

Linearização do modelo log-normal para distribuição de tamanho de partículas

Laércio Montovani Frare*, Marcelino Luiz Gimenes, Nehemias Curvelo Pereira e Elisabete Scolin Mendes

Departamento de Engenharia Química, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 5790, 87020-900, Maringá-Paraná, Brazil. *Author for correspondence. email:marcelino@deq.uem.br

RESUMO. As análises granulométricas de sólidos podem ser satisfatoriamente representadas pelos seguintes modelos de distribuição a 2 parâmetros: Gates-Gaudin-Schumann (GGS), Rosin-Rammler-Bennet (RRB) e Log-Normal (LN). Os modelos GGS e RRB podem ser linearizados, obtendo-se um coeficiente de correlação que permite avaliar a qualidade do ajuste. Entretanto, para o modelo LN, o ajuste linear é feito através de um gráfico do diâmetro de partícula em escala logarítmica versus fração cumulativa em escala de probabilidades, não sendo possível comparar seu ajuste com os dois anteriores, sob uma mesma base. Sendo assim, partiu-se neste trabalho de um conjunto de equações desenvolvidas por LAWLESS (1978), que possibilita a obtenção de um coeficiente de correlação linear para o modelo LN. Desta forma, os modelos GGS, RRB e LN podem agora ser avaliados por meio da comparação dos coeficientes envolvidos na regressão linear, tornando o trabalho de ajuste mais ágil e preciso.

Palavras-chave: tamanho de partículas, modelos de distribuição, análise granulométrica.

ABSTRACT. Log-normal model linearization for particle size distribution.

Granulometric analyses of solids are satisfactorily represented by the following two parameters models: Gates-Gaudin-Schumann (GGS), Rosin-Rammler-Bennet (RRB) and Log-Normal (LN). GGS and RRB models may be linearized to get a correlation coefficient to qualify them. Nevertheless, for LN model the linear fit is done by a particle diameter graph in logarithm scale versus the cumulative mass fraction in a probability scale. It's not possible to compare the three models on the same basis. Equations developed by Lawless (1978) were developed to obtain a linear correlation coefficient for LN model. Thus, GGS, RRB and LN models may be available by simple comparison of the linear regression coefficients. Adjustment turns up to the faster and more precise.

Key words: particle size, distribution models, granulometric analyses.

Em escala industrial grande quantidade de partículas e pó, que não são uniformes, principalmente quanto ao tamanho, são manuseados nos mais diferentes e diversos processos. Nesses processos é de grande importância o conhecimento do comportamento deste material particulado, sendo frequentemente necessário definir o sistema particulado como um todo. Assim, em lugar de um único tamanho de partícula, tem-se a necessidade de se conhecer a distribuição de tamanho de partículas, através da qual é possível definir diâmetros “médios” que possam representar o comportamento de todos os tamanhos do material particulado em questão.

Várias são as distribuições de tamanhos de partículas que podem ser utilizadas para a

caracterização de um material particulado, podendo estas ser do tipo de distribuição por números, superfície e massa ou volume. Para a obtenção das distribuições de tamanho de partícula existe uma grande variedade de métodos e equipamentos que podem ser utilizados (Allen, 1981). Svarovsky (1990) apresenta as faixas de aplicações quanto aos tamanhos das partículas, tipo de diâmetros definidos e tipos de distribuição obtidos (número, massa ou volume) para uma grande variedade desses métodos/equipamentos. Os resultados das distribuições de tamanhos de partículas podem ser obtidos na forma diferencial ou na forma cumulativa. A forma cumulativa é muita vezes preferida pela facilidade de interpretar resultados

quanto à continuidade de dados e ajuste de modelos matemáticos que descrevem a distribuição de tamanhos de partículas.

O uso de modelos é desejável para a obtenção de parâmetros estatísticos que sejam representativos do material particulado. Tais parâmetros podem ser utilizados não só na predição do comportamento hidrodinâmico, como também no cálculo da eficiência global de remoção de partículas em equipamentos de coleta. A eficiência global de coleta de partículas em ciclones e em equipamentos que tenham mecanismos de coleta de partículas similares é descrita pela Equação (1).

$$\eta_{\text{Total}} = \int_0^1 \eta_{\text{ind}}(D) d\phi_{\text{alim.}} \quad (1)$$

em que, η_{Total} é a eficiência global ou total e η_{ind} é a eficiência para um específico tamanho de partícula (D) e $d\phi$ a distribuição de tamanho de partículas na corrente de alimentação. O conhecimento ou ajuste da função ($d\phi$) que descreve a distribuição de tamanho de partículas permite que a eficiência global de coleta seja obtida com os parâmetros da distribuição ajustada. Para o caso de ciclones Massarani (1986) apresenta gráficos que permitem calcular a eficiência global conhecendo-se o modelo de distribuição de tamanho de partículas na alimentação (distribuição log-normal ou RRB - Rosin-Rammler Bennet).

