Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) v. **34** 1 (2016): 99–128.
©SPM –ISSN-2175-1188 ON LINE ISSN-00378712 IN PRESS
SPM: www.spm.uem.br/bspm doi:10.5269/bspm.v34i1.24315

Isometrias no espaço de Minkowski: grupo ortogonal generalizado e grupo de Poincaré

Carlos H. Marques, Leonardo O. Mendes, Marcio F. A. Bortotti, Sidiney B. Montanhano, Josiney A. Souza *

ABSTRACT: O presente artigo estuda os conceitos de grupo ortogonal generalizado, grupo de Lorentz e grupo de Poincaré. Apresenta-se o cenário em que as transformações de Lorentz são empregadas na teoria da relatividade. O objetivo central é descrever em detalhes as principais propriedades matemáticas do grupo ortogonal generalizado, fornecendo um material acessível para estudantes de graduação e mestrado em matemática e física.

Key Words: Grupo de Lie; espaço de Minkowski; grupo de Poincaré; grupo de Lorentz.

Contents

1 Introdução **99**

2 Espaço-tempo de Minkowski **101**

3 Formas bilineares e grupos de Lie **102**
3.1 Formas bilineares . . . 102
3.2 Grupos de Lie de matrizes . . . 104
3.2.1 Grupos compactos e grupos conexos . . . 106

4 Grupo ortogonal generalizado **109**
4.1 Topologia . . . 117
4.2 A álgebra de Lie . . . 120
4.3 Grupo de Poincaré . . . 121
4.4 Grupo de Lorentz . . . 125

1. Introdução

Em Física Clássica, as mudanças de referenciais são dadas pelas transformações de Galileu, que são isometrias no espaço euclidiano tridimensional. Na Teoria da Relatividade Restrita de Einstein, as mudanças de referenciais são dadas pelas transformações de Lorentz, que definem isometrias não-euclidianas. Nesse caso, o espaço é quadridimensional, onde três dimensões espaciais são combinadas com uma dimensão temporal, formando o chamado espaço-tempo de Minkowski. Esse espaço é munido com uma métrica pseudo-Riemanniana, chamada métrica de Lorentz ou

* Este trabalho contou com o apoio financeiro da Fundação Araucária conv. 476/14 - CP 21/2012.
2000 *Mathematics Subject Classification:* 22E43; 22E70.

de Minkowski, de forma que as mudanças de referenciais da Teoria da Relatividade Restrita são isometrias.

A relatividade restrita descreve a física em sistemas inerciais, onde a velocidade de transmissão de interação é finita, diferentemente da relatividade de Galileu, onde esta é infinita. O princípio da relatividade restrita diz que as leis da natureza são idênticas em todos os sistemas inerciais de referência, isto é, são invariantes com relação às transformações de coordenadas espaciais e temporais entre sistemas inerciais. Segue que a velocidade de propagação de interações é uma constante universal c. Essa constante c representa a velocidade da luz no vácuo.

Historicamente, Henri Poincaré [8] observou que, tomando o tempo como a parte imaginária ict das quatro coordenadas do espaço-tempo, uma transformação de Lorentz pode ser considerada como uma rotação em um espaço euclidiano de quatro dimensões, com três coordenadas reais representando o espaço e uma coordenada imaginária representando o tempo. Mas Poincaré não havia interpretado uma tal rotação como uma rotação hiperbólica, como se entende hoje. Foi Hermann Minkowski [5] quem aperfeiçoou as ideias de Poincaré, reformulando a então recente Teoria da Relatividade Restrita de Einstein. Ele concluiu que o tempo e o espaço devem ser tratados igualmente, introduzindo o conceito de eventos que ocorrem em um espaço-tempo quadridimensional unificado. Considerando eixos ortonormais $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, ic\boldsymbol{\tau}$ e tomando (x_0, y_0, z_0, ict_0) como origem ou ponto de referência, pode-se escrever os outros vetores a partir do ponto de refência como

$$(x_0 + x,\ y_0 + y,\ z_0 + z,\ ic\,(t_0 + t))\,,$$

onde (x, y, z, ict) são as coordenadas do vetor translação. No artigo [6], Minkowski apresentou a formulação alternativa desta ideia, não considerando o tempo como a coordenada imaginária, mas representando os eventos em quatro coordenadas de um espaço afim. Surgiu então a concepção atual de um espaço-tempo quadridimensional munido de uma estrutura de variedade pseudo-Riemanniana.

