Bol. Soc. Paran. de Mat. – **Essays** – (3s.) **v. 29** 2 (2011): 83–107.
©SPM –ISSN-2175-1188 ON LINE ISSN-00378712 IN PRESS
SPM: www.spm.uem.br/bspm doi:10.5269/bspm.v29i2.12851

Uma hierarquia de testes de convergência de séries baseada no teorema de Kummer *

Ludmila Bourchtein, Andrei Bourchtein, Gabrielle Nornberg, Cristiane Venzke

ABSTRACT: In this study we use Kummer's theorem on convergence of numerical positive series in order to construct a hierarchy of specific tests, starting from the well-known simple criteria with a less range of application, and reaching more sophisticated results with a wider abrangency. We construct various examples, which illustrate the use of such tests, and analyze situations when all the tests of the presented hierarchy are not conclusive with respect to behavior of a series.

RESUMO: Neste trabalho utilizamos o teorema de Kummer, referente à convergência de séries numéricas positivas, para construir uma hierarquia de testes específicos, partindo dos critérios conhecidos mais simples e de menor área de aplicação, e chegando até mais sofisticados e de maior abrangência. Construímos vários exemplos que ilustram a utilização destes testes e analisamos situações quando todos os testes da hierarquia apresentada não são conclusivos em relação ao comportamento de uma série.

Key Words: séries numéricas positivas, testes de convergência e divergência, teste de Kummer.

Sumário

1. Introdução

Em vários ramos da matemática, bem como nas diversas ciências, são utilizadas sequências e séries, tanto numéricas como de funções. Para calcular a soma de uma progressão geométrica, avaliar os números irracionais como π e e, ou encontrar as características de fractais matemáticos, precisamos nos envolver com o cálculo das séries numéricas. Em todos estes casos, uma das questões principais sobre o resultado procurado na forma de uma série numérica é a sua convergência ou

* O trabalho é apoiado pela agência CNPq
2000 *Mathematics Subject Classification:* 40A05, 97I30

divergência, e, caso houver a convergência, a velocidade dela. Nos problemas de aproximação, cálculo de integrais, resolução de equações diferenciais e integrais, as representações de funções via séries, muitas vezes, são técnicas indispensáveis para encontrar a solução desejável. No entanto, mesmo tratando das séries de funções, é evidente que muitas das suas características são baseadas nas propriedades das séries numéricas. Portanto, utilizando as séries numéricas ou de funções, precisamos aplicar direta ou indiretamente as propriedades de convergência das séries numéricas.

Os testes básicos da convergência de séries numéricas, tais como da razão e da raiz, são bem conhecidos e usados, mas não são aplicáveis a vários tipos de séries. Neste caso, testes mais finos devem ser empregados, vários destes com a formulação não muito mais complicada do que a dos básicos, mas com certeza menos conhecidos e acessíveis na literatura. Além disso, tendo em vista a inexistência de um teste universal aplicável a todos os tipos de séries [4, 6], torna-se importante estabelecer e expor em forma sistemática a hierarquia de testes de refinamento sucessivo, de tal modo que o próximo teste da família é aplicável a um conjunto de séries mais amplo do que o seu predecessor.

Especificamente, neste trabalho nos concentramos na sistematização da abordagem de Kummer [2, 4, 7], incluindo a formulação geral do seu resultado e as consequências dadas em ordem crescente de complexidade, isto é, dos testes mais simples e de menor área de aplicação, até mais sofisticados e de maior abrangência. Em particular, apresentamos dois novos testes, os quais ajudam a revelar a lógica por trás da construção da hierarquia apresentada baseada na abordagem de Kummer. Para ilustrar o material teórico, construímos vários exemplos de séries cuja convergência não pode ser revelada pelos testes mais simples, mas pode ser estabelecida aplicando os mais finos. Além disso, analisamos a situação em que nenhum dos testes da hierarquia apresentada é capaz de reconhecer a convergência ou divergência de certa série. Em tais casos devem ser usados testes de outros tipos.

2. Revisão de alguns resultados básicos

Nesta seção apresentamos uma breve lista dos resultados, que se encontram em livros clássicos de análise e cálculo [6, 8, 10], os quais utilizaremos no desenvolvimento da teoria de Kummer nas próximas seções.

Definição. *Uma série $\sum a_n$ é chamada convergente, se existe o limite finito das somas parciais desta série. Caso contrário a série é dita divergente.*

Observação. Para simplificar notações, irá se entender por $\sum a_n$, a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$, $p \in N$.

Condição necessária de convergência. *Se uma série $\sum a_n$ é convergente, então o termo geral a_n tende a zero quando n tende a infinito.*

Observação. Equivalentemente, se a_n não tende a zero quando n tende a infinito, então $\sum a_n$ diverge (por isso, o resultado é chamado, também, de teste da divergência).

Critério de convergência para sequências monótonas. *Uma sequência monótona converge se, e somente se, ela é limitada.*

Neste estudo, serão consideradas apenas séries de termos positivos, isto é, séries da forma $\sum a_n$ com $a_n > 0$, $n = p$, $p + 1$, ... Vamos chamá-las, também, de séries positivas. Os três resultados a seguir são válidos para tais séries.

Teorema de comparação. *Sejam as séries de termos positivos $\sum a_n$ e $\sum b_n$, onde $0 < a_n \leq b_n$, $n = p$, $p+1$, ... Se a série $\sum b_n$ convergir, então $\sum a_n$ também será convergente. De modo equivalente, se a série $\sum a_n$ divergir, então $\sum b_n$ será divergente.*

Teste integral. *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos. Se existe uma função $f(x)$ definida em $[p, +\infty)$, contínua e monótona neste intervalo, e, além disso, $f(n) = a_n$, $\forall n$, então a série $\sum a_n$ e a integral $\int_p^{+\infty} f(x)dx$, convergem ou divergem simultaneamente.*

Critério de convergência para séries positivas. *Uma série de termos positivos converge se, e somente se, a sequência das suas somas parciais é limitada.*

Observação. Estes últimos três resultados são válidos, também, para séries de termos não negativos.

Relembramos, também, a regra de L'Hospital, que utilizaremos com frequência a seguir.

Regra de L'Hospital. *Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ diferenciáveis numa vizinhança perfurada do ponto a, com a derivada da função g diferente de zero. Supõe-se também que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. Nessas condições, se existir o limite de $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então existirá $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, e estes serão iguais.*

Finalmente, introduzimos as seguintes notações que serão usadas nas próximas seções:

$$D_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}; \tag{1}$$

$$R_n = n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right); \tag{2}$$

$$B_n = \ln n \cdot \left(n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right); \tag{3}$$

$$K_n = \frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}, \; onde \; \sum d_n, com \; d_n > 0, \; diverge. \tag{4}$$

3. Teste de Kummer e suas consequências

O seguinte teorema conhecido servirá de base para a construção de uma hierarquia de testes refinados para investigação do comportamento de séries. Para forma completa da exposição, apresentamos este resultado junto com sua demonstração [2, 4, 7].

Teorema (teste) de Kummer. *Seja uma série $\sum a_n$ de termos positivos. Além disso, consideremos K_n dado por (4), onde $\sum d_n$ é uma série auxiliar, também de termos positivos, divergente. Suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$. Logo:*

1) Se $K > 0$, então a série $\sum a_n$ converge;

2) Se $K < 0$, então $\sum a_n$ diverge.

Prova

1) Consideremos $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = K$, $K > 0$. Da definição de limite, segue que $\forall \varepsilon > 0$, (particularmente para $\varepsilon = \frac{K}{2}$), existe N tal que $\forall n > N$, temos:
$\left(\frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}\right) > K - \varepsilon = \frac{K}{2}$, implicando que $a_{n+1} < \frac{2}{K}\left(\frac{a_n}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}}\right)$.
E disto, obtemos:

$$\sum_{v=N+1}^{n+1} a_v < \frac{2}{K}\left(\frac{a_N}{d_N} - \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}}\right) < \frac{2}{K} \cdot \frac{a_N}{d_N}.$$

Logo, analisando as somas parciais, podemos ver que estas são limitadas:

$$S_{n+1} = \sum_{v=1}^{n+1} a_v = \sum_{v=1}^{N} a_v + \sum_{v=N+1}^{n+1} a_v < S_N + \frac{2}{K} \cdot \frac{a_N}{d_N} = c, \; \forall n,$$

onde c é uma constante. Assim, como $\{S_n\}$ é limitada superiormente e também crescente, segue que existe o limite finito $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, implicando na convergência de $\sum a_n$.

