Arq. Apadec, *8*(1): Jan/Jun., 2004

O CAOS E A INTERDISCIPLINARIDADE

David Clístenes Furoni de Lima*, Ernani Anderson*, Fabiana Ribeiro de Almeida*, Franciana Pedrochi*, Francielle Sato*, Gisele Strieder Phlippsen*, Gustavo Max Dearo Simonetti*, Iara Frangiotti Mantovani*, Iris Antônio Maeda*, Kelly Christine da Silva*, Kleto Michel Zan*, Marcelo Freitas de Andrade*, Mônica Bordim Sanches*, Sabrina Camargo*, Tatiane Cristina de Oliveira*, Marcos César Danhoni Neves**

LIMA, D.C.F.; ANDERSON, E.; ALMEIDA, F.R.; PEDROCHI, F.; SATO, F.; PHLIPPSEN, G.S.; SIMONETTI, G.M.D.; MANTOVANI, I.F.; MAEDA, I.A.; SILVA, K.C.; ZAN, K.M.; ANDRADE, M.F.; SANCHES, M.B.; CAMARGO, S.; OLIVEIRA, T.C.; NEVES, M.C.D. O caos e a interdisciplinaridade. *Arq. Apadec*, *8*(1): 78-81, 2004.

RESUMO. O presente artigo busca dar uma visão geral sobre a teoria do caos e suas aplicações inter e transdisciplinares.

PALAVRAS-CHAVE. Caos; interdisciplinaridade; física.