No ajuste de modelos de distribuição de partículas preferem-se modelos com menor número de parâmetros. Assim os modelos a 2 parâmetros têm sido usados para descrever a distribuição de tamanho de partículas. Dentre estes modelos, o modelo log-normal apresenta, em vista de suas propriedades matemáticas, uma preferência para ajuste de distribuição de tamanho de partículas, seja na sua forma originária seja na modificada (Irani e Callis, 1963). Um exemplo da utilização do modelo de distribuição log-normal se encontra no trabalho de Kerr (1989), que apresenta uma maneira de prever a *performance* do equipamento de controle de material particulado. Neste trabalho, a distribuição de tamanho de partículas, que não segue exatamente o modelo log-normal, por ser um modelo bimodal, é ajustada através da separação em duas distribuições log-normal.

Embora a distribuição log-normal seja a distribuição mais utilizada na prática, a obtenção de seus dois parâmetros é quase sempre feita através do traçado de uma reta em gráfico de escala logarítmica versus probabilidade. Tal prática pode ser substituída, por meio de ajustes mais seguros e rápidos com utilização computacional. Este trabalho

apresenta uma metodologia para obtenção dos parâmetros de ajuste de distribuição log-normal a dois parâmetros. Esta metodologia permite obter coeficiente de ajuste linear para o modelo log-normal, o qual pode ser comparado com o de outros modelos linearizáveis (RRB, GGS) a dois parâmetros.

Metodologia

Modelos de distribuição a dois parâmetros. A Tabela 1 apresenta as equações dos modelos a dois parâmetros de maior aplicação na distribuição de tamanhos de partículas.

Tabela 1. Modelos de distribuição

Modelo	Parâmetros	Equações	
Gates-Gaudin-Schumann (GGS)	K, m	$X = \left(\frac{D}{k}\right)^m$	(2)
Rosin-Rammler-Bennet (RRB)	D', n	$X = 1 - e^{-(D/D')^n}$	(3)
Log-normal	D ₅₀ , σ	$X = (1 + \text{erf}(z))/2$ $Z = \ln(D/D_{50})/(\sqrt{2} \cdot \ln \sigma)$ $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz$	(4)

A linearização dos modelos GGS e RRB, que pode ser obtida diretamente (Massarani, 1986), está apresentada na forma das Equações (5) e (6) respectivamente.

$$\ln X = -m \cdot \ln K + m \cdot \ln D \quad (5)$$

$$\ln \left(\ln \left(\frac{1}{1-X} \right) \right) = -n \cdot \ln D' + n \cdot \ln D \quad (6)$$

Os parâmetros dos modelos K, m, n e D' podem ser obtidos através de regressão linear, da qual se pode conhecer o coeficiente de correlação (R²) como um indicativo do ajuste dos dados ao modelo. Enquanto o ajuste destes dois modelos pode ser facilmente verificado pela inspeção do coeficiente de correlação, utilizando-se uma calculadora programável ou uma planilha de cálculo, para o modelo log-normal necessita-se usar um gráfico como o da Figura 1, para a obtenção dos parâmetros σ e D₅₀. Embora tal gráfico possa ser prontamente obtido, o critério de ajuste da reta ainda é visual, não possuindo uma mesma base de comparação (como por exemplo o coeficiente de correlação) que a dos outros modelos. Assim seria interessante encontrar uma forma de verificar se os dados obedecem ao

modelo log-normal, analisando o coeficiente de correlação.

Os resultados apresentados neste trabalho mostram que é possível linearizar o modelo log-normal, o que permite de forma estatística comparar o ajuste deste modelo, através do coeficiente de correlação, com os modelos a dois parâmetros GGS e RRB.

