade, pode-se admitir v normal ao longo do bordo, isto é, $v(x)\in T_x\partial W^{\perp}$ *para todo* $x\in\partial W$, e v constante em cada "segmento" $\{x\}\times[-1,1]$, através de um difeomorfismo $f: V(\partial W)\to\partial W\times[-1,1]$ da vizinhança "colar" fechada. Para simplificar a notação, assume-se:

$$i(v)=\sum_{p\in S(v)} i(v,p).$$

Se $v: W\to \mathbb{R}^m$ é um campo vetorial, a derivada de v, $dv_p : T_pW\to T_pW$ para $p\in S(v)$. Se dv_p é não-singular, p chama-se um zero não-degenerado do campo v.

Fatos

1. se $p\in S(v)$ é não degenerado, então $i(v,p)=\pm 1$, de acordo com $\det(dv_v)$ ser positivo ou negativo;
2. se M é uma superfície, e v é um campo vetorial diferenciável sobre M, então existe sobre M um campo vetorial diferenciável w não-degenerado, isto é, para todo $p\in S(w)$, dw_p é não singular, e $i(v)=i(w)$.

Esses fatos têm demonstrações técnicas, que podem ser vistas em Garcia (1978) e Milnor (1965).

Demonstração do teorema. Suponha que v seja "constante", no sentido já dito, numa vizanhança tubular fechada ∂W em W.

Tomando $W_0 = W\times\{0\}$ e $W_1 = W\times\{1\}$ duas cópias de *W*, obtém-se v_0 sobre W_0, e v_1 sobre W_1, a partir de v. Veja Figura 10.

Como se pode "colar" W_0 com W_1, de modo a obter um campo vetorial w bem definido sobre $2W = W_0\cup W_1$?

A Figura 10 sugere que se defina:

$$w(x)=\begin{cases} v_1(x)\ \text{para x} \in \mathrm{W}_1 \\ -v_0(x)\ \text{para x} \in \mathrm{W}_0\end{cases}$$

Mas existe uma complicação, pois $i(v)=i(v_0)=(-1)^m i(-v_0)$ (Veja em Garcia (1978)).

- Se m é par, essa complicação está contornada, uma vez que $i(v)=i(-v_0)$ e, portanto,

$$i(w)=i(v_1)+i(-v_0)=i(v_1)+i(v_0)=2i(v).$$

Logo, pelo teorema de Poincaré-Hopf para superfície sem bordo, temos: $2i(v)=\chi(2W)=2\chi(W)$, o que implica $i(v)=\chi(W)$.

- Se m é ímpar, nada se conclui da construção anterior. Para contornar essa dificuldade, w será definido sobre $2W$ de modo diferente. Essa nova definição funcionará tanto para o caso em que *m* seja par como para o caso em que seja ímpar.

Sejam $V(\partial W)\cong\partial W\times[-1,1]$ uma vizinhança tubular, e $v=\partial/\partial t$, o campo constante sobre os segmentos $\{x\}\times[-1,1]$ para cada $x\in\partial W$.

Considere $w = v$ sobre a cópia W_0, e $w = z$, "o florescer do campo ∂/∂t" sobre a cópia W_1, construído da seguinte maneira.

Lembrando que z sobre ∂W_1 deve ser $-v$, para que, na "colagem", w fique bem definido sobre $2W$.

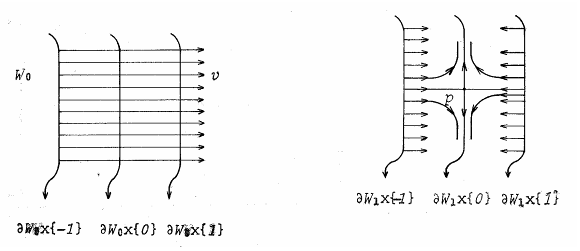

Figura 13.