Caos pode significar falta de ordem, mas na Física denota o comportamento não-linear de sistemas que evoluem temporalmente. Existe uma enorme variedade de sistemas caóticos na natureza, aliás, a linearidade é exceção e não a regra.

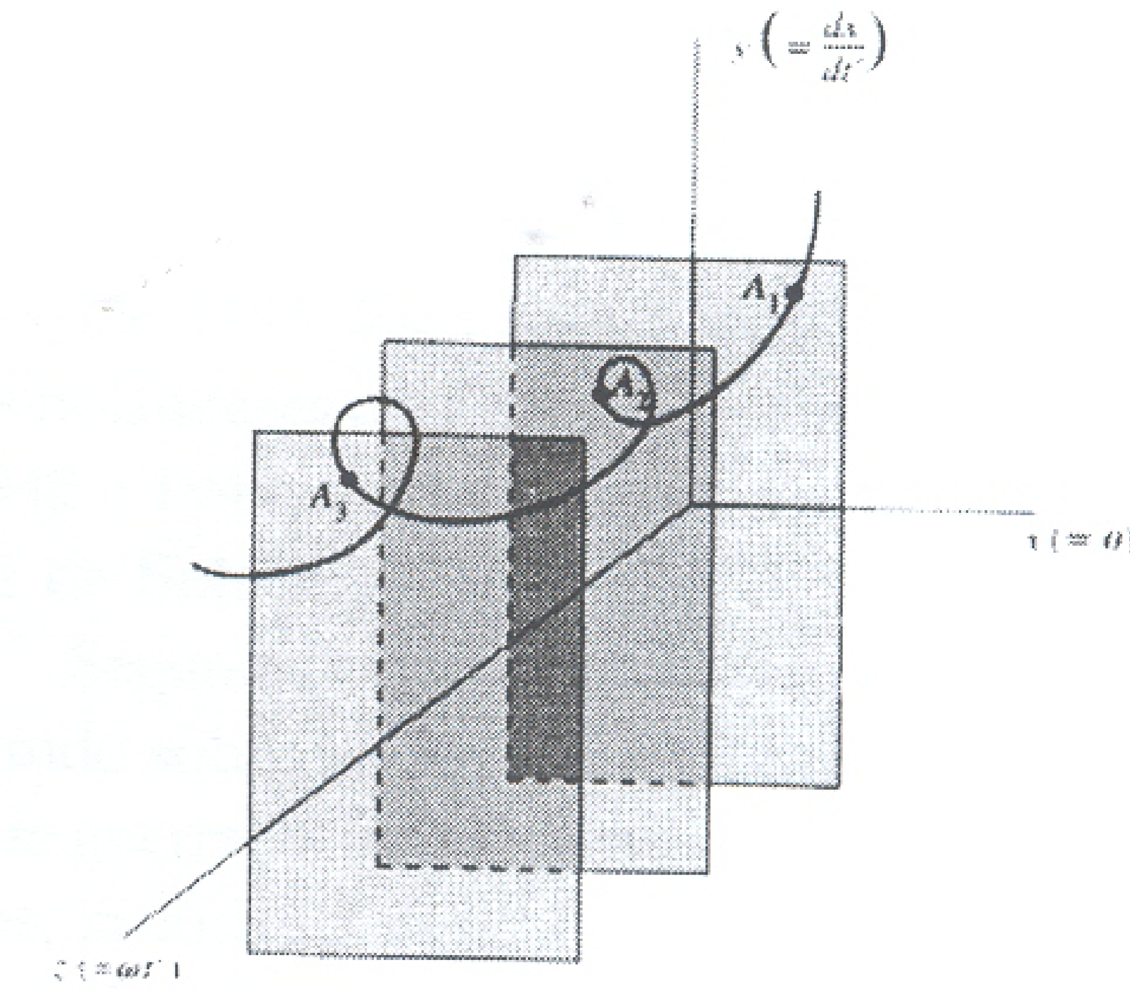
As órbitas dos planetas no sistema solar, a flutuação dos valores das ações nas bolsas de valores, a distribuição do nucleotídeos numa molécula de DNA, uma arritmia cardíaca, o funcionamento de ferramentas industriais, a transmissão de sinais de comunicação, a produção de derivados do petróleo, a fermentação de bebidas e alimentos, a formação de bolhas de ar na corrente sangüínea e a produção de medicamentos anticonvulsivos são alguns dos exemplos de caos ou de aplicação do seu estudo. Pelo jeito, a palavra de ordem do caos é a multidisciplinaridade, pois fica evidente a necessidade de cooperação entre profissionais de várias áreas, atuando num campo em que fica difícil delimitar regiões de ação.