2) Consideremos $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = K$, $K < 0$. Da definição de limite, segue que $\forall \varepsilon > 0$, (particularmente para $\varepsilon = -\frac{K}{2}$), existe N tal que $\forall n > N$, temos:
$\left(\frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}\right) < K + \varepsilon = \frac{K}{2} < 0$, e então $a_{n+1} > \frac{a_n}{d_n} d_{n+1}$.
Logo, $a_{N+m} > \frac{a_N}{d_N} d_{N+m}, \forall m \in N$. Pelo teorema de comparação, como $a_n > c \cdot d_n$ e $\sum d_n$ diverge da condição inicial, então $\sum a_n$ diverge.

Observação 1. É importante notar que a divergência da série $\sum d_n$ é usada somente na segunda parte da demonstração, visto que na primeira, $\sum d_n$ pode ser qualquer.

Observação 2. O teorema de Kummer, assim como qualquer teste específico decorrente dele, pode ser formulado, também, na forma sem limites [4, 7, 11]. É interessante notar que esta foi a forma original da sua formulação proposta por Kummer e Dini [7, 9, 11]. No entanto, nesse estudo, consideramos, na maioria dos casos, os testes com limites, o que é mais usado na prática.

Conforme a atribuição de valores para d_n, é possível construir testes de diversos graus de refinamento, como é visto a seguir.

Corolário 1. *Tomando* $d_n = 1$ *para o teste de Kummer (é fácil verificar que a série* $\sum d_n$ *diverge, porque* d_n *não tende a zero quando* n *tende a infinito), temos a relação de que* $K_n = D_n - 1$*, onde* D_n *e* K_n *são definidas pelas fórmulas (1) e (4), respectivamente. Então obtemos o seguinte teste bem conhecido como um caso particular do teste de Kummer [3, 4, 6, 10]:*
Teste de D'Alembert (ou teste da Razão). *Dada a série* $\sum a_n$*, suponha que* $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = D$*. Assim:*

1) Se $D > 1$*, então* $\sum a_n$ *converge;*
2) Se $D < 1$*, então* $\sum a_n$ *diverge.*

Corolário 2. *Se escolhermos* $d_n = \frac{1}{n}$ *no teste de Kummer (nota-se que a série* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge), então* $K_n = R_n - 1$*, onde* R_n *e* K_n *são definidos pelas expressões (2) e (4). Desta maneira, o teste a seguir é construído [2, 4, 6, 7].*
Teste de Raabe. *Considere uma série* $\sum a_n$ *e admita que* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R$*. Logo:*

1) Se $R > 1$*, então* $\sum a_n$ *converge;*
2) Se $R < 1$*, então* $\sum a_n$ *diverge.*

Corolário 3. *Tomando* $d_n = \frac{1}{n \ln n}$ *no teste de Kummer (é fácil provar, usando o teste integral, que a série* $\sum \frac{1}{n \ln n}$ *diverge), encontramos que* $K_n = B_n - (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$*, onde* B_n *e* K_n *são definidos pelas expressões (3) e (4), respectivamente. Assim, chegamos ao seguinte teste [2, 4, 7]:*
Teste de Bertrand. *Seja a série* $\sum a_n$*. Suponha que* $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$*. Assim:*

1) Se $B > 1$*, então* $\sum a_n$ *converge;*
2) Se $B < 1$*, então* $\sum a_n$ *diverge.*

Corolário 4. *Como consequência dos Corolários 1, 2 e 3, obtemos o teste de Gauss [2, 4, 7].*
Teste de Gauss. *Dada a série* $\sum a_n$*, suponha que* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^\gamma}$*, com* $\gamma > 1$ *e* θ_n *limitada. Logo:*

1) Se $\lambda > 1$*, então* $\sum a_n$ *converge e caso* $\lambda < 1$*, esta diverge;*
2) Se $\lambda = 1$*, sendo* $\mu \neq 1$*, temos que* $\sum a_n$ *converge se* $\mu > 1$*, e diverge quando* $\mu < 1$*;*
3) Se $\lambda = 1$ *e* $\mu = 1$*, a série* $\sum a_n$ *diverge.*

Prova

1) $D = \lim\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^\gamma}\right) = \lambda$, onde $\lambda \neq 1$ e as conclusões seguem diretamente do teste de D'Alembert.

2) $R = \lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\mu + \frac{\theta_n}{n^{\gamma-1}}\right) = \mu$, onde $\mu \neq 1$ e o teste de Raabe é aplicado.

3) $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln n \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln n \left(n\left(\frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{\gamma}}\right) - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\gamma-1}}\theta_n = 0 < 1$, pois θ_n é limitada e $\gamma > 1$. Segue desta última a divergência pelo teste de Bertrand.

Seguindo essa linha de construção de testes mais refinados, baseados no teorema de Kummer, vamos introduzir dois novos testes que têm abrangência ainda maior que os já apresentados. Nesses testes utilizaremos as seguintes notações:

$$A_n = \ln\ln n \cdot \left\{\ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] - 1\right\} \tag{5}$$

$$Z_n = \ln\ln\ln n \cdot \left\{\ln\ln n \cdot \left[\ln n \cdot \left(n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) - 1\right] - 1\right\}. \tag{6}$$

Teorema 1. *Seja uma série* $\sum a_n$, $a_n > 0$. *Suponhamos que* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, *onde* A_n *é dado pela fórmula (5). Assim:*

1) Se $A > 1$, *então* $\sum a_n$ *converge;*

2) Se $A < 1$, *então* $\sum a_n$ *diverge.*

Prova

Consideremos K_n dado pela expressão (4), com $d_n = \frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$ (sendo a divergência de $\sum d_n$ facilmente verificada pelo teste integral). Então

$$\begin{aligned} K_n &= n\ln n\ln\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1) \\ &= \ln\ln n\left[n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &\quad -(n+1)\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right) \\ &= A_n + L_n - \frac{n+1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{\ln(1+1/n)}} \\ &\quad -\frac{n+1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right), \end{aligned}$$

onde $L_n = \ln\ln n\left(1 - (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

É simples verificar que o terceiro aditivo tem limite igual a 1 e o quarto, a 0. Para o cálculo do limite de L_n, passamos a usar funções de variável contínua, visto que vamos aplicar a Regra de L'Hospital várias vezes. Por simplicidade, trocamos $\frac{1}{n}$ por x, tendo em mente que as funções de x serão contínuas. Assim:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\ln n\left(1 - (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x(\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln(1+x)}{\ln(-\ln x))^{-1}} \cdot \frac{1}{(1-(\ln x)^{-1}(\ln(-\ln x))^{-1})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(-\ln x))^2 \cdot \ln x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(-\ln x) + (\ln(-\ln x))^2}{-x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2+2\ln(-\ln x)}{x^{-1}\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\ln x(1-\ln x)} = 0.$$

Logo,

$$K = \lim_{n\to+\infty} K_n = \lim_{n\to+\infty} (A_n + L_n) - 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} A_n = K - 1 = A,$$

sendo $A = \lim_{n\to+\infty} A_n$, e seguem diretamente as conclusões do teste de Kummer, ou seja:

1) Se $K > 0 \Leftrightarrow A > 1$, então a série dada converge;
2) Se $K < 0 \Leftrightarrow A < 1$, esta diverge.

Teorema 2. *Seja uma série $\sum a_n$, $a_n > 0$. Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$, com Z_n definido por (6). Assim:*

1) Se $Z > 1$, então $\sum a_n$ converge;
2) Se $Z < 1$, então $\sum a_n$ diverge.

