

# Consideração da não-linearidade física para as vigas de concreto armado, pelo procedimento refinado da NB1

Carlos Humberto Martins

Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 5790, 87020-900, Maringá, Paraná, Brasil. E-mail: chmartins@uem.br

**RESUMO.** Este trabalho apresenta um estudo sobre análise de vigas de concreto armado em que a não-linearidade física para o material é implementada pelo procedimento refinado da NBR-6118. Este modelo considera a não-linearidade física do concreto armado via diagramas de momento x curvatura de uma seção transversal. O modelo de diagrama momento x curvatura apresentado pelos Comentários Técnicos da NBR-6118 - CT-301 do Ibracon (ABNT, 2003) utiliza a deformação média na armadura tracionada, onde se leva em conta a resistência do concreto tracionado entre fissuras (*tension stiffening*). Portanto, foi implementado, em linguagem de programação *Fortran Power Station*, o procedimento dado pela norma para a contribuição do concreto tracionado entre fissuras. Para comprovar a validade do procedimento implementado, são realizados exemplos numéricos.

**Palavras-chave:** não-linearidade física, concreto armado, rigidez de elementos estruturais.

**ABSTRACT. Consideration of physical non-linearity of reinforced concrete beams, using the NB1 refined procedure.** This work presents a study on the analysis of reinforced concrete beams in which the physical non-linearity of the material is implemented through the refined procedure in the Technical Comments of Brazilian code NBR-6118 - CT 301 / Ibracon. This model considers the physical non-linearity of the reinforced concrete through momentum-curvature diagrams of a cross-section. The momentum-curvature diagram presented in the CT-301 (ABNT, 2003) uses medium deformation in the reinforcement, in which the tension stiffening of the reinforced concrete is taken into account. Using programming language *Fortran Power Station*, the expression given by the code for the contribution of the tension stiffening of the reinforced concrete was implemented. Finally, some results are presented to check the validity of the employed calculation process.

**Key words:** physical non-linearity, reinforced concrete, structural element stiffness.

## Introdução

A análise de deslocamentos em estruturas de concreto armado tem como principal objetivo reproduzir matematicamente o comportamento deste material.

Os modelos elástico-lineares são, certamente, os de mais fácil compreensão e de maior utilização pelo meio técnico, pois dentre outros fatores admitem a superposição de efeitos, evidentemente onde a linearidade geométrica pode ser assumida. Entretanto, há de se questionar a validade de tais hipóteses para o concreto armado, cujo comportamento é bastante complexo devido ao trabalho em conjunto dos materiais que o constituem – concreto e armadura passiva – e, também, ao caráter não-linear de cada um dos seus materiais constituintes.

O concreto armado apresenta um comportamento que se desvia das hipóteses elástico-

lineares, mesmo quando submetido a níveis baixos de tensão. Sua resistência à tração é esgotada para níveis de tensão cerca de dez vezes menores que aqueles que causariam a ruptura na compressão. Quando submetido à flexão simples, a região tracionada sofre processo de danificação, dando início à formação de fissuras, exigindo armadura passiva para que se obtenha configuração de equilíbrio.

Para uma viga de concreto armado submetida à flexão simples, ocorrem fissuras espaçadas entre si. O alongamento máximo do aço tracionado se dá na localização da fissura, diminuindo à medida que se caminha para o ponto médio entre fissuras sucessivas. Esse fato exemplifica a contribuição do concreto íntegro entre fissuras, conhecido no meio técnico por “*tension stiffening*”.

O comportamento que foi brevemente descrito é marcadamente não-linear. Uma maneira apropriada

e simples para representar esse comportamento é por meio das relações momento x curvatura.

Dessa forma, uma melhor modelagem de vigas de concreto armado deve ser baseada em critérios que considerem a danificação do concreto armado. A formulação deste problema não-linear conduz a sistemas matemáticos extremamente complexos que não podem ser resolvidos analiticamente, mas numericamente. Tais soluções numéricas somente são viáveis na prática quando rotinas computacionais são devidamente implementadas em computadores.

A partir da década de 1960, surgiram os primeiros programas para análise estrutural, via computador, empregando-se técnicas matriciais e discretizações pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). O forte impulso que a informática vem apresentando permite evolução nos processos de cálculo e os modelos baseados em análises simples vêm sendo substituídos por outros quando a não-linearidade física é acoplada, visando representar de maneira mais realista o comportamento dos materiais que constituem essas estruturas.

À medida que os estudos sobre modelos mais apropriados para a modelagem do concreto armado avançam, e também que o uso de computadores se torna cada vez mais frequente, é extremamente interessante que se passe a agregar estes progressos ao cálculo de estruturas de concreto armado.

