

Solução analítica do modelo de um extrator industrial de óleo de soja

Robson Luciano de Almeida¹, Aparecido Nivaldo Módenes¹ e Mauro Antonio da Silva Sa Ravagnani^{2*}

¹Núcleo de Biotecnologia e Desenvolvimento de Processos Químicos, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. ²Departamento de Engenharia Química, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo 5790, 87020-900, Maringá, Paraná, Brasil. *Autor para correspondência. E-mail: ravag@deq.uem.br

RESUMO. Neste trabalho, é apresentada a solução analítica de um modelo matemático para a extração de óleo de soja, em extratores de esteira horizontais. As equações diferenciais parciais do modelo escolhido descrevem a transferência de massa em leito fixo e podem ser aplicadas na modelagem da extração de cada estágio desse tipo de extratores. A solução analítica geral obtida, com o auxílio de ferramentas computacionais, não satisfaz todas as condições de contorno e inicial, propostas no modelo. A simplificação do sistema analisado e a utilização de algumas condições de contorno tornaram possível a obtenção de uma solução específica para o modelo estudado. A obtenção da solução analítica permite uma análise potencial, simples e rápida das variáveis envolvidas no processo, sejam operacionais ou de projeto, facilitando a compreensão do comportamento do extrator.

Palavras-chave: extração sólido-líquido, óleo de soja, solução analítica, extrator de esteira.

ABSTRACT. **Analytical solution of an industrial soybean oil extractor mathematical model.** This paper presents an analytical solution for a model of the soybean oil extraction using horizontal belt extractors. The partial differential equations of the chosen model describe the mass transfer in the bed, as well as each stage of the extraction process in the belt extractors. The general analytical solution was obtained using a symbolic mathematic package. Results showed that this solution does not satisfy all boundary and initial conditions of the model. A simplification of the analyzed system and the use of some boundary conditions with practical meaning were the basis for obtaining a particular solution of the extraction process in belt extractors. The analytical solutions provide some clear advantages in the comprehension of the behavior of the extractor.

Key words: solid-liquid extraction, soybean oil, analytical solution, belt extractor.

Introdução

No processo de extração de óleo de soja, as condições de trabalho do extrator são determinantes para o equilíbrio da planta. Isto porque a quantidade de solvente, que circula em todo o processo, depende diretamente dos parâmetros de operação do extrator. Isto quer dizer que, em um caso em que seja necessária grande quantidade de solvente em circulação pelo equipamento, toda a planta deverá estar preparada para o processamento desta quantidade. Se isso não ocorrer, as perdas de solvente para a atmosfera, estação de tratamento de água ou mesmo por arraste com os produtos, serão muito grandes e podem inviabilizar economicamente o processo de fabricação. Justificativas para estudos que foquem a obtenção de soluções analíticas para extratores de óleo de soja com esteiras, podem ser encontradas tomando-se os seguintes aspectos:

1. a totalidade dos processos de extração de óleo de soja com solvente, no Brasil, seja o processo de pequeno ou de grande porte, utiliza extratores contínuos de esteira ou caçambas, do tipo De Smet, Crown, Lurgi e Krupp;

2. os modelos matemáticos existentes para a extração são complexos e, normalmente, não possuem solução analítica. Isto torna obrigatório o uso de programas computacionais de solução numérica;

3. a existência de um modelo de extração que, além de representar adequadamente o processo, possua uma solução analítica dispensa a necessidade de programas computacionais ou de trabalhosos cálculos numéricos a cada simulação realizada. Isto facilita o trabalho dos engenheiros de processo e permite a análise potencial, simples e rápida das variáveis envolvidas no processo, sejam operacionais ou mesmo de projeto.