Prova

Consideremos K_n dado pela fórmula (4), com $d_n = \frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\ln\ln\ln n}$ (sendo a divergência de $\sum d_n$ verificada a partir do teste integral). Logo:

$$K_n = n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\ln\ln\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1)\cdot\ln\ln(n+1)\cdot\ln\ln\ln(n+1)$$

$$= n\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\ln\ln\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1)\ln\ln n\cdot\ln\ln\ln n$$

$$-(n+1)\ln(n+1)\ln\ln\ln n\cdot\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)$$

$$-(n+1)\ln(n+1)\cdot\left(\ln\ln n + \ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\right)\cdot\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)}{\ln\ln n}\right)$$

$$= \ln\ln\ln n\cdot\left[n\ln n\cdot\ln\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln n\cdot\ln\ln n - \ln\ln n - 1\right] + \ln\ln\ln n\cdot\ln\ln n$$

$$\cdot\left[1-(n+1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] + \ln\ln\ln n\cdot\left[1-(n+1)\cdot\ln n\cdot\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\right]$$

$$-(n+1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\cdot\ln\ln\ln n - (n+1)\ln(n+1)\cdot\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)$$

$$\cdot\left(\ln\ln n\cdot\left(\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\right)^{-1} + 1\right)\cdot\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)}{\ln\ln n}\right)$$

$$= Z_n + U_n + E_n - G_n - J_n \cdot \rho_n,$$

onde Z_n é dado pela fórmula (6),

$$U_n = \ln\ln\ln n \cdot \ln\ln n \cdot \left[1 - (n+1)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$E_n = \ln\ln\ln n \cdot \left(1 - (n+1)\cdot \ln n \cdot \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\right),$$

$$G_n = (n+1)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\cdot \ln\ln\ln n,$$

$$J_n = (n+1)\ln(n+1)\cdot \ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right),$$

$$\rho_n = \ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)}{\ln\ln n}\right)^{\frac{\ln\ln n}{\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)}+1}.$$

É fácil de ver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n = 1$. Também:

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)$$

$$\cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{\ln(1+1/n)}} = 1.$$

E ainda, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} G_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\cdot \ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{\ln(1+1/n)}} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\ln\ln\ln n}{\ln n} = 0.$$

Para calcular os limites de U_n e E_n, passamos à variável contínua (trocando $\frac{1}{n}$ por x) para poder usar a regra de L'Hospital. Assim, calculando o primeiro limite:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}(\ln\ln(-\ln x))^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln(1+x)}{(\ln(-\ln x))^{-1}(\ln\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$\cdot \lim_{x\to 0^+}\left(1-(\ln x)^{-1}\cdot(\ln(-\ln x))^{-1} - (\ln x)^{-1}\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}\right)^{-1}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(-\ln x)\cdot\ln\ln(-\ln x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\ln(-\ln x)+1}{x^{-1}\cdot \ln x}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x\cdot \ln(-\ln x)\cdot(\ln x - 1)} = 0.$$

Passando ao segundo, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} E_n = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot(\ln x)^{-1} + (1+x)\ln\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)}{x\cdot(\ln x)^{-1}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(1-(\ln x)^{-1}-(\ln x)^{-1}\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}\right)^{-1}$$

$$\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^{-1} + \ln x\cdot \ln\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) + \frac{\ln(1+x)}{x\cdot(\ln x - \ln(1+x))}}{(\ln\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\ln(-\ln x)}{\ln x} + \lim_{x\to 0^+}\ln\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{\frac{-\ln x}{\ln(1+x)}}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{\ln\ln(-\ln x)}{-x^{-1}}$$

$$+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{\ln\ln(-\ln x)}{\ln x - \ln(1+x)} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty}(Z_n + U_n + E_n - H_n - J_n\cdot\rho_n) = \lim_{n\to+\infty} Z_n - 1 = Z - 1 = K.$$

Ou seja, $\lim_{n\to+\infty} Z_n = K + 1 = Z$. Portanto:

1) $K > 0 \Leftrightarrow Z > 1$, e a série converge;
2) $K < 0 \Leftrightarrow Z < 1$, e a série diverge.

Observação 1. A partir das construções feitas nessa seção, podemos concluir que a hierarquia apresentada dos testes, baseados no teorema de Kummer, segue a seguinte ordem: começando do mais simples teste de D'Alembert, passando para o de Raabe, depois o de Bertrand, teorema 1 e teorema 2, estes cada vez aumentam a área da sua aplicação.

Observação 2. Testes ainda mais finos podem ser construídos de modo análogo a partir do teste de Kummer, usando as séries divergentes $\sum d_n$, em que

$$d_n = (n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\ln\ln\ln n\cdot\ln\ln\ln\ln n)^{-1},$$

$$d_n = (n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\ln\ln\ln n\cdot\ln\ln\ln\ln n\cdot\ln\ln\ln\ln\ln n)^{-1},$$

e assim por diante, onde a divergência destas é verificada pelo teste integral. Ao mesmo tempo, como pode ser visto nos teoremas 1 e 2, as demonstrações tornam-se cada vez mais complicadas, exigindo mais cálculos.

4. Hierarquia de Kummer aplicada a alguns exemplos

Exemplo 1. Analisar a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$.

Primeiro, calculamos

$$D_n = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})} \cdot \frac{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})(2+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1}\sqrt{n!}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

Então $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$, isto é, o teste de D'Alembert não funciona. Porém, pelo teste de Raabe obtemos a convergência, pois

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{2}{\sqrt{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} 2n^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = +\infty > 1.$$

Exemplo 2. Estudar o comportamento da série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\left(n-\sqrt{n}\right)\ln^2 n}$.

Notamos que o teste de Raabe não gera resultado para esta série, pois

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1-\sqrt{n+1})\ln^2(n+1)}{(n-\sqrt{n})\ln^2 n}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^2-1\right]+n\left(\frac{(n+1-\sqrt{n+1})}{n-\sqrt{n}}-1\right)\cdot\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^2\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{1}{n\ln^2 n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\right\}$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 1.$$

Mas usando o teste de Bertrand, obtemos a convergência:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}\ln n\left(n\frac{(n+1-\sqrt{n+1})\ln^2(n+1)-(n-\sqrt{n})\ln^2 n}{(n-\sqrt{n})\ln^2 n}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-1/\sqrt{n}}$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\left((n+1)\frac{\left((\ln n+\ln(1+1/n))^2-\ln^2 n\right)}{\ln n}-\frac{\sqrt{n+1}\ln^2(n+1)-\sqrt{n}\ln^2 n}{\ln n}+\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}\ln n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{1}{n\ln n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\right]$$

$$+\lim_{n\to\infty}\left\{-\ln n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-2\frac{(1+1/n)^{1/2}}{n^{1/2}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\frac{(1+1/n)^{1/2}}{n\sqrt{n}\ln n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\right\}$$

$$= 2-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2 > 1.$$

Exemplo 3. Verificar a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

Começamos da razão D_n:

$$D_n = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^p \cdot \frac{(n+1)^q}{n^q} \cdot \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}\right)^q$$

$$= \frac{(2n+2)^p}{(2n+1)^p}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^q = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^q$$

$$= \left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}\right)^k\right)\cdot\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{q(q-1)\ldots(q-j+1)}{j!n^j}\right)$$

$$= 1+\frac{(2n+1)q+pn}{n(2n+1)}+\frac{q(q-1)}{2!n^2}+\frac{pq}{n(2n+1)}+\frac{p(p-1)}{2!(2n+1)^2}+\ldots = 1+\frac{2q+p}{2n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Daqui é visto que o teste de D'Alembert não se aplica. Usando o teste de Raabe:

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{2q+p}{2n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left((2q+p)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n\cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{2q+p}{2}\ ,$$

obtemos que a série converge quando $p > 2-2q$ e diverge para $p < 2-2q$.

É necessário analisar ainda o caso $p = 2-2q$. Nesta situação:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{q+2n}{n(2n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1+\frac{2n+1}{n(2n+1)}+\frac{q-1}{n(2n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Então, pelo teste de Gauss, com $\gamma = 2 > 1$, $\lambda = 1$ e $\mu = 1$ a série diverge quando $p = 2-2q$.

Exemplo 4. Analisar o comportamento da série $\sum_{n=2}^{+\infty} a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}$.
Observação. Aqui vamos considerar apenas o caso em que $a > 1$, pois se $0 < a \leq 1$, então a série diverge, já que a_n não tende a zero.