De maneira qualitativa, podemos enunciar algumas características do comportamento caótico:

1. Imprevisibilidade
   Conhecer o estado do sistema durante um tempo arbitrariamente longo não é suficiente para podermos predizer o seu comportamento posterior. Isto está relacionado ao fato de que sistemas caóticos dependem sensivelmente das condições iniciais.
2. Comportamento aperiódico
3. Invariância de escala
   Apresentam estruturas que, ampliadas infinitas vezes, conservam a auto-similaridade.
4. Estacionaridade
   Embora sejam aperiódicos, os padrões tendem a repetição.

Secção de Poincaré

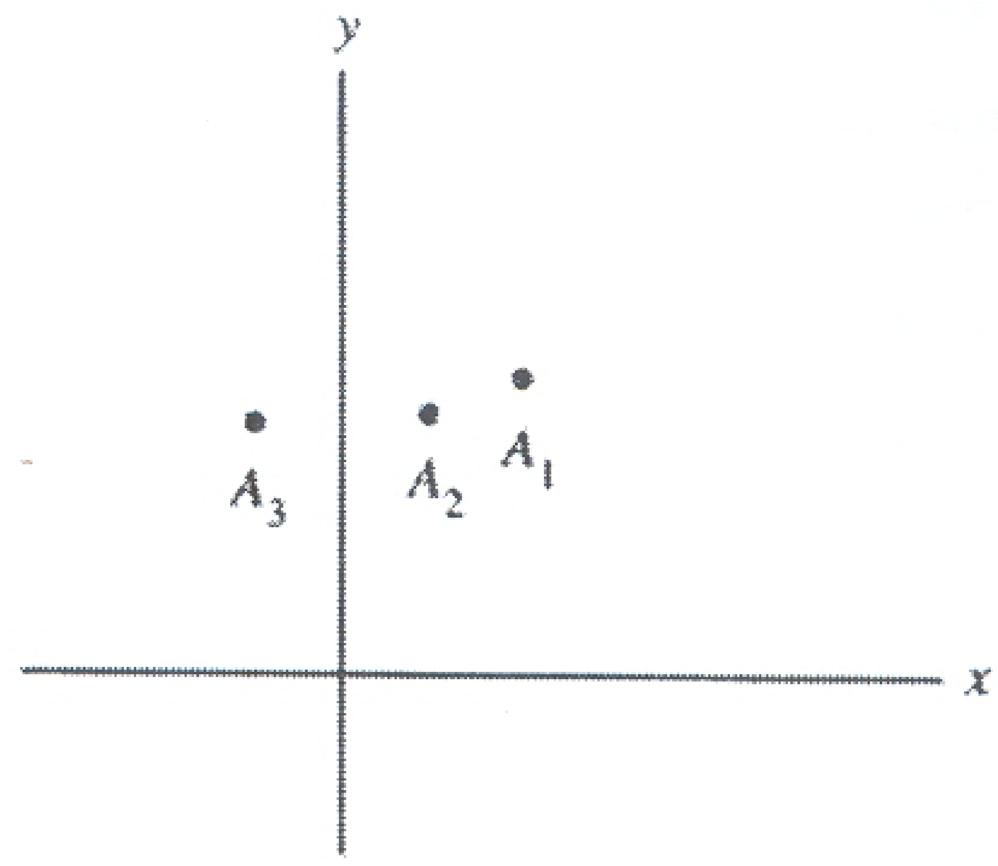
Um gráfico da secção de Poincaré é a seqüência de pontos formada pela intersecção da trajetória de fase com planos paralelos no espaço de



---

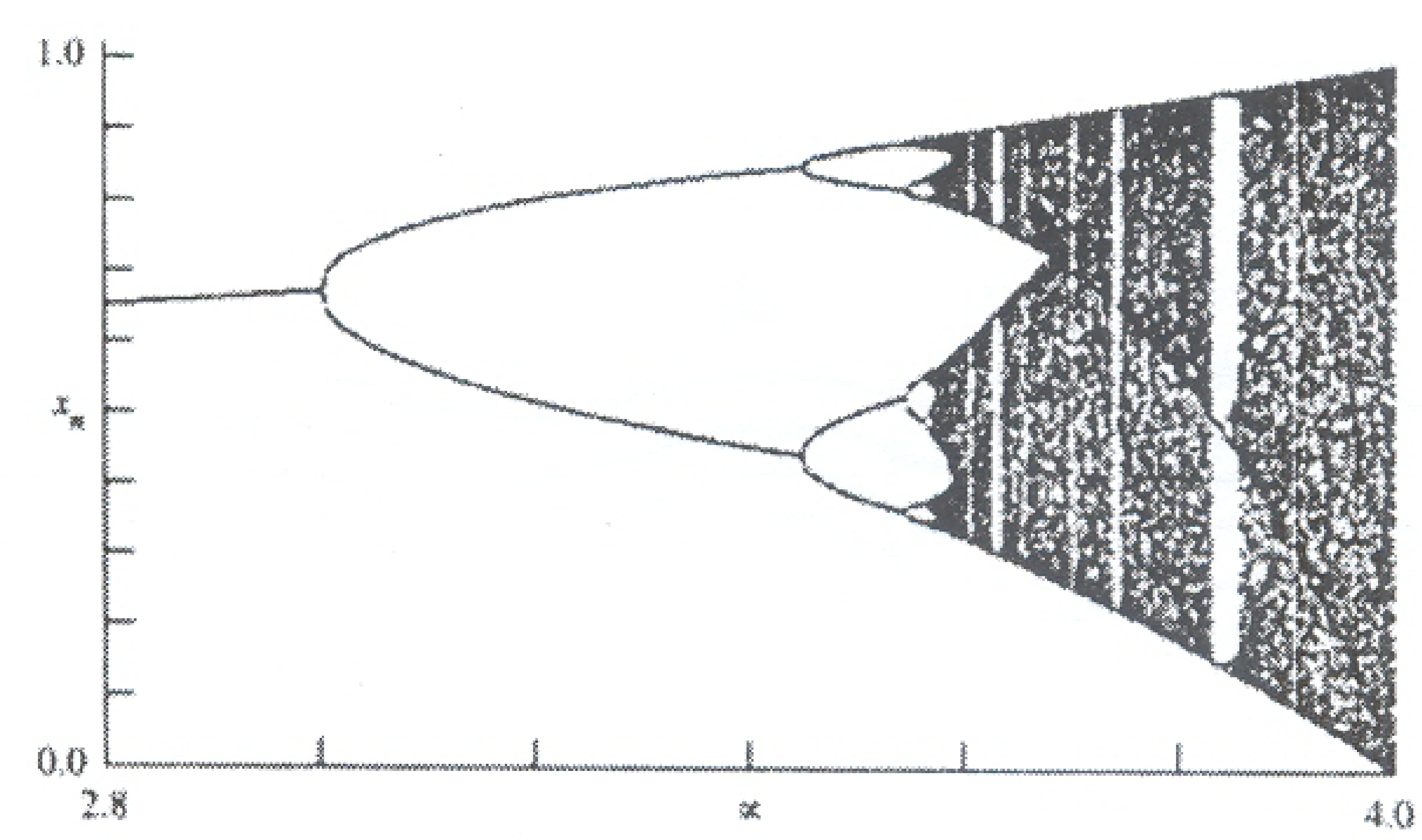
*Acadêmicos do curso de Física da Universidade Estadual de Maringá, participantes do Programa Especial de Treinamento; **Docente do Departamento de Física (orientador) da Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR.