Material e métodos

Em trabalho recente, Veloso *et al.* (2005) apresentaram um modelo para extratores de óleo de soja do tipo De Smet. Um dos primeiros modelos que abordou forma totalmente matemática a extração sólido-líquido em extratores de esteira foi o proposto em Spaninks e Bruin (1979b). Esse modelo é aplicado, no cálculo de transferência de massa, em leito móvel, em estado estacionário e baseia-se na analogia entre fluxos de contato cruzado e coluna de processo estacionária. As equações diferenciais parciais, que descrevem a transferência de massa, em leito fixo, foram desenvolvidas em Spaninks e Bruin (1979a) e são usadas para descrever a extração em cada estágio do extrator. Considerou-se, como condições simplificadoras para a geração desse modelo, a extração em estado estacionário, o líquido em fluxo empistonado e sem a formação de caminhos preferenciais pelo leito móvel de partículas sólidas, a temperatura do leito e as propriedades físicas e químicas do líquido e do sólido constantes, e relação linear entre as concentrações de equilíbrio. O sistema de equações diferenciais parciais obtido é mostrado abaixo:

$$\frac{v_b Sh}{L} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\phi_E}{H} \frac{\partial c}{\partial x} = k_c a B(mw - c) \quad (1)$$

$$\frac{v_b S}{L} (1 - h) \frac{\partial w}{\partial y} = -k_c a B(mw - c) \quad (2)$$

com as condições de contorno:

$$\text{em } y = 0, \quad w = w_0(x) \text{ e } c = c_0(x) \quad (3)$$

$$\text{em } x = 0, \quad c = c_{ent}(t) \quad (4)$$

Esse sistema deve ser resolvido, numérica ou analiticamente, para que os perfis de concentrações na fase sólida e fase líquida sejam obtidos.

Resultados e discussão

Utilizando ferramentas computacionais, oferecidas pelo *software* Maple® da Waterloo Maple Inc., a seguinte solução geral para este conjunto de EDP's é obtida:

$$w(y, x) = c_1 \exp\left(\frac{c_2(q + c_2 + qRm)}{u(q + c_2)} x\right) \exp\left(-\frac{c_2 q Rm}{q + c_2} y\right) \quad (5)$$

$$c(y, x) = \frac{mq}{q + c_2} c_1 \exp\left(\frac{c_2(q + c_2 + qRm)}{u(q + c_2)} x\right) \exp\left(-\frac{c_2 q Rm}{q + c_2} y\right) \quad (6)$$

Sendo c_1 e c_2 constantes de integração e

$$u = \frac{\phi_E L}{v_b V h} \quad (7)$$

$$q = \frac{k_c a}{v_b h} \quad (8)$$

$$R = \frac{h}{1 - h} \quad (9)$$

A descrição detalhada do método matemático, utilizado pelo programa para a solução deste e de outros tipos de sistemas de equações diferenciais parciais pode ser encontrada em Cheb-Terrab e Bulow (1995).

O modelo não possui solução analítica, utilizando as condições adotadas em Spaninks e Bruin (1979a). Esse é um caso semelhante ao apresentado em Klinkenberg (1954), no qual a solução analítica, para um sistema importante, com forma parecida ao formado pelas equações 1 a 4, foi procurada por vários pesquisadores, e as soluções mostraram-se insatisfatórias e sujeitas a avaliações numéricas. As soluções apresentadas para o sistema foram, em termos de integral da função de Bessel, soluções pelo método de equações em diferenças finitas, expansão em séries e aproximação assintótica por função erro. Todos esses métodos de solução têm como resultado uma série que deve ser truncada, e, portanto, geraram soluções aproximadas.

As Equações 5 e 6 são soluções para os perfis de concentração, na fase sólida e fase líquida, para um único estágio de um extrator de esteira. Para extratores de esteira, sem recirculação de solvente, como apresentado na Figura 1, todo o leito pode ser tomado como um único estágio, desde que se considere que a concentração, na saída de cada estágio, é muito próxima da homogeneidade, a mistura nas comportas é perfeita e que não há qualquer outra entrada de solvente numa comporta, seja vindo de outra comporta adjacente ou de gotejamentos de alguma outra área do leito.