É simples verificar que o teste de D'Alembert não gera resultado, porém aplicando o teste de Raabe, obtemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)$. Fazemos a troca de variável $a^{\frac{1}{n}}-1 = t \Rightarrow \frac{1}{n}\ln a = \ln(1+t)$, e como $n\to\infty \Rightarrow \frac{1}{n}\to 0 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}}-1 = t\to 0$, temos que $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\cdot\ln a}{\ln(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \ln a$. Então, podemos concluir que se $a > e$, então a série dada converge; porém se $a < e$, a mesma diverge.

No caso $a = e$ o teste de Raabe não dá resposta, portanto, vamos aplicar o teste de Bertrand. Passando a funções de variável contínua para utilizar a regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \lim_{n\to+\infty}\ln n\left(n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\ln n\left(ne^{\frac{1}{n}}-(n+1)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-\ln x)\left(\frac{1}{x}e^x - \frac{1}{x} - 1\right) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x(\ln x)^{-1}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{(\ln x)^{-1}} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-(\ln x)^{-1}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{(\ln x)^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2(\ln x)}{-x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{1} = 0 < 1\ ,$$

que determina a divergência quando $a = e$.

Exemplo 5. Verificar a convergência da série $\sum_{n=2}^{+\infty} a^{-\left(\frac{(\ln 2)^p}{2} + \frac{(\ln 3)^p}{3} + \ldots + \frac{(\ln(n-1))^p}{n-1}\right)}$.

Aplicando o teste de Raabe, obtemos:

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(a^{\frac{(\ln n)^p}{n}} - 1\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{a^{x(-\ln x)^p} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} a^{x(-\ln x)^p} \cdot \ln a \cdot \left((-\ln x)^p - xp(-\ln x)^{p-1}.\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \ln a \cdot (-\ln x)^p \cdot \lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{p}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 0^+} (-\ln x)^p \cdot \ln a.$$

Da última expressão é visto que se $p > 0$, então $\lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln x)^p = +\infty$, isto é, $\lim\limits_{x\to 0^+} R_n = +\infty$, resultando na convergência da série dada. Por outro lado, se $p < 0$, então $\lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln x)^p = 0$, de onde segue que $R = \lim\limits_{x\to 0^+} R_n = 0$, e a série diverge. O caso $p = 0$ foi analisado no exemplo anterior.

Exemplo 6. Investigar o comportamento da série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}$, $p \in R$.

Aplicando o teste de Raabe, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{\ln n} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^p a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^p a^x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-p\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{p-1} \frac{\frac{\ln x}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x}}{(\ln x)^2} a^x + \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^p a^x \ln a\right)$$

$$= -p \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{(1+x)(\ln x)} - \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{(\ln x)^2}\right) + \lim_{x\to 0^+} \ln a = \ln a.$$

Se $a > e$ então a série dada converge, porém se $a < e$ esta diverge, $\forall p \in R$.

Logo, resta analisar o caso quando $a = e$. Pelo teste de Bertrand, segue que:

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \lim_{n\to+\infty} \ln n \left(n\left(\frac{(\ln(n+1))^p}{(\ln n)^p} e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \ln n e^{\frac{1}{n}} \left(\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^p - \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^p - (1+x)\,e^{-x}}{x(-\ln x)^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-p\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{p-1}\left(\frac{\ln x}{1+x}-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{1-\ln x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-x}}{(\ln x)^{-1}\,(-1+(\ln x)^{-1})}$$

$$= -p\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{1-\ln x}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{1-\ln x}\right) + \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}}{-1+(\ln x)^{-1}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}} = p.$$

Assim, se $a = e$ e $p > 1$, a série dada converge, mas se $a = e$ e $p < 1$, então a mesma diverge.

Para o caso $p = 1$, quando $a = e$, vamos utilizar o Teorema 1. Representamos A_n na forma:

$$A_n = \ln\ln n \cdot \left\{\ln n \cdot \left[n\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\cdot e^{\frac{1}{n}} - n - 1\right] - 1\right\}$$

$$= \ln\ln n \cdot n\ln n \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right) + \ln\ln n \cdot \left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{n}}\right)\cdot e^{\frac{1}{n}} = H_n + F_n.$$

Primeiro, calculamos limite de H_n:

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = \lim_{n\to+\infty} n\ln n\cdot\ln\ln n.\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x - 1 - x}{x(-\ln x)^{-1}(\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-(\ln x)^{-1}-(\ln x)^{-1}.(\ln(-\ln x))^{-1}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x - 1}{(-\ln x)^{-1}(\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1+(\ln(-\ln x))^{-1}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(\ln x)^{-2}(\ln(-\ln x))^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^2(\ln(-\ln x))}{x^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x\cdot\ln(-\ln x) + \ln x}{-x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln(-\ln x)+3}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\ln x} = 0.$$

Resolvemos agora o limite de F_n:

$$\lim_{n\to+\infty} F_n = \lim_{n\to+\infty}\ln\ln n\cdot\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{n}}\right)\cdot\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x) - xe^{-x}}{x\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1-(1+x)\cdot e^{-x}+x\cdot(1+x)\cdot e^{-x}}{(\ln(-\ln x))^{-1}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-(\ln(-\ln x))^{-1}\cdot(\ln x)^{-1}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1+e^{-x}\cdot(x^2-1)}{(\ln(-\ln x))^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(\ln(-\ln x))^{-2}\cdot(\ln x)^{-1}}\cdot\lim_{x\to 0^+}(x^2-2x-1)$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln(-\ln x))^2\cdot\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln(-\ln x)+(\ln(-\ln x))^2}{x^{-1}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{2\,(1+\ln(-\ln x))}{\ln x\cdot x^{-1}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\ln x\cdot x^{-1}\cdot(1-\ln x)} = 0.$$

Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (H_n + F_n) = 0$, e a série diverge para o caso $a = e$, $p = 1$.

Exemplo 7. Estudar a convergência de $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\ln n\cdot(\ln\ln n)^p} \cdot e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}$.

Primeiro, transformamos a expressão A_n do Teorema 1:

$$A_n = \ln\ln n \cdot \left\{ n\ln n \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\ln\ln n} \cdot \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\right)^p \cdot e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\left(1 + \frac{1}{\ln\ln n} \cdot \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\right)^p \cdot e^{\frac{1}{n}}\right] - 1 \right\}$$

$$= n\ln n \cdot \ln\ln n \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\ln\ln n} \cdot \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\right)^p - e^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}}\right]$$

$$+ e^{\frac{1}{n}} \ln\ln n \cdot \left[n\ln n \cdot \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n} \cdot \left(1 + \frac{1}{\ln\ln n} \cdot \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\right)^p - e^{-\frac{1}{n}}\right] = L_n + M_n.$$

Resolvemos os limites de L_n e M_n em separado. Para o primeiro obtemos:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left[1 + \frac{1}{\ln(-\ln x)} \cdot \ln\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\right]^p - e^{-x} - xe^{-x}}{-x\cdot(\ln x)^{-1}\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-(\ln x)^{-1} \cdot (\ln(-\ln x))^{-1} + x \cdot (\ln x)^{-2} \cdot \frac{(\ln(-\ln x))^{-1}}{x} + \frac{x(\ln x)^{-1}(\ln(-\ln x))^{-2}}{x\cdot\ln x} \right)^{-1}$$

$$\cdot \left\{ p\cdot\left[1 + \frac{1}{\ln(-\ln x)} \cdot \ln\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\right]^{p-1} \cdot \left[-(\ln(-\ln x))^{-2} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\ln(-\ln x)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}} \cdot \frac{1}{\ln^2 x}\left(\frac{\ln x}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right] + e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} \right\}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left\{ p \cdot \left[1 + \frac{1}{\ln(-\ln x)} \cdot \ln\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\right]^{p-1} \cdot \left[\frac{\ln\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)}{x\cdot(\ln(-\ln x))} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{1+x} \cdot \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{\ln x - \ln(1+x)}\right)\right] - \frac{\ln x \cdot \ln(-\ln x)}{x^{-1}} \cdot e^{-x} \right\}$$

$$\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 - (\ln x)^{-1} - (\ln x)^{-1} \cdot (\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= p + p \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(-\ln x)} \cdot \ln\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{\ln(1+x)}} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x\ln x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(-\ln x) + 1}{x^{-1}}$$

$$= p - \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = p.$$

Agora calculamos o segundo:

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \lim_{x\to 0^+} e^x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)\left(1+\frac{1}{\ln(-\ln x)}\cdot\ln\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\right)^p - xe^{-x}}{x(\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(\ln(-\ln x))^{-1}-x(\ln(-\ln x))^{-2}\cdot(\ln x)^{-1}\cdot x^{-1}}\cdot\left\{\frac{1}{1+x}\left(1+\frac{1}{\ln(-\ln x)}\cdot\ln\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\right)^p\right.$$

$$+\ln(1+x)\cdot\left[\frac{-(\ln(-\ln x))^{-2}}{\ln x\cdot x}\cdot\ln\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)-(\ln(-\ln x))^{-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}}\cdot\frac{\frac{\ln x}{1+x}-\frac{\ln(1+x)}{x}}{\ln^2 x}\right]$$

$$\left.\cdot\, p\left(1+\frac{1}{\ln(-\ln x)}\cdot\ln\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\right)^{p-1}-e^{-x}+xe^{-x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{\ln(-\ln x)}\cdot\ln\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\right)^p-e^{-x}-xe^{-x}}{(\ln(-\ln x))^{-1}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}$$

$$+p\cdot\left[-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)}{\ln x\cdot\ln(-\ln x)}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)\cdot x\ln x}{x\cdot(1+x)\cdot\ln x(\ln x-\ln(1+x))}\right.$$

$$\left.+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)\cdot(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x\cdot(1+x)\cdot\ln x(\ln x-\ln(1+x))}\right]+\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln(-\ln x))}{x^{-1}}\cdot\lim_{x\to 0^+}e^{-x}$$

$$=p\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{\ln(-\ln x)}\cdot\ln\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\right)^{p-1}\cdot\left\{\lim_{x\to 0^+}\ln\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(-\ln x)\cdot\ln x}{x^{-1}}\right.$$

$$\left.\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x\ln x}{x\cdot(1+x)\ln x(\ln x-\ln(1+x))}-\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1+x}{(1+x)\cdot\ln x(\ln x-\ln(1+x))}\right)\right\}$$

$$-\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln(-\ln x))^2\cdot\ln x}{x^{-2}}\cdot\lim_{x\to 0^+}e^{-x}-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=p\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(-\ln x)\cdot\ln x}{x^{-1}}$$

$$\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{(1+x)\cdot(\ln x-\ln(1+x))}-\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{\ln x(\ln x-\ln(1+x))}\right)$$

$$-\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln(-\ln x))^2\cdot\ln x}{x^{-2}}-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=p\cdot\lim_{x\to 0^+}\beta(x)\cdot\lim_{x\to 0^+}\alpha(x)-\lim_{x\to 0^+}\omega(x)=0.$$

O último resultado segue do cálculo separado dos limites de $\beta(x)$, $\alpha(x)$ e $\omega(x)$, os quais são nulos, o que pode ser provado aplicando em cada um deles a regra de L'Hospital.

Logo, $\lim\limits_{x\to 0^+} A_n = \lim\limits_{x\to 0^+} L_n + \lim\limits_{x\to 0^+} M_n = p$. Portanto se $p>1$, então a série converge; e se $p<1$, esta diverge.

Para o caso quando $p=1$, será utilizado o Teorema 2. Assim:

$$Z_n=\ln\ln\ln n\cdot\left\{\ln\ln n\cdot\left[\ln n\cdot\left(n\cdot\left(\frac{\ln(n+1)\cdot\ln\ln(n+1)}{\ln n\cdot\ln\ln n}\cdot e^{\frac{1}{n}}-1\right)-1\right)-1\right]-1\right\}$$

Observamos que

$$\ln(n+1)\cdot\ln\ln(n+1)=\ln n\ln\ln n+\ln\ln n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$+\ln n\ln\left(1+\frac{1}{\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

E então:

$$Z_n=\ln\ln\ln n\cdot\Bigg\{\ln\ln n\cdot\Bigg[\ln n\cdot\Bigg(n\cdot\Bigg(e^{\frac{1}{n}}+\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln n}\ln\bigg(1+\frac{1}{n}\bigg)+\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln\ln n}\cdot\ln\bigg(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\bigg)$$

$$+\frac{1}{\ln n\ln\ln n}\cdot\ln\bigg(1+\frac{1}{n}\bigg)\cdot\ln\bigg(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\bigg)\cdot e^{\frac{1}{n}}-1\Bigg)-1\Bigg)-1\Bigg]-1\Bigg\}$$

$$=\ln\ln\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\ln n\left[n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)-1\right]+\ln\ln\ln n\cdot\ln\ln n\left\{\ln n\cdot\frac{n}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{1}{n}}-1\right\}$$

$$+\ln\ln\ln n\left\{\ln\ln n\left(\ln n\cdot\frac{n}{\ln\ln n}\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)e^{\frac{1}{n}}\right)-1\right\}$$

$$+\ln\ln\ln n\ln\ln n\ln n\cdot\frac{n}{\ln n\ln\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)e^{\frac{1}{n}}$$

$$=L_n+M_n+P_n+Q_n.$$

Calculamos separadamente o limite de cada expressão. Para a primeira obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{x\to0^+}-\frac{e^x-1-x}{x(\ln x)^{-1}\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}(e^x-1)\cdot\bigg[(\ln x)^{-1}(\ln(-\ln x))^{-1}(\ln\ln(-\ln x))^{-1}-\frac{x(\ln x)^{-2}}{x}(\ln(-\ln x))^{-1}(\ln\ln(-\ln x))^{-1}$$

$$-x(\ln x)^{-1}\cdot\frac{(\ln(-\ln x))^{-2}}{\ln x\cdot x}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}-x(\ln x)^{-1}\cdot\frac{(\ln(-\ln x))^{-1}}{\ln x\cdot x}\cdot\frac{(\ln\ln(-\ln x))^{-2}}{\ln(-\ln x)}\bigg]^{-1}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{(\ln x)^{-1}\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$\cdot\lim_{x\to0^+}\big(1-(\ln x)^{-1}-(\ln x)^{-1}\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}-(\ln x)^{-1}\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}\big)^{-1}$$

$$=\lim_{x\to0^+}e^x\bigg[\frac{(\ln x)^{-2}}{x}(\ln(-\ln x))^{-1}(\ln\ln(-\ln x))^{-1}+\frac{(\ln x)^{-1}}{x\cdot\ln x}\cdot(\ln(-\ln x))^{-2}(\ln\ln(-\ln x))^{-1}$$

$$+(\ln x)^{-1}(\ln(-\ln x))^{-1}(\ln\ln(-\ln x))^{-2}\cdot\frac{(\ln(-\ln x))^{-1}}{\ln x\cdot x}\bigg]^{-1}$$

$$=\lim_{x\to0^+}x\cdot\big((\ln x)^{-2}\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}\big)^{-1}$$

$$\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{1+(\ln(-\ln x))^{-1}+(\ln(-\ln x))^{-1}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2 \ln(-\ln x)\cdot \ln\ln(-\ln x)}{x^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x\cdot \ln(-\ln x)\cdot \ln\ln(-\ln x) + \ln x\cdot \ln\ln(-\ln x) + \ln x}{-x^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(-\ln x)\cdot \ln\ln(-\ln x) + 3\ln\ln(-\ln x)}{x^{-1}} + \lim_{x\to 0^+}\left(3x + \frac{x}{\ln(-\ln x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln\ln(-\ln x)}{-x^{-1}\cdot \ln x} - \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{\ln x} + \frac{3x}{\ln x\cdot \ln(-\ln x)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\ln(-\ln x)\cdot \ln x\cdot (\ln x - 1)} = 0.$$