O grupo de simetria do espaço-tempo de Minkowski é o grupo de Poincaré, também chamado de grupo de Lorentz não homogêneo, formado por todas as isometrias desse espaço. O grupo de Lorentz é o subgrupo das isometrias que deixam o ponto de referência fixado. Em linhas gerais, a estrutura do grupo de Poincaré é basicamente compreendida a partir da estrutura do grupo de Lorentz. No presente artigo, mostramos os detalhes matemáticos desse fato, apresentando esses grupos como grupos de Lie de matrizes. Para tanto, estudamos o grupo ortogonal generalizado $\mathrm{O}\,(k; n)$, um grupo de Lie de matrizes relacionado à métrica de Lorentz estendida a um espaço vetorial de dimensão $k + n$. Discutimos a topologia de $\mathrm{O}\,(k; n)$, mostrando que esse grupo não é compacto em geral e que $\mathrm{O}\,(1; n)$ tem exatamente quatro componentes conexas. A componente conexa da identidade de $\mathrm{O}\,(1; 3)$ corresponde ao grupo de Lorentz $\mathrm{SO}\,(1; 3)_0$. Descrevemos também a álgebra de Lie de $\mathrm{O}\,(k; n)$ e mostramos que sua dimensão é $\frac{(n+k)(n+k-1)}{2}$. Em particular, o grupo de Lorentz tem dimensão 6. Como consequência, o grupo de Poincaré tem dimensão 10. Enfim, demonstramos o isomorfismo local entre o grupo de Lorentz e o grupo linear especial complexo $\mathrm{SL}\,(2, \mathbb{C})$.

2. Espaço-tempo de Minkowski

Nesta seção, apresentamos uma breve exposição formal sobre o cenário da teoria da relatividade em que o grupo de Lorentz exerce papel fundamental.

O espaço-tempo de Minkowski é um espaço vetorial quadridimensional equipado com a forma bilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,3}$ definida por

$$\langle x, y\rangle_{1,3} = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

onde $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ são escritos em uma base ortonormal. A componente x_0 do vetor x é chamada de *componente temporal* equanto que as outras três componentes x_1, x_2, x_3 são chamadas de *componentes espaciais*. A forma $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,3}$ é simétrica e não degenerada, com assinatura $(-, +, +, +)$. Devido a isso, o espaço-tempo de Minkowski é usualmente denotado por $\mathbb{R}^{1+3}$ para enfatizar a assinatura (em muitos casos, a assinatura $(+, -, -, -)$ é adotada). Embora seja muitas vezes chamada de *produto interno de Minkowski*, a forma $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,3}$ não se trata de um produto interno, pois é indefinida. Entretanto, essa propriedade permite classificar os vetores de $\mathbb{R}^{1+3}$, chamados de *eventos*, em três tipos distintos:

- O evento x é do *tipo tempo* se $\langle x, x\rangle_{1,3} < 0$;
- O evento x é do *tipo espaço* se $\langle x, x\rangle_{1,3} > 0$;
- O evento x é do *tipo luz* se $\langle x, x\rangle_{1,3} = 0$.

Os eventos do tipo luz formam o cone $\mathrm{C} = \left\{x \in \mathbb{R}^{1+3} : x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right\}$, chamado *cone de luz*. Os vetores de C são também chamados de *vetores nulos*. Os eventos do tipo tempo formam o interior do cone enquanto que os eventos do tipo espaço formam o exterior do cone. Os vetores do tipo tempo ou do tipo luz com componente temporal positiva são ditos *dirigidos ao futuro* enquanto que os vetores do tipo tempo ou do tipo luz com componente temporal negativa são ditos *dirigidos ao passado*. Esses conceitos dão origem às relações de causalidade no espaço-tempo de Minkowski: o evento x *precede cronologicamente* o evento y se $y-x$ é um vetor do tipo tempo dirigido ao futuro; x *precede causalmente* y se $y-x$ é um vetor do tipo luz ou do tipo tempo dirigido ao futuro.

Geometricamente falando, a forma $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,3}$ define uma métrica pseudo-Riemanniana, chamada métrica de Lorentz ou de Minkowski [1, p. 65]. Essa métrica estabelece o conceito de ortogonalidade hiperbólica em $\mathbb{R}^{1+3}$. Dois vetores x e y são *ortogonais* se $\langle x, y\rangle_{1,3} = 0$. Se x e y são ortogonais e y é a projeção de x através do cone de luz, então x e y definem *eventos ortogonais hiperbólicos*. Dado um vetor $x \in \mathbb{R}^{1+3}$ do tipo tempo, o conjunto $x^{\perp} = \left\{y \in \mathbb{R}^{1+3} : \langle x, y\rangle_{1,3} = 0\right\}$ é chamado de *hiperplano simultâneo* com respeito a x. O vetor x é ortogonal hiperbólico com qualquer vetor do hiperplano simultâneo com respeito a x.