Linearização do modelo log-normal. Lawless (1978) e Gimenes (1992) apresentam as Equações (7) e (8), que possibilitam obter uma aproximação linearizada do modelo de distribuição log-normal. Trata-se na realidade de uma aproximação polinomial da função inversa de probabilidade integral, com um erro absoluto menor que $4,5 \cdot 10^{-5}$ (Abramowitz, 1964).

$$t = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{X^2}\right)}$$

$$z = -t + \frac{a + b \cdot t + c \cdot t^2}{1 + d \cdot t + e \cdot t^2 + f \cdot t^3} \quad (7)$$

para $0 \leq X \leq 0,5$

$$t = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{(1-X)^2}\right)}$$

$$z = t - \frac{a + b \cdot t + c \cdot t^2}{1 + d \cdot t + e \cdot t^2 + f \cdot t^3} \quad (8)$$

para $0,5 < X \leq 1$

Os valores das constantes a, b, c, d, e e f são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2. Valores das constantes das Equações (7) e (8)

a	b	c	d	e	f
2,51557	0,802853	0,010328	1,432788	0,189269	0,001308

A partir de um conjunto de dados de X e D, a obtenção dos parâmetros σ (desvio-padrão geométrico) e D_{50} (diâmetro médio geométrico) do modelo log-normal é feita através da regressão linear de $\ln D$ versus a função Z, calculada de acordo com as Equações (7) e (8):

$$\ln[D] = \alpha Z + \beta \quad (9)$$

Assim, podem-se obter os parâmetros da distribuição log-normal de acordo com:

$$D_{50} = \exp[\beta] \quad e \quad \sigma = \exp[\alpha] \quad (10)$$

Resultados e discussão

A Tabela 3 apresenta dados de distribuição de tamanho de partículas (Massarani, 1986 e Nevers, 1995), os quais foram ajustados ao modelo de distribuição log-normal.

Tabela 3. Dados de distribuição de tamanhos partículas

Dados de Massarani (1986)		Dados de Nevers (1995)	
D# (μm)	X (%)	D (μm)	X (%)
2380	97,4	158,3	95,0
1680	92,1	130	93,0
1190	83,7	100	90,1
841	68,7	90	88,4
595	51,5	80	86,7
420	32,6	70	83,9
297	21,5	60	81,0
210	11,2	50	76,6
149	3,8	40	71,8
105	1,6	30	62,8
74	0,6	20	50,0
-	-	10	30,1

A Figura 1 ilustra, para os dados da Tabela 3, o gráfico de D em escala logarítmica versus X em escala de probabilidade. A partir do gráfico da Figura 1, podem-se encontrar os parâmetros do modelo log-normal tal como se exemplifica a seguir para os dados de Massarani (1986):

$$D_{50} \cong 0,55 \text{ mm e } \sigma = \frac{D_{50}}{D_{15,87}} \cong 2,2 \quad \text{ou}$$

$$\sigma = \frac{D_{84,13}}{D_{50}} \cong 2,18 \quad , \text{ ou seja } \sigma \cong 2,19$$

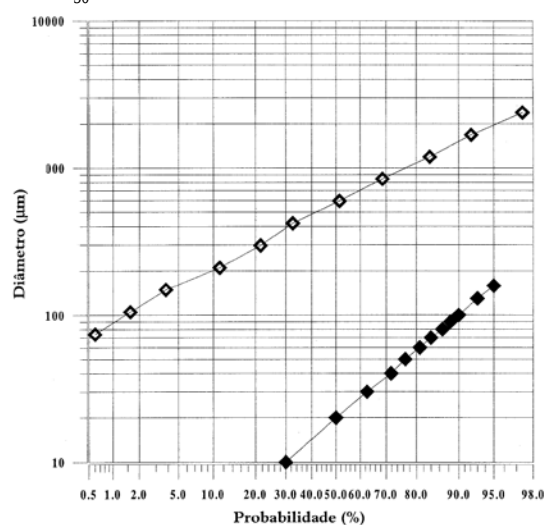


Figura 1. Dados Experimentais que seguem a distribuição log-normal (♦ De Nevers, 1995; ◇ Massarani, 1986)

A Figura 2 ilustra a linearização do modelo log-normal para os dados da Tabela 3, obtida através das equações (7) a (10). A Tabela 4 apresenta valores de desvio padrão σ e diâmetro médio geométrico D_{50} para os dados da Tabela 3, obtidos através do gráfico da Figura 1 e utilizando-se a linearização do modelo log-normal. Os resultados da Tabela 4 demonstram não existir diferença entre parâmetros obtidos graficamente e aqueles obtidos através da regressão linear do modelo log-normal.