Passamos ao limite de M_n:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{x\to 0^+} e^x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - xe^{-x}}{x(\ln(-\ln x))^{-1}\,(\ln\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} + x^2e^{-x}}{(\ln(-\ln x))^{-1}\,(\ln\ln(-\ln x))^{-1}} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x}$$

$$\cdot \lim_{x\to 0^+} \left(1 - (\ln x)^{-1}(\ln(-\ln x))^{-1} - (\ln x)^{-1}\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}\,(\ln\ln(-\ln x))^{-1}\right)^{-1}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}}{1 + (\ln\ln(-\ln x))^{-1}} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x + 2x^2 - x^3}{(\ln x)^{-1}\cdot(\ln(-\ln x))^{-2}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x\cdot(\ln(-\ln x))^2\cdot \ln\ln(-\ln x)}{x^{-1}} \cdot \lim_{x\to 0^+}\left(1 + 2x - x^2\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(-\ln x))^2\cdot \ln\ln(-\ln x) + 2\ln(-\ln x)\cdot \ln\ln(-\ln x) + \ln(-\ln x)}{x^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(-\ln x)\cdot \ln\ln(-\ln x) + \ln(-\ln x) + 2\cdot \ln\ln(-\ln x)}{-\ln x\cdot x^{-1}} - 3\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cdot \ln\ln(-\ln x)}{x^{-1}\cdot(\ln x)^2} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 - (\ln x)^{-1}} + 3\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x(\ln x - 1)}$$

$$+ \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\ln x\cdot \ln(-\ln x)\cdot(\ln x - 1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{(\ln x)^2\cdot \ln(-\ln x)\cdot(2 - \ln x)} = 0\ .$$

Calculamos agora o limite de P_n:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = -\lim_{x\to 0^+} e^x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) + x\cdot e^{-x}\cdot(\ln x)^{-1}}{x\cdot(\ln x)^{-1}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 - (\ln x)^{-1} - (\ln x)^{-1}\cdot(\ln(-\ln x))^{-1}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x\ln x - (1+x)\ln(1+x)}{(\ln x - \ln(1+x))\cdot x\cdot(1+x)}\cdot(\ln x)^{-1} + e^{-x}\cdot(\ln x)^{-1} - x\cdot e^{-x}\cdot(\ln x)^{-1} - e^{-x}\cdot(\ln x)^{-2}}{(\ln x)^{-1}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x\,(1-e^{-x}\cdot(1+x))+e^{-x}\cdot(1+x)\cdot\ln(1+x)}{\ln x - \ln(1+x)} \cdot \ln\ln(-\ln x)$$

$$-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\ln(-\ln x)}{\ln x-\ln(1+x)}+\lim_{x\to 0^+}e^{-x}\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\ln(-\ln x)}{1/x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\ln(-\ln x)}{\ln x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln x\cdot\left(1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-x}(1+x)}{(\ln\ln(-\ln x))^{-1}}+\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}(1+x)\cdot\ln(1+x)}{1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\ln(-\ln x)}{\ln x}$$

$$-\lim_{x\to 0^+}(1+x)\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(-\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln(-\ln x)\cdot\ln x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(-\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x}\cdot(\ln\ln(-\ln x))^2\cdot\ln(-\ln x)\cdot\ln x}{1/x^2}+\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x}\cdot(1+x)\cdot\ln(1+x)}{1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x\cdot\ln(-\ln x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cdot\ln\ln(-\ln x)+(\ln\ln(-\ln x))^2+(\ln\ln(-\ln x))^2\cdot\ln(-\ln x)}{2/x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\ln(-\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{-2/x^3}+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2\cdot\ln\ln(-\ln x)}{\ln(-\ln x)\cdot\ln x\cdot x}\cdot[1+\ln(-\ln x)]+\frac{(\ln\ln(-\ln x))^2}{\ln x\cdot x}}{-2/x^3}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\ln(-\ln x)\cdot\ln x}-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(-\ln x)\cdot\ln x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\ln(-\ln x)\cdot[1+\ln(-\ln x)]}{1/x^2}$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln\ln(-\ln x))^2}{1/x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(-\ln x)\cdot\ln x}\cdot\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(-\ln x)\cdot\ln x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln(-\ln x)}{-2/x^2}+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\ln(-\ln x)}{-2/x^2}\right]$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(-\ln x)\cdot\ln x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cdot\ln\ln(-\ln x)}{-2/x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(-\ln x)\cdot\ln x}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(-\ln x)\cdot\ln x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2\ln x}+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2\ln(-\ln x)\cdot\ln x}\right]$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(-\ln x)\cdot\ln x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2\ln(-\ln x)\cdot\ln x}=0.$$

Encontramos, finalmente, o limite de Q_n:

$$\lim_{n\to\infty}Q_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln\ln n}{\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{\ln(1+1/n)}}\cdot e^{\frac{1}{n}}=0.$$

Assim, após analisar os quatro limites, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty}Z_n=0<1$, então a série diverge para o caso $p=1$.

Observação. Considerando os últimos exemplos, e observando atentamente a lógica de sua construção, podemos ver que é possível compor exemplos que exigem testes cada vez mais sofisticados para a sua análise, ainda mais finos que os apresentados neste estudo.

5. Testes com limites superiores e inferiores

Notamos que os limites requisitados nos testes da seção 3 podem não existir. Para contornar esta possível situação problemática, convém tratar de limites superiores e inferiores, que sempre existem.

Reformulamos primeiramente o teste de Kummer [1, 2].

Teorema (teste) de Kummer com limites superior e inferior. *Consideramos uma série $\sum a_n$, com $a_n > 0$. Seja também $\sum d_n$, $d_n > 0$, uma série divergente auxiliar, com K_n definida pela fórmula (4). Então:*

1) Se $\varliminf\limits_{n\to\infty} K_n > 0$, então a série $\sum a_n$ converge;

2) Se $\varlimsup\limits_{n\to\infty} K_n < 0$, então a série $\sum a_n$ diverge.

A demonstração deste teste é feita da mesma maneira como a prova com limites usuais.

Usando o teste de Kummer, podemos obter todos os testes da seção 3, em versões com limites superiores e inferiores. Por exemplo, apresentamos abaixo os testes reformulados de D'Alembert e de Raabe [1, 2, 5].

Teste de D'Alembert com limites superior e inferior. *Seja uma série $\sum a_n$. Assim:*

1) Se $\varliminf\limits_{n\to\infty} D_n > 1$, então a série $\sum a_n$ converge;

2) Se $\varlimsup\limits_{n\to\infty} D_n < 1$, então $\sum a_n$ diverge.

Teste de Raabe com limites superior e inferior. *Consideremos uma série $\sum a_n$. Logo:*

1) Se $\varliminf\limits_{n\to\infty} R_n > 1$, então a série $\sum a_n$ converge;

2) Se $\varlimsup\limits_{n\to\infty} R_n < 1$, então $\sum a_n$ diverge.

A seguir apresentamos cinco exemplos de séries para as quais os testes com limites usuais não funcionam, enquanto que é possível obter conclusões a partir dos testes de D'Alembert e de Raabe na forma com limites superior e inferior.

Exemplo 1. Verificar o comportamento da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(3+2(-1)^n)}{3^{n+(-1)^n}}$.

Observando que $a_{2n} = \frac{20n^2}{3^{2n+1}}$ e $a_{2n+1} = \frac{(2n+1)^2}{3^{2n}}$, chegamos à conclusão que $\varliminf\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} D_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = \frac{5}{3}$ e $\varlimsup\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} D_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{27}{5}$. O teste de D'Alembert com limites usuais não funciona neste caso, já que $\lim\limits_{n\to\infty} D_n$ não existe. Porém, como $\varliminf\limits_{n\to\infty} D_n = \frac{5}{3} > 1$, concluímos que a série converge através deste teste na forma com limites superior e inferior.

Exemplo 2. Analisar a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}\left(5 + sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$.