Tome um campo vetorial X qualquer sobre $\partial W_1 \times \{0\}$, com $S(x)$ finito e X não-degenerado. Considere $\widetilde{X}$ uma extensão de X sobre W_1, de modo que $\widetilde{X}$ se anule fora de $V(\partial W_1)$ e em $\partial W_1 \times \{-1\}$.

Seja $\phi = W \rightarrow I\!R$ uma função diferenciável tal que:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \partial W_1 \times \{-1\} \cup (W_1 - V(\partial W)) \\ 0 \text{ somente para } p \in \partial W_1 \times \{0\} \\ -1 \text{ se } p \in \partial W_1 \times \{1\} \text{ e } d\phi_p \neq 0 \text{ para } p \in \partial W_1 \times \{0\}, \end{cases}$$

com $d\phi_p < 0$, segue que:

$$i(z,p) = -i(X,p) \text{ e } i(z) \Rightarrow -i(X).$$

Agora tomando:

$$w(x) = \begin{cases} v_0(x) \ para \ x \in W_0 \\ z(x) \ para \ x \in W_1 \end{cases}$$

conclui-se que

$$i(w) = i(v) + i(z) = i(v_0) + i(v_1) - i(X) = 2i(v) - i(X).$$

Como $i(w) = \chi(2W)$ e $i(X) = \chi(\partial W)$, segue que

$$i(v) = \frac{\chi(2W) + \chi(W)}{2} = \chi(W).$$

Notas complementares

1. Usou aqui a definição $\chi(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \alpha_i$, para a característica de Euler de uma superfície de dimensão n, onde α_i é o número de simplexos de dimensão i de uma dada triangularização de M. Assim, não é difícil concluir a última igualdade da demonstração acima.
2. Se M tem dimensão par, então ∂M tem dimensão ímpar e, portanto, $\chi(\partial M) = 0$, onde se conclui que,
$$\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(2M).$$
3. Se W tem dimensão ímpar, então $\chi(2W) = 0$ e $2\chi(W) = \chi(\partial W)$. Ou seja, toda superfície de dimensão *par* que é o bordo de alguma superfície tem característica de Euler par. Por exemplo,
$$S^2 = \partial D^3 \text{ e } \chi(S^2) = 2.$$
4. Se $\chi(\partial W) = 0$, a mesma construção feita para campo exterior poderia ser feita para interior. Caso $\chi(\partial W) \neq 0$, essa construção é impossível. Tome, por exemplo, $v : D^3 \rightarrow I\!R^3$ dado por $v(x) = -x$, que é interior a D^3, e note que $i(v,o) = -1$, única singularidade de v, e $\chi(D^3) = 1$.

Referências bibliográficas

Arraut, J.L.; Randall, D. *Index of tangent fields on compact manifolds.* Contemporary Math - 12, 1982.

Garcia, N.M. *Campos vetoriais sobre uma variedade: o teorema de Poincaré-Hopf.* Rio de Janeiro, 1978. (Master's Thesis in Mathematics) - Pontifícia Universidade Católica.

Garcia, N.M. *Índice de k-campos finitamente singulares sobre π-variedades.* Rio de Janeiro, 1984. (Doctoral Thesis in Mathematics) - Pontifícia Universidade Católica.

Guillemin, V.; Pollak, A. *Differential topology.* New Jersey: Prentice-Hall, 1974.

Lima, E.L. *A característica de Euler-Poincaré.* Rio de Janeiro: Matemática Universitária 1, 1985. p. 47-62 (SBM).

Lima, E.L. *Curso de análise.* Rio de Janeiro: IMPA, 1981. v.2 (Projeto Euclides - SBM), 1981.

Munkres, J.R. *Elementary differential topology.* Princeton: Princeton University Press, 1963.

Milnor, J.W. *Topology from the differentiable viewpoint.* Princeton: The University Press of Virgínia, 1965.

Received on September 13, 1999.

Accepted on November 11, 1999.