fase, projetados em um dos planos. Poincaré concluiu que curvas simples representam movimentos com possíveis soluções analíticas, mas as muito complicadas, aparentemente irregulares, representam caos.



Mapas

Se usamos **n** para denotar a seqüência do tempo de um sistema, podemos descrever a evolução de um sistema não-linear num momento particular pela investigação de cmom o (n+1)-ésimo estado (ou iteração) depende do n-ésimo estado. Esta relação, $x_{n+1} = f(x_n)$, é chamada de mapa e é muito usada para descrever a evolução do sistema.



Atratores

Um atrator é um conjunto de pontos (ou um ponto) para o qual o movimento converge em sistemas dissipativos. As regiões traçadas no espaço de fase são limitadas quando existe um atrator. No movimento caótico, trajetórias próximas no espaço de fase estão divergindo uma da outra, mas devem estar eventualmente retornando ao atrator. Por essa razão os atratores nos movimentos caóticos são chamados de atratores estranhos ou caóticos, e em vários casos têm dimensão fractal.

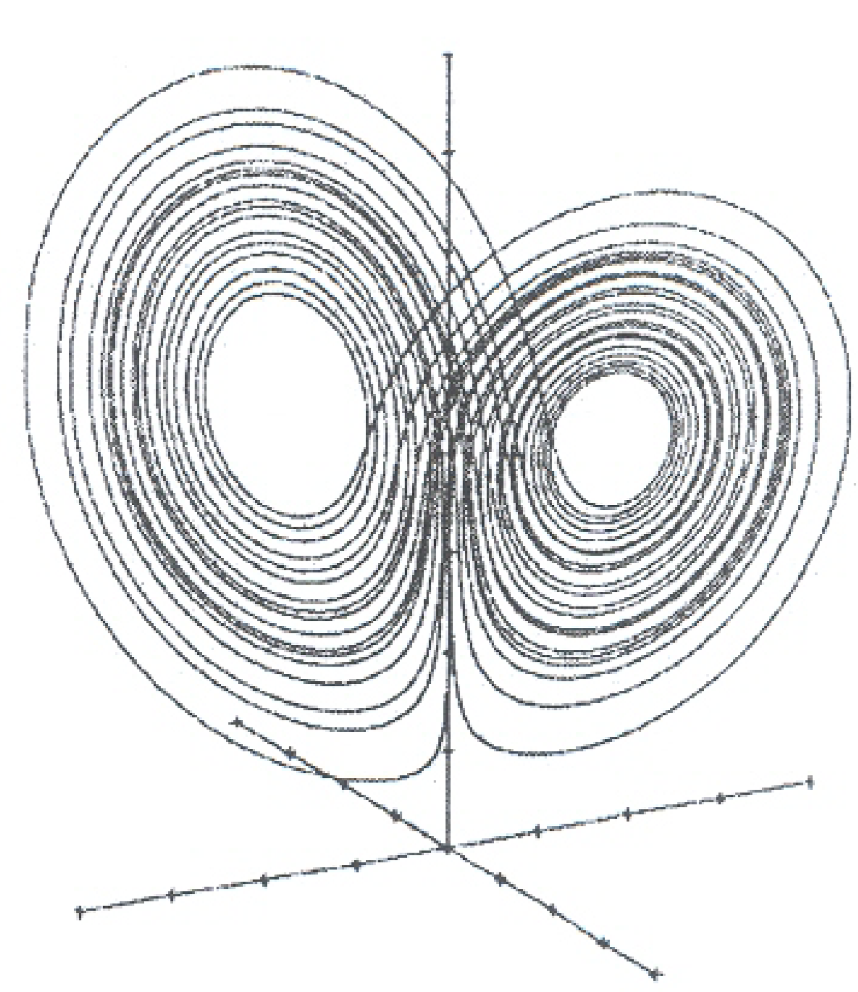
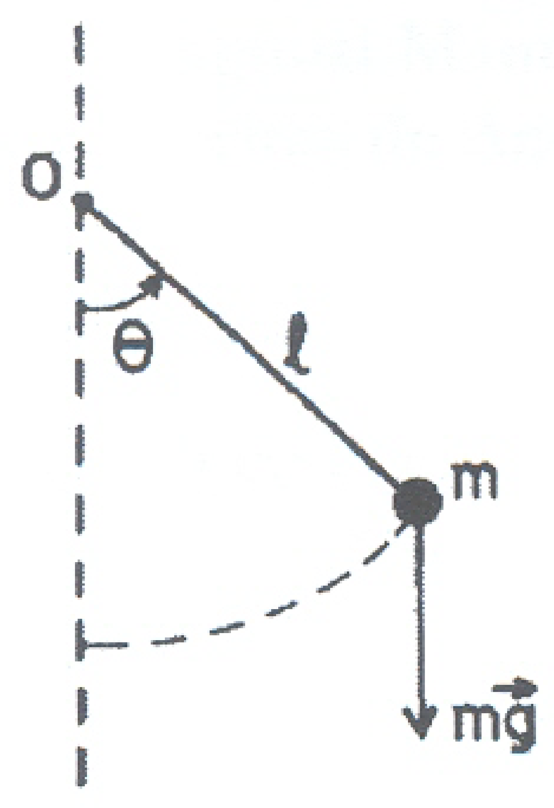


Diagrama de fase

Trabalhando com o pêndulo simples, podemos compreender o diagrama de fase e sua interpretação. Seja o sistema constituído por um corpo de massa **m** e uma haste rígida de comprimento ℓ (de massa desprezível) que pode se mover livremente num plano vertical. A equação de movimento associada é:

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell \operatorname{sen}\theta = 0.$$