Notamos que:

$$a_{4n} = \frac{5 \cdot 4n}{3^{4n}}, a_{4n+1} = \frac{6 \cdot (4n+1)}{3^{4n+1}}, a_{4n+2} = \frac{5 \cdot (4n+2)}{3^{4n+2}}, a_{4n+3} = \frac{4 \cdot (4n+3)}{3^{4n+3}}.$$

Assim:

$$D_{4n} = \frac{a_{4n}}{a_{4n+1}} = \frac{5 \cdot 4n \cdot 3^{4n+1}}{3^{4n} \cdot 6 \cdot (4n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{5}{2};$$

$$D_{4n+1} = \frac{a_{4n+1}}{a_{4n+2}} = \frac{6 \cdot (4n+1) \cdot 3^{4n+2}}{3^{4n+1} \cdot 5 \cdot (4n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{18}{5};$$

$$D_{4n+2} = \frac{a_{4n+2}}{a_{4n+3}} = \frac{5 \cdot (4n+2) \cdot 3^{4n+3}}{3^{4n+2} \cdot 4 \cdot (4n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{15}{4};$$

$$D_{4n+3} = \frac{a_{4n+3}}{a_{4n+4}} = \frac{4 \cdot (4n+3) \cdot 3^{4n+4}}{3^{4n+3} \cdot 5 \cdot (4n+4)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{12}{5}.$$

Logo, obtemos que $\varliminf\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{4n+3}}{a_{4n+4}} = \frac{12}{5} > 1$ e $\varlimsup\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{4n+2}}{a_{4n+3}} = \frac{15}{4}$, onde o primeiro limite mostra que a série dada converge.

Exemplo 3. Determinar o comportamento da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(5n+(-1)^n)^2}$.

Consideramos D_n e R_n dados pelas expressões (1) e (2) respectivamente. Observamos que $a_{2n} = \frac{1}{(10n+1)^2}$ e $a_{2n+1} = \frac{1}{(10n+4)^2}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} D_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} D_{2n-1} = 1$, o teste de D'Alembert é inconclusivo. No entanto, podemos determinar a convergência através do teste de Raabe na forma com limites superior e inferior:

$$\varliminf_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R_{2n} = \lim_{n\to\infty} 2n(D_{2n}-1) = \lim_{n\to\infty} 2n\left(\frac{(10n+4)^2}{(10n+1)^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{30n\,(4n+1)}{(10n+1)^2} = \frac{6}{5};$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left((2n-1) \cdot (D_{2n-1} - 1)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2n-1) \cdot \left(\frac{(10n+1)^2}{(10n-6)^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{35 \cdot (2n-1) \cdot (4n-1)}{(10n-6)^2} = \frac{14}{5}.$$

Como $\varliminf\limits_{n\to\infty} R_n = \frac{6}{5} > 1$, concluímos que a série dada converge.

Exemplo 4. Estudar a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(5n + sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^{-2}$.

Notamos que $a_{4n} = \frac{1}{(20n)^2}$, $a_{4n+1} = \frac{1}{(20n+6)^2}$, $a_{4n+2} = \frac{1}{(20n+10)^2}$ e $a_{4n+3} = \frac{1}{(20n+14)^2}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} D_{4n} = \lim\limits_{n\to\infty} D_{4n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} D_{4n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} D_{4n+3} = 1$, o teste de D'Alembert não funciona. No entanto, é possível verificar o comportamento da série usando o teste de Raabe com limites superior e inferior. De fato:

$$\lim_{n\to\infty} R_{4n} = \lim_{n\to\infty} 4n\,(D_{4n} - 1) = \lim_{n\to\infty} 4n \cdot \left(\frac{(20n+6)^2}{(20n)^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{48n\,(20n+3)}{(20n)^2} = \frac{12}{5};$$

$$\lim_{n\to\infty} R_{4n+1} = \lim_{n\to\infty} ((4n+1)\cdot(D_{4n+1}-1)) = \lim_{n\to\infty} \frac{32\,(4n+1)\cdot(5n+2)}{(20n+6)^2} = \frac{8}{5};$$

$$\lim_{n\to\infty} R_{4n+2} = \lim_{n\to\infty} ((4n+2)\cdot(D_{4n+2}-1)) = \lim_{n\to\infty} \frac{32\,(4n+2)\cdot(5n+3)}{(20n+10)^2} = \frac{8}{5};$$

$$\lim_{n\to\infty} R_{4n+3} = \lim_{n\to\infty} ((4n+3)\cdot(D_{4n+3}-1)) = \lim_{n\to\infty} \frac{4\,(4n+3)\cdot(60n+51))}{(20n+14)^2} = \frac{12}{5}.$$

Portanto, $\varliminf\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} R_{4n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} R_{4n+2} = \frac{8}{5}$ e $\varlimsup\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} R_{4n} = \lim\limits_{n\to\infty} R_{4n+3} = \frac{12}{5}$. Como $\varliminf\limits_{n\to\infty} R_n = \frac{8}{5} > 1$, obtemos a convergência da série dada pelo teste de Raabe.

Exemplo 5. Verificar o comportamento da série$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{7n+2\cdot(-1)^n}}$.

Notamos que $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{14n+2}}$ e $a_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{14n+5}}$. O teste de D'Alembert não é aplicável, pois $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} D_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} D_{2n-1} = 1$. Usamos o teste de Raabe na forma com limites superior e inferior:

$$\varliminf_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R_{2n} = \lim_{n\to\infty} 2n\left(\frac{(14n+5)^{\frac{1}{2}}}{(14n+2)^{\frac{1}{2}}} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{(14n+2)^{\frac{1}{2}}}\left[(14n+5)^{\frac{1}{2}} + (14n+2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

$$= \frac{3}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{7n}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\left(1+\frac{5}{14n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1+\frac{1}{7n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} = \frac{3}{14};$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (2n-1)\cdot\left(\frac{(14n)^{\frac{1}{2}}}{(14n-9)^{\frac{1}{2}}} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9\cdot(2n-1)}{(14n-9)^{\frac{1}{2}}}\left[(14n)^{\frac{1}{2}} + (14n-9)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9\cdot(2n-1)}{14n}\cdot\left(1-\frac{9}{14n}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[1+\left(1-\frac{9}{14n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} = \frac{9}{14}.$$

Logo, como $\varlimsup\limits_{n\to\infty} R_n = \frac{9}{14} < 1$, obtemos a divergência.

Observação. Os cinco exemplos apresentados servem para mostrar que, quando os testes da seção 3 com limites usuais não podem ser aplicados, as suas formas mais gerais com limites superiores e inferiores podem ser conclusivas a respeito da convergência ou divergência das séries dadas.

No entanto, existem situações onde os testes com limites superiores e inferiores não são suficientes para analisar a convergência ou divergência de uma série, isto é, a hierarquia apresentada nem sempre se aplica. Este ponto será tratado na próxima seção.

6. Restrições na aplicação da hierarquia de Kummer

Como foi dito, embora bastante refinados, os testes apresentados na seção 3 não funcionam em qualquer situação. Mesmo em suas formas mais gerais, com limites superiores e inferiores, estes testes nem sempre se mostram eficientes. Em primeiro lugar, o teste de Kummer não apresenta resposta quando $K = 0$, fazendo com que a hierarquia construída com $d_n = 1$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n \ln n}$, e assim por diante, carregue esta imperfeição.

Existe ainda outro caso quando é possível mostrar que estes testes não são aplicáveis, o que pode ser visto na seguinte proposição [2].

Proposição. *Se* $\overline{\lim_{n\to\infty}} D_n = G > 1 > g = \underline{\lim_{n\to\infty}} D_n$, *com* D_n *dado por (1), então a categoria de testes baseados no teste de Kummer, que seguem a lógica de construção dos testes apresentados, isto é, com* $d_n = 1$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n \ln n}$, *e assim por diante, não apresentará respostas.*

Prova

Tomamos D_n, R_n e B_n dados pelas expressões (1), (2) e (3). Diretamente notamos que o teste de D'Alembert é inconclusivo.

Consideramos o teste de Raabe. Se $\overline{\lim_{n\to\infty}} D_n = G > 1 > g = \underline{\lim_{n\to\infty}} D_n$, escolhemos P e p tais que $G > P > 1 > p > g$. Assim, por um lado, $D_n > P$, para uma sequência de valores de n, e para estes, $R_n > n \cdot (P - 1)$, resultando em

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} R_n = +\infty. \tag{7}$$

Por outro lado, $D_n < p$, para uma segunda sequência de valores, e nesta $R_n < n \cdot (p - 1)$, de onde segue que

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} R_n = -\infty. \tag{8}$$

De (7) e (8) concluímos que o teste de Raabe não funciona.