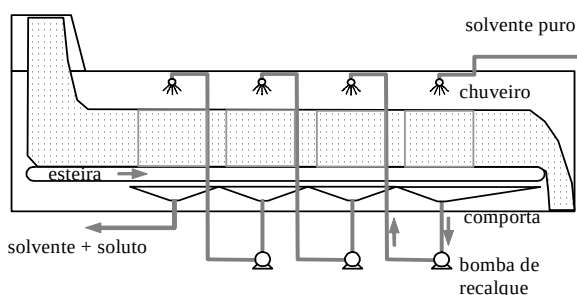


Figura 1. Extrator de esteira sem recirculação de solvente.

Na prática, essas suposições não acarretam erros consideráveis nos cálculos de engenharia. A Figura 2 ilustra o esquema de escoamento para esse tipo de extrator dentro das considerações mencionadas.

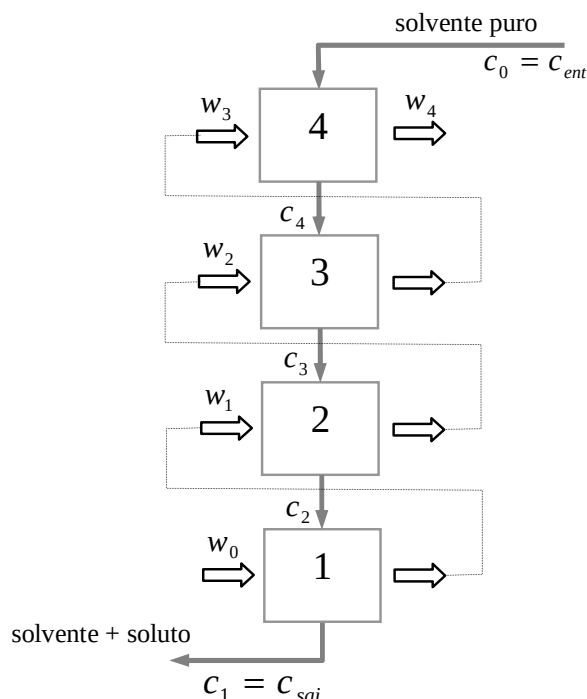


Figura 2. Esquema de fluxos de um extrator considerando todo o leito como um único estágio.

Considera-se que, na extremidade do leito, onde há a entrada de material, $x = 0$, a concentração de soluto no ponto $x = 0$ é w_0 , que é a concentração da massa fresca. Neste mesmo ponto, o solvente que sai do leito tem uma concentração conhecida c_{sai} . Esse solvente, após passar pela última comporta, sai do extrator e é bombeado para a etapa de separação da fábrica. Assim,

$$w(0,0) = w_0 \quad (10)$$

$$c(0,0) = c_{sai} \quad (11)$$

Para a obtenção dos perfis de concentração na superfície do leito, para a fase sólida e para a fase líquida (solvente), considera-se $x = 0$ nas soluções gerais (Equações 5 e 6). Pode-se, também, relacionar diretamente concentrações com o tempo de extração, t_{ext} , em vez da distância y , como é comum em casos industriais. Para extratores de percolação tem-se que:

$$y = v_b t_{ext} \quad (12)$$

Resolvendo as condições (Equações 10 e 11) com as soluções gerais (Equações 5 e 6), considerando $x = 0$, nas equações resultantes, e expressando as equações resultantes em função do tempo de extração pela Equação 12, tem-se:

$$w(y) = w_0 \exp\left(-\frac{k_c a(mw_0 - c_{sai})}{w_0(1-h)} t_{ext}\right) \quad (13)$$

$$c(y) = c_{sai} \exp\left(-\frac{k_c a(mw_0 - c_{sai})}{w_0(1-h)} t_{ext}\right) \quad (14)$$

A vantagem de utilizar o tempo de extração em vez da posição, no extrator, consiste no fato de que, para uma análise de dados ou projeto, não é necessário saber as dimensões do extrator nem a velocidade da esteira. A maioria das tabelas de extração, de publicações científicas ou de catálogos de fabricantes de extratores relaciona diretamente as concentrações do leito com o tempo de extração. Para um determinado projeto, somente após a especificação da capacidade de processamento desejada e do tempo de extração necessário para a obtenção de um determinado soluto residual na massa extraída, especificam-se as dimensões do equipamento.