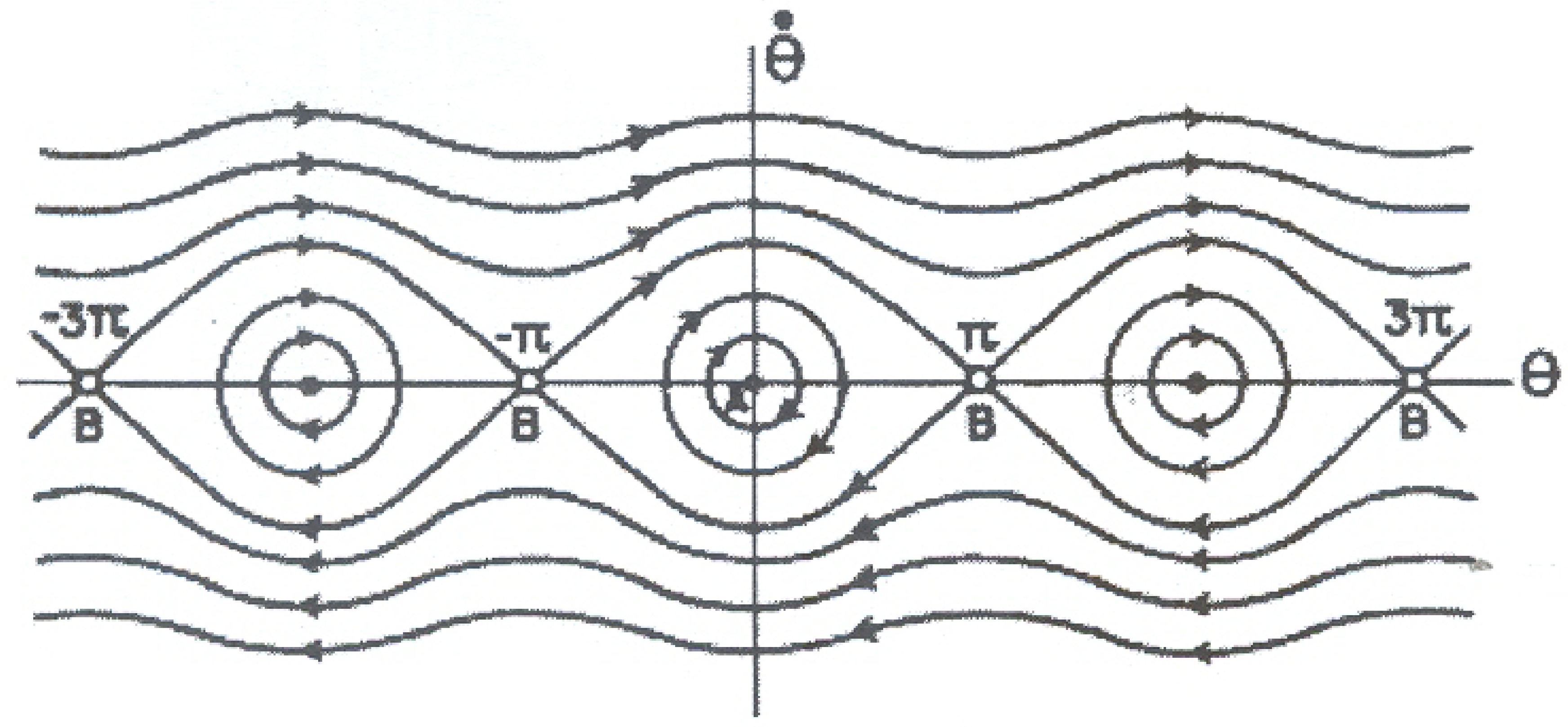
Obter uma solução em termos de funções elementares não é possível, mas num diagrama de fases é possível identificar as principais características de suas soluções e compreender de modo qualitativo os possíveis movimentos desse sistema. A equação acima pode ser escrita como $\dot{\theta} = \varphi = f(\theta, \varphi)$, portanto: $\dot{\varphi} = -g/\ell \operatorname{sen}\theta = g(\theta, \varphi)$.