Passamos ao teste de Bertrand. Já foi mencionado na seção 3 (veja Corolário 3) que $K_n = B_n - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, se considerar $d_n = \frac{1}{n \ln n}$. Assim, utilizando o teste de Bertrand com limites superior e inferior, temos:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} K_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} B_n - \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underline{\lim_{n\to\infty}} \ln n \cdot (n \cdot (D_n - 1) - 1) - 1 = -\infty.$$

Tal valor é obtido porque $\underline{\lim_{n\to\infty}} D_n = g < 1$; logo, $\underline{\lim_{n\to\infty}} (D_n - 1) = g - 1 < 0$, implicando em $\underline{\lim_{n\to\infty}} B_n = -\infty$. De modo análogo, obtemos que $\overline{\lim_{n\to\infty}} K_n = +\infty$. Portanto, concluímos que o teste de Bertrand não gera resposta.

A análise dos testes dados nos Teoremas 1 e 2, escolhendo d_n da forma $d_n = (n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n)^{-1}$, $(n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n \cdot \ln \ln \ln n)^{-1}$ e, em outros testes que podem ser construídos com $d_n = (n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n \cdot \ln \ln \ln n \cdot \ln \ln \ln \ln n)^{-1}$ e assim por diante, pode ser demonstrada similarmente. E isto ocorrerá com toda a hierarquia de

Kummer, ou seja, nos testes onde a razão dada por D_n aparece desta maneira sistemática.

Observação. A proposição fala a respeito de uma restrição relacionada à razão D_n, mas é importante notar que, se as outras expressões como R_n, B_n, A_n e assim sucessivamente, conservarem esta restrição da proposição, isto é, se $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, R_n = G > 1 > g = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, R_n$ ou $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, B_n = G > 1 > g = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, B_n$ ou $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n = G > 1 > g = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n$, estas farão com que os próximos testes da hierarquia não funcionem. Por exemplo, se $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, B_n = G > 1 > g = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, B_n$, os critérios mais gerais aos de Bertrand serão inconclusivos, apresentando seus limites inferiores menores que 1, e os superiores maiores que 1; mas para que isto ocorra, logicamente, os casos particulares deste (de D'Alembert e de Raabe), também não funcionarão, apresentando seus limites inferiores iguais a 1, o mesmo ocorrendo com os limites superiores.

Os seguintes exemplos servirão para ilustrar a última proposição.

Exemplo 1. Analisar a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n}$.

Observamos que $a_{2n} = 2^{1-2n}$ e $a_{2n+1} = 2^{-2-2n}$. Portanto:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, D_n = \lim_{n\to\infty} D_{2n} = 8 > 1 > \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} D_{2n-1} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, D_n$$

e assim o teste de D'Alembert é inconclusivo. O teste de Raabe também não funciona, já que:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, R_n = \lim_{n\to\infty} R_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left((2n-1)\cdot(D_{2n-1}-1)\right) = -\infty,$$

pois $(D_{2n-1}-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{2} < 0$;

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, R_n = \lim_{n\to\infty} R_{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(2n\cdot(D_{2n}-1)\right) = +\infty,$$

porque $(D_{2n}-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 7 > 0$.

Pode-se ainda analisar para todos outros testes oriundos do teste de Kummer e notar que eles não trarão respostas, justamente por que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, D_n = G > 1 > g = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, D_n$, o que era de se esperar pelo que foi demonstrado na última proposição.

Porém, é fácil obter a convergência da série usando o teorema de comparação, pois $a_n = \frac{1}{2^{n-(-1)^n}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ converge (série geométrica de razão menor que 1).

Exemplo 2. Verificar o comportamento da série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-(-1)^n}$.

Analogamente ao exemplo anterior, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, D_n = \lim\limits_{n\to\infty} D_{2n} = \frac{1}{8} < 1 < 2 = \lim\limits_{n\to\infty} D_{2n-1} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, D_n$, indicando que o teste de D'Alembert não é conclusivo. E o teste de Raabe também, visto que:

$$\varliminf_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R_{2n} = \lim_{n\to\infty} 2n\,(D_{2n}-1) = -\infty,$$

pois $(D_{2n}-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{7}{8} < 0$;

$$\varlimsup_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} ((2n-1)\cdot(D_{2n-1}-1)) = +\infty,$$

porque $(D_{2n-1}-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 > 0$.

Assim, pode-se ainda analisar para todos outros testes oriundos do teste de Kummer e notar que eles não serão eficientes, usando os mesmos raciocínios.

Entretanto, $a_n = 2^{n-(-1)^n}$ não tende a zero quando n tende a infinito, o que mostra que a série dada diverge.

Exemplo 3. Determinar o comportamento da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-(-1)^n)^2}$.

Como $a_{2n} = \frac{1}{(2n-1)^2}$ e $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)^2}$, podemos observar que:

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} D_{2n} = \lim_{n\to\infty} D_{2n-1} = 1,$$

o que mostra que o teste de D'Alembert não funciona.

Ao mesmo tempo, ao analisar pelo teste de Raabe na forma com limites superior e inferior, temos:

$$\varlimsup_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R_{2n} = \lim_{n\to\infty} 2n\,(D_{2n}-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\cdot(12n+3)}{(2n+1)^2} = 6\ ,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} ((2n-1)\cdot(D_{2n-1}-1)) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)\cdot(1-4n)}{4n^2} = -2.$$

Logo, como $\varlimsup\limits_{n\to\infty} R_n = 6 > 1$ e $\varliminf\limits_{n\to\infty} R_n = -2 < 1$, o teste de Raabe mostra-se inconclusivo.

Porém, como $\frac{1}{(n-(-1)^n)^2} \le \frac{1}{(n-1)^2}$, e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ converge, temos que a série dada também converge pelo teorema de comparação.

Observação. Os exemplos acima mostram que uma categoria muito refinada de testes não funciona, enquanto critérios simples oferecem resultados. E isto acontece pelo simples fato de termos $\varlimsup\limits_{n\to\infty} D_n = G > 1 > g = \varliminf\limits_{n\to\infty} D_n$ (situação que ocorre nos exemplos 1 e 2) ou $\varlimsup\limits_{n\to\infty} R_n = G > 1 > g = \varliminf\limits_{n\to\infty} R_n$ (exemplo 3).

É importante notar que o Teorema de Kummer, embora origine parcela significativa de testes conhecidos e utilizados atualmente, não é o único caminho para formulações sistematizadas de testes refinados. Semelhantemente, critérios podem ser construídos visando generalização de outros testes conhecidos (como por exemplo, o de Cauchy), o que já não faz parte deste trabalho.

Referências

1. D.D. Bonar, M.J. Khoury, Real Infinite Series. MAA, Washington, 2006.
2. T.J.I. Bromwich, An Introduction to the Theory of Infinite Series. AMS, Providence, 2005.
3. G.M. Fichtenholz, Infinite series: Rudiments. Gordon and Breach Pub., New York, 1970.
4. G.M. Fichtenholz, Infinite series: Ramifications. Gordon and Breach Pub., New York, 1970.
5. J.M. Hyslop, Infinite Series. Dover Pub., New York, 2006.
6. V.A. Ilyin, E.G. Poznyak, Fundamentals of Mathematical Analysis, Vol.1, Mir Publishers, Moscow, 1982.
7. K. Knopp, Theory and Application of Infinite Series. Dover Pub., New York, 1990.
8. W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill, New York, 1976.
9. H. Samelson, More on Kummer's Test. American Mathematical Monthly, 102 (1995), 817-818.
10. M. Spivak, Calculus. Publish or Perish, Houston, 1994.
11. J. Tong. Kummer's Test Gives Characterizations for Convergence or Divergence of all Positive Series. American Mathematical Monthly, 101 (1994), 450-452.

Andrei Bourchtein
Departamento de Matemática,
Universidade Federal de Pelotas,
Pelotas – RS– Brasil
E-mail address: andburstein@gmail.com