Sendo assim, a modelagem do comportamento em serviço do concreto armado, pelo método dos elementos finitos com a incorporação da não-linearidade física, pode ser feita de duas maneiras distintas, a saber:

1. modelagem das relações entre tensões e deformações dos materiais constituintes: concreto e aço;
2. modelagem via diagramas momento x curvatura de uma seção transversal.

Os modelos do tipo 1 têm campo de aplicação mais amplo do que os do tipo 2 – podem ser empregados em qualquer tipo de elemento finito. Os modelos do tipo 2 têm a virtude de considerar facilmente, por meio de um modelo adequado, a contribuição do concreto intacto entre fissuras. Ambos devem ter seus parâmetros aferidos experimentalmente. Diversos autores trabalharam com os modelos do tipo 2, entre eles destacam-se os modelos propostos por Debernardi (1983) e Ghali e Favre (1986).

Para uma seção não-fissurada de concreto armado, são admitidas todas hipóteses do estágio 1, em que o cálculo das propriedades geométricas e da curvatura correspondem à seção íntegra (aço + concreto). Da mesma maneira, procede-se para

seções totalmente fissuradas – estágio 2.

Segundo Sanches Jr. (1998), os resultados obtidos em estruturas de concreto armado, empregando-se as relações momento x curvatura, são bastante satisfatórios e não se encontra na literatura justificativa fundamentada que mostre serem os modelos do tipo 1 melhores do que os do tipo 2.

No presente trabalho, é empregado o modelo dado pelos Comentários Técnicos da NBR-6118 - CT-301 do Ibracon (ABNT, 2003) para a consideração da não-linearidade física das vigas de concreto armado.

#### **Indicações para redução da inércia das seções, segundo NBR-6118**

De acordo com a NBR-6118 (ABNT, 2003), é permitido considerar a não-linearidade física de maneira aproximada, tomando-se como rigidez das vigas os valores seguintes:

$$\begin{aligned} (EI)_{\text{sec}} &= 0,4 E_c I_c \text{ para } A'_s \neq A_s \\ &\text{e} \\ (EI)_{\text{sec}} &= 0,5 E_c I_c \text{ para } A'_s = A_s \end{aligned} \quad (1)$$

sendo  $E_c$  o módulo de elasticidade inicial do concreto e  $I_c$  o momento de inércia da seção bruta do concreto, incluindo, quando for o caso, mesas colaboradoras.

O Comitê Técnico CT-301 (ABNT, 2003) da NBR-6118 (ABNT, 2003) descreve um procedimento refinado para se considerar de maneira mais completa a não-linearidade física para o material das vigas de concreto armado.

Segundo o CT-301 (ABNT, 2003), os elementos lineares podem ser analisados por métodos numéricos que admitem:

- a) um diagrama momento x curvatura de cálculo;
- b) na média, que as seções planas permaneçam planas.

A curvatura de flexão pode ser determinada, de maneira aproximada, por:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_m = (\epsilon_{sm} - \epsilon_c) / d \quad (2)$$

em que:

$(1/r)_m$  é a curvatura média na seção analisada;

$\epsilon_{sm}$  é a deformação na armadura tracionada, levando-se em conta a resistência do concreto tracionado entre fissuras (*tension-stiffening*);

$\epsilon_c$  é a deformação na fibra mais comprimida, calculada desprezando-se a resistência do concreto

tracionado entre fissuras;

$d$  é a distância entre a fibra mais comprimida e a armadura tracionada.

A contribuição do concreto tracionado entre fissuras pode ser estimada pela expressão a seguir:

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_{smr} + \frac{\sigma_s}{E_s} \left[ 1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \quad (3)$$

em que:

$\epsilon_{sm}$  é a deformação na armadura tracionada, levando-se em conta a resistência do concreto tracionado entre fissuras (*tension-stiffening*);

$\epsilon_{smr}$  é a deformação na armadura tracionada, calculada para a seção não-fissurada, e correspondente à carga que provoca o início da fissuração;

$\sigma_s$  tensão normal na armadura de tração, calculada para a seção fissurada, sob a carga atuante;

$\sigma_{sr}$  tensão normal na armadura de tração, calculada para a seção fissurada, correspondente à carga que provoca o início da fissuração;

$\beta_1$  é coeficiente de conformação superficial do aço ( $\beta_1 = 1$  para barras com moedas e  $\beta_1 = 0,5$  para barras lisas);

$\beta_2$  é um coeficiente que leva em conta a duração e a natureza do carregamento ( $\beta_2 = 1$  para carregamentos de curta duração e  $\beta_2 = 0,5$  para carregamentos de longa duração ou com repetição freqüente).