Para construir as trajetórias no espaço de fases $(\theta, \dot{\theta} = \varphi)$ faz-se $\dfrac{d\theta}{d\varphi} = \dfrac{f}{g} = \dfrac{\varphi}{-g/\ell \operatorname{sen}\theta}$

E integrando-a obtém-se $\varphi^2 - a\cos\theta = c$, $a \equiv \dfrac{2g}{\ell}$ e $c = \text{constante}$

Um dado para de valores $(\theta, \dot{\theta})$ é um estado do sistema. O diagrama de fases mostra como esse estado evolui à medida que o tempo passa. As curvas da figura representam as possíveis soluções da primeira equação. O conjunto de todas as curvas é chamado diagrama de fase do sistema. A constante **c** está relacionada com a energia total do pêndulo; com efeito, cada condição inicial define uma das possíveis curvas da figura, as flechas indicam o sentido da evolução temporal.



O modelo de Lotka-Volterra

O modelo de Lotka-Volterra é um exemplo de dinâmica de populações que apresenta comportamento cíclico, e também é chamado de sistema predador-presa. Duas espécies de peixes, por exemplo, convivem em um lago: A (presa) alimenta-se de plantas que existem em abundância, B (predador) sobrevive alimentando-se da espécie A.

População A: x(t), População B: y(t)

Admite-se que A tenha vida longa e alta taxa de reprodução. Assim num tempo Δt, desconsiderando-se os predadores, o aumento da população A é resultado do balanço entre nascimentos e mortes, sendo escrito como $kx\Delta t$, $k > 0$. A diminuição da população, devido ao predador B é $-axy\Delta t$, $a > 0$. Assim, o aumento líquido de A é dado por $\Delta x = kx\Delta t - axy\Delta t$. No limite $\Delta t \to 0$, $\dot{x} = kx - axy$

Para a população B, considera-se que na falta de A a taxa de mortalidade supera a de nascimentos. A diminuição de B é expressa por $-Ly\Delta t$, $L > 0$. Porém, existe uma compensação devido à presença de presas, expressa por $bxy\Delta t$, $b > 0$. Os termos proporcionais a xy representam o encontro entre A e B. Analogamente temos $\Delta y = bxy\Delta t - Ly\Delta t$ e $\dot{y} = bxy - Ly$.

O sistema $\begin{cases} \dot{x} = kx - axy \\ \dot{y} = -Ly + bxy \end{cases}$ constitui o modelo de Lotka-Volterra para a dinâmica populacional do sistema predador-presa e cada equação é uma trajetória de fase do sistema.

Pontos fixos: (0,0) e (L/b, k/a).

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy = 0 \\ \dot{y} = -Ly + bxy = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(bx - L)}{x(k - ay)}$$

Substituindo variáveis, $\dfrac{dx}{d\xi} = \dfrac{x}{bx - L}, \dfrac{dy}{d\xi} = \dfrac{y}{k - ay}$, temos $\dfrac{k - ay}{y} dy = \dfrac{bx - L}{x} dx + C$, que tem solução ay – k lny + bx – L lnx + C = 0.

Analisando as trajetórias de fase, podemos compreender melhor a dinâmica do sistema predador-presa: parte-se do ponto em que a população A é máxima. Como há abundância de alimento para B, essa espécie começa a apresentar um crescimento populacional ao mesmo tempo em que a de A diminui. A partir de um certo ponto, quando a população de B é máxima, começa a haver falta de alimentos para essa espécie, que sofre uma redução brusca na sua população. Com uma baixa população de predadores, a espécie A recompõe-se até atingir novamente seu valor máximo e o ciclo recomeça.

O modelo de Lotka-volterra é um modelo simples e não é o único para o estudo da dinâmica de populações. Existem outros modelos, entre eles os para epidemias e interação plantas-animais herbívoros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKER, G.L.; GOLUB, J.P. *Chaotic dynamics: an introduction.* Cambridge University Press, 1990.

FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C.P.C. *Caos: uma introdução.* Edgard Blücher, 1995.

MARION, J.B; THORNTON, S.T. *Classical dynamics of particles and systems.* Saunders College Publishing, 1995.

THUAN, T.X., *O Caos e a harmonia.* Terramar, 1998.

ISSN 1414-7149
Revista indexada no *Periodica*, índice de revistas Latino Americanas em Ciências http://www.dgbiblio.unam.mx