Nomenclaturas, símbolos gregos e subscritos usados nas Equações 1 a 14.

Nomenclatura	
a	área superficial das lâminas por unidade de volume, $m^2 m^{-3}$
B	largura do leito, m
c	concentração mássica de soluto da fase líquida, $kg m^{-3}$
h	fração de vazio, adimensional
H	comprimento do leito, m
k	coeficiente de transferência de massa, $m s^{-1}$
L	altura do leito, m
m	coeficiente angular da curva de equilíbrio, adimensional
q	grupo dimensional, $(k_c a)/(v_b h)$, $1/m$
R	taxa de distribuição, adimensional
S	área da seção do leito móvel perpendicular ao fluxo de sólidos, m^2
t	tempo, s
u	grupo dimensional, $(\phi_E L)/(v_b h)$, m^3
v	velocidade, m/s
γ	distância da entrada de sólidos, m
w	concentração mássica de soluto na fase sólida, $kg m^{-3}$
Símbolos gregos	
ϕ	Vazão volumétrica de solvente, $m^3 s^{-1}$
Subscritos	
b	esteira
c	base líquida
E	líquido extrativo, solvente ou micela
ent	valor de entrada
ext	extração
sai	valor de saída
0	valor no tempo inicial

Conclusão

O modelo matemático, utilizado neste trabalho, não tem solução analítica para a condição inicial e as condições de contorno dadas, sendo necessário o

estabelecimento de condições arbitrárias para que soluções analíticas possam ser determinadas. A solução apresentada, neste trabalho, possui aplicação específica para o extrator abordado, dentro das condições em que as mesmas foram geradas. A solução para leito móvel pode ser aplicada para extratores de esteira horizontal, sem recirculação de solvente e, com algumas adaptações, para extratores rotatórios. O uso das soluções, na forma analítica, apresenta grandes vantagens. A aplicação direta dessas soluções dispensa a necessidade do uso de programas computacionais ou dos trabalhosos cálculos numéricos para cada simulação. Isto facilita o trabalho dos engenheiros de processo e permite uma análise potencial, simples e rápida das variáveis envolvidas no processo, sejam operacionais ou de projeto.

Referências

CHEB-TERRAB, E.S.; BULOW, K. A computational

approach for the analytical solving of partial differential equations. *Comput. Phys. Commun.*, Amsterdam, n. 90, p. 102-116, 1995.

KLINKENBERG, A. Heat transfer in cross-flow heat exchangers and packed beds – evaluation of equations for penetration of heat or solutes. *Eng., Design Process Dev.*, [S.l.], v. 46, n. 11, p. 2285-2289, 1954.

SPANINKS, J.A.; BRUIN, S. Mathematical simulation of the performance of solid liquid extractors – I: diffusion batteries. *Chem. Eng. Sci.*, New York, v. 34, p. 199-205, 1979a.

SPANINKS, J.A.; BRUIN, S. Mathematical simulation of the performance of solid liquid extractors – II: belt type extractors. *Chem. Eng. Sci.* New York, v. 34, p. 207-215, 1979b.

VELOSO, G.O. et al. Mathematical modeling of vegetable oil extraction in a counter-current crossed flow horizontal extractor. *J. Food Eng.*, Essex, v. 66, p. 477-486, 2005.

Received on April 03, 2007.

Accepted on October 28, 2007.