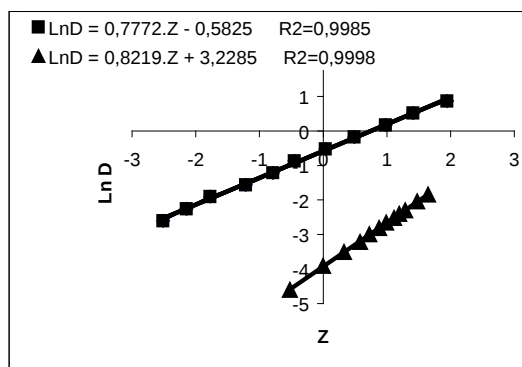


Figura 2. Ajuste dos dados da Tabela 3 ao modelo log-normal (▲ Nevers, 1995; ■ Massarani, 1986)

Tabela 4. Comparação entre os valores de σ e D_{50}

Parâmetros	Dados de Massarani (1986)		Dados de Nevers (1995)	
	Método gráfico	Método de regressão linear R ² =0,9985	Método gráfico	Método de regressão linear R ² =0,9998
σ	2,19	2,175	3,49	3,57
D_{50} (μm)	55,00	55,85	20,00	19,67

Os mesmos dados da Tabela 3 foram testados para os modelos de distribuição GGS e RRB, cujos ajustes são ilustrados na Figura 3. Verifica-se, através das Figuras 2 e 3, que para os dados da Tabela 3 o melhor ajuste, baseado no coeficiente de correlação R², é o do modelo log-normal.

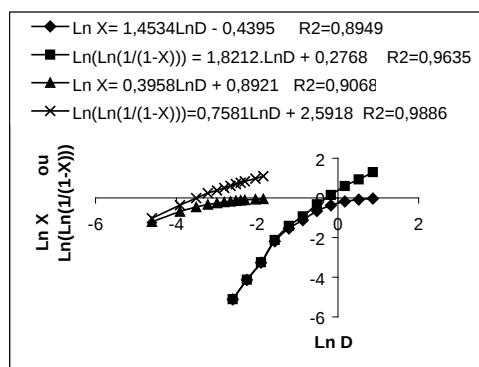


Figura 3. Ajuste dos dados da Tabela 3 aos modelos RRB e GGS (▲ e × Nevers, 1995; ■ e ◆ Massarani, 1986)

A linearização do modelo log-normal foi obtida através do uso de uma função polinomial log-normalizada que se aproxima, com erros menores que $4,5 \cdot 10^{-5}$, da função inversa de probabilidade integral. Os resultados mostraram que esta linearização pode ser usada para obter os parâmetros do modelo log-normal com precisão, quando os dados experimentais se ajustam ao modelo.

Os resultados apresentados mostram que é possível analisar o ajuste de modelos a dois parâmetros (GGS, RRB e log-normal), para a distribuição de tamanhos de partículas, através do coeficiente de correlação obtido da linearização destes modelos.

Nomenclatura

D	= Diâmetro de partícula [L]
X	= Fração cumulativa com diâmetro menor que D [-]
K	= Parâmetro do modelo GGS [L]
m	= Parâmetro do modelo GGS [-]
n,	= Parâmetro do modelo RRB [-]
D'	= Parâmetro do modelo RRB [L]
D_{50}	= Diâmetro médio geométrico [L]
a,b,c,d,e,f	= Constantes da função polinomial [-]
t	= Função de transformação logarítmica [-]
Z	= Função polinomial aproximada à função inversa de probabilidade integral [-]
η	= Eficiência de coleta de partículas [-]
ϕ	= Função distribuição de tamanho de partículas [-]
α	= Coeficiente angular [-]
β	= Coeficiente linear [-]
σ	= Desvio Padrão [-]

Referências bibliográficas

- Abramnovitz, M; Stegen, J. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: U.S. Department Commerce, 1969.
- Allen, T. *Particle Size Measurement*. Powder Technology. 4.ed. London: Chapman and Hall, 1990.
- Gimenes, M. L. *Particulate Gaseous Emission Control Using Turbulent Beds of Mobile Packings*. England, 1992. (Doctoral Thesis in Chemical Engineering) - University of Leeds. England.
- Irani, R.R.; Callis, F. C. *Particle Size: Measurement, Interpretation and Application*. Londres: John Wiley, 1963.
- Kerr, C. P. Predicting the Performance of Particulate Control Equipment. *JAPCA*, 38(12):1585-1587, 1989.
- Lawless, P.A. *Analysis of Cascade Impactor Data for Calculating Particle Penetration*. Environmental Protection Agency. NTIS, EPA 600/7-78-189, 1978.

Massarani, G. Tópicos especiais de sistemas particulados. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 1986. v.2.

Nevers, N. *Air pollution control engineering*. New York: McGraw-Hill, 1995.

Svarosvky, L. *Particle Size Measurement and Sampling - Course Manual*. England: University of Bradford, 1990.

Received on November 13, 2000.

Accepted on November 20, 2000.