**Material e métodos**

Foram analisadas, por meio de um programa computacional desenvolvido em *Fortran Power Station*, duas vigas de concreto armado, uma biapoiada e outra biengastada.

Adotaram-se as seguintes dimensões para as vigas:  $b = 15$  cm,  $h = 60$  cm, cobrimento de 5 cm para as armaduras e vão de 6 m. Essas dimensões foram adotadas para as vigas de modo a atingirem o estado limite último no domínio 3. O esquema geral das vigas analisadas, bem como a discretização utilizada são apresentados nas Figuras 1 e 2.

As vigas apresentadas nas Figuras 1 e 2 foram discretizadas em dez elementos de barras, pois se observou durante as análises que uma discretização em um número maior de elementos finitos não se fez necessária, visto que o aumento no número de elementos finitos não alterava a convergência do processo iterativo.

O elemento finito adotado na discretização das vigas foi um elemento finito de barra com duas rotações e um deslocamento vertical em cada nó. Maiores detalhes sobre o elemento finito adotado

para a discretização da viga podem ser obtidos em Martins e Urashima (2004).

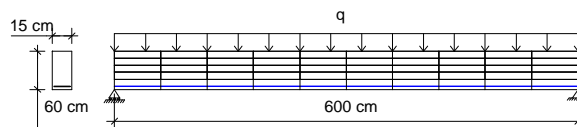


Figura 1. Modelo para vigas biapoiadas.

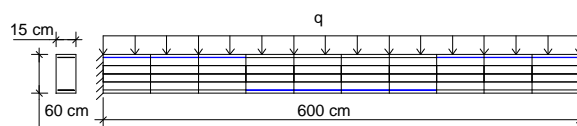
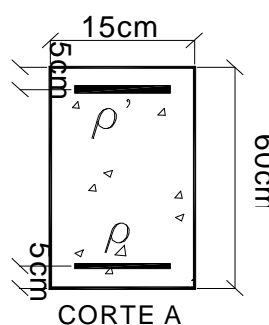


Figura 2. Modelo para vigas biengastadas.



onde:

$$\rho' = A's/Ac$$

$$\rho = As/Ac$$

Figura 3. Modelo de distribuição das armaduras.

As vigas foram divididas em dez elementos finitos iguais e possuem as seguintes características:

- concreto armado com  $f_{ck} = 25$  MPa;
- módulo de elasticidade longitudinal do aço de 210 GPa;
- coeficiente de Poisson de 0,20;
- $E_c = 5600\sqrt{f_{ck}}$ , segundo a NBR-6118 (ABNT, 2003), em que  $f_{ck}$  é dado em MPa;
- barras de aço rugosas permitindo, assim, a perfeita aderência entre o aço e o concreto;
- tolerância exigida no processo iterativo: 0,01%;
- número máximo de iterações: 200.

Para cada tipo de vinculação da viga, foram executados sete casos diferentes de carregamentos distribuídos e de taxas de armadura, apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Taxas de armadura e carregamento para a viga.

$\rho$ (%)	0,6	0,6	0,9	0,6	0,6	0,6	0,6
$\rho'$ (%)	0	0,3	0,6	0	0,3	0,6	0,9
$q$ (kN/m)	20	20	20	25	25	25	25
Caso	1	2	3	4	5	6	7

As Tabelas 2 e 3 apresentam a redução do produto de rigidez da viga para os sete casos, quando se considera a não-linearidade física para o material da viga.

**Tabela 2.** Redução do produto de rigidez (EI) para a viga biapoiada.

Caso	Produto de rigidez considerando a análise linear ( $E_L$ ) – kN.cm <sup>2</sup>	Produto de Rigidez considerando a não-linearidade física ( $E_{NL}$ )	Relação ( $E_{NL}$ )/( $E_L$ )
1	7,408 x10 <sup>8</sup>	3,199 x10 <sup>8</sup>	0,43
2	7,765 x10 <sup>8</sup>	3,752 x10 <sup>8</sup>	0,48
3	8,438 x10 <sup>8</sup>	4,524 x10 <sup>8</sup>	0,54
4	7,408 x10 <sup>8</sup>	3,007 x10 <sup>8</sup>	0,41
5	7,765 x10 <sup>8</sup>	3,519 x10 <sup>8</sup>	0,45
6	8,108 x10 <sup>8</sup>	3,728 x10 <sup>8</sup>	0,46
7	8,438 x10 <sup>8</sup>	4,276 x10 <sup>8</sup>	0,51

**Tabela 3.** Redução da rigidez (EI) para a viga biengastada.

Caso	Produto de rigidez considerando a análise linear ( $E_L$ ) – kN.cm <sup>2</sup>	Produto de Rigidez considerando a não-linearidade física ( $E_{NL}$ )	Relação ( $E_{NL}$ )/( $E_L$ )
1	7,408 x10 <sup>8</sup>	4,271 x10 <sup>8</sup>	0,58
2	7,765 x10 <sup>8</sup>	4,726 x10 <sup>8</sup>	0,61
3	8,438 x10 <sup>8</sup>	5,242 x10 <sup>8</sup>	0,62
4	7,408 x10 <sup>8</sup>	4,194 x10 <sup>8</sup>	0,57
5	7,765 x10 <sup>8</sup>	4,697 x10 <sup>8</sup>	0,60
6	8,108 x10 <sup>8</sup>	5,037 x10 <sup>8</sup>	0,62
7	8,438 x10 <sup>8</sup>	5,385 x10 <sup>8</sup>	0,64

## Resultados e discussão

Pode-se observar pela Tabela 2 que, para as vigas biapoiadas, para os casos analisados, há um valor médio de redução EI de 0,47.

Para as vigas biengastadas, observa-se não haver variação significativa dos valores de EI para os diferentes tipos de carregamentos e taxas de armadura. Os valores de EI se encontram entre 0,57  $E_c I_c$  e 0,64  $E_c I_c$ , resultando em um valor médio de 0,61  $E_c I_c$ .

No entanto, as condições de vinculação consideradas nos exemplos anteriores são condições extremas: extremidades apoiadas ou com engastes fixos. Na realidade, a vinculação das vigas de edifícios de concreto armado deve ser uma situação intermediária entre os dois casos considerados. Portanto, deve-se esperar que o valor de  $EI_{ef}$ , adaptado às condições de vinculação reais de uma estrutura, deva ser um valor médio entre esses dois valores obtidos. Isso leva a um valor de EI de aproximadamente 0,54  $E_c I_c$ . Observa-se, ainda, pelos valores acima que as vigas com armadura posicionada nas faces inferior e superior apresentam uma redução de inércia menor que as vigas com armadura simples (casos 1 e 4). Este comportamento era esperado, uma vez que a armadura restringe a fissuração, que é uma das principais causas da redução de inércia nas peças de concreto armado.

## Conclusão

Para as vigas analisadas, percebe-se variação de

valores de EI de 0,41  $E_c I_c$  a 0,64  $E_c I_c$ , sendo que os valores mais baixos de EI correspondem a vigas com armaduras em uma única face e os maiores valores, às vigas com armadura nas duas faces. Portanto, parece razoável o estabelecimento de valores diferenciados para esses dois casos, como o faz a NBR-6118 (ABNT, 2003). Porém, faz-se necessária análise de diversos outros exemplos numéricos para confirmar tal afirmação, já que os valores de EI são extremamente influenciados por diversos fatores que só podem ser corretamente avaliados mediante um grande número de análises.

Entretanto, os exemplos analisados, neste trabalho, mostram que as indicações para a redução no produto de inércia das vigas dada na NBR-6118 (ABNT, 2003), para a consideração da não-linearidade física de maneira aproximada, estão muito próximas dos resultados aqui obtidos pelo procedimento refinado do CT-301 (ABNT, 2003).

Finalmente, sugere-se para futuros trabalhos o estudo da não-linearidade física de pórticos avaliando a perda de rigidez da viga e dos pilares, considerando o engaste elástico entre eles.

## Referências

- ABNT-Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Comentários técnicos CT-301: NBR6118 - projetos de estruturas de concreto - procedimento*. São Paulo: Ibracon, 2003. Prática recomendada Ibracon.
- ABNT-Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 6118: projeto de estruturas de concreto*. Rio de Janeiro, 2003.
- DEBERNARDI, P.G. La deformazione differita in C. A. Sogette a fessurazione: considerazioni sui metodi approssimati di calcolo. *L'Industria Italiana del Cemento*, Roma, v. 7/8, p. 499-510, 1983.
- GHALI, A.; FAVRE, R. *Concrete structures: stress and deformations*. London: Chapman and Hall, 1986.
- MARTINS, C.H.; URASHIMA, D.C. Cálculo de deslocamentos em edifícios altos considerando a não-linearidade física para as vigas e a rigidez transversal à flexão das lajes. *In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL*, 31., 2004, Mendoza. *Anais...* Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo Facultad de Ingenieria, 2004.
- SANCHES JR., F. *Cálculo de deslocamentos em pavimentos de edifícios considerando-se modelos próprios para o concreto armado*. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas)–Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.

Received on April 25, 2007.

Accepted on March 17, 2008.