A partir da forma $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,3}$, define-se também a *norma de Minkowski* $\|\cdot\|_{1,3}$ e a *distância de Minkowski* $\mathrm{d}_{1,3}$ dadas por

$$\|x\|_{1,3} = \sqrt{\left|\langle x, x\rangle_{1,3}\right|} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}_{1,3}(x, y) = \|x - y\|_{1,3}$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^{1+3}$. É claro que se trata de um abuso de linguagem, pois $\|\cdot\|_{1,3}$ não é uma norma e $\mathrm{d}_{1,3}$ não é uma distância, uma vez que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,3}$ é uma forma indefinida (implicando que $\|\cdot\|_{1,3}$ não é subaditiva). No entanto, a norma e a distância de Minkowski definem uma generalização ideal das noções de comprimento e de distância entre eventos no espaço de Minkowski, fundamentando o conceito de isometria em $\mathbb{R}^{1+3}$.

O grupo de simetria do espaço-tempo de Minkowski é representado pelo grupo de Poincaré. Esse grupo é formado por todas as isometrias de $\mathbb{R}^{1+3}$, incluindo rotações, translações e os *boosts*. As transformações de Lorentz formam um subgrupo chamado grupo de Lorentz, que consiste das isometrias que deixam a origem de $\mathbb{R}^{1+3}$ fixada, o que inclui as rotações e os *boosts*. Um *boost* é uma transformação linear de $\mathbb{R}^{1+3}$ cuja matriz é da forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ é chamado de fator de Lorentz, $v \ll c$ é a velocidade relativa da mudança de referencial e $\beta = \dfrac{v}{c}$. Em coordenadas, tem-se

$$\Lambda\left(x, y, z, t\right) = \left(\gamma\left(x - vt\right), y, z, \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\right).$$

Para cada elemento A do grupo de Lorentz existe um *boost* Λ e duas rotações R_1 e R_2 tais que $A = R_1 \Lambda R_2$ (ver [7]). Uma das interpretações físicas do conceito de *boost* no espaço-tempo de Minkowski pode ser dada em termos da *Relatividade da Simultaneidade*, uma consequência do princípio da relatividade restrita, segundo a qual dois eventos que são simultâneos em um referencial não são simultâneos em outro referencial que esteja se movendo em relação ao primeiro.

3. Formas bilineares e grupos de Lie

Apresentamos agora as definições e os resultados básicos sobre formas bilineares e grupos de Lie de matrizes que são utilizados no artigo.

3.1. Formas bilineares

Primeiramente, selecionamos algumas das principais propriedades de formas bilineares sobre espaços vetoriais reais de dimensão finita. Pautamos os resultados no livro [2].

Definição 3.1. *Seja V um espaço vetorial real. Uma* ***forma bilinear*** *sobre V é uma função $f : V \times V \to \mathbb{R}$ que é linear em cada uma das variáveis. A forma bilinear f é dita* ***simétrica*** *se $f(u, v) = f(v, u)$ para todos $u, v \in V$.*

Denotamos por $\mathrm{B}(V, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as formas bilineares sobre V. Munido com as operações de soma de funções e de multiplicação por escalar, $\mathrm{B}(V, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial real.

Toda forma bilinear sobre um espaço de dimensão n está associada a uma matriz real $n \times n$, conforme a seguinte definição.

Definição 3.2. *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n e $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Para cada $f \in \mathrm{B}(V, \mathbb{R})$, a **matriz de** f na base $\mathcal{B}$ é definida por*

$$[f]_{\mathcal{B}} = (f(v_i, v_j))_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

A correspondência $f \in \mathrm{B}(V, \mathbb{R}) \to [f]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é um isomorfismo linear entre os espaços vetoriais $\mathrm{B}(V, \mathbb{R})$ e $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. A principal importância desta correspondência é que podemos representar a forma bilinear f pela sua matriz $[f]_{\mathcal{B}}$ usando a fórmula

$$f(u, v) = [u]_{\mathcal{B}}^t [f]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}$$

onde $[v]_{\mathcal{B}}$ denota a matriz coluna formada pelas coordenadas do vetor v na base $\mathcal{B}$ e $[u]_{\mathcal{B}}^t$ denota a transposta de $[u]_{\mathcal{B}}$, ou seja, a matriz linha das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$. Se $\mathcal{B}'$ é outra base de V e M é a matriz de mudança de bases de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$, então

$$[f]_{\mathcal{B}'} = M^t [f]_{\mathcal{B}} M.$$

Estamos interessados principalmente em dois tipos específicos de formas bilineares: as simétricas e as não degeneradas.

Definição 3.3. *Uma forma bilinear $f \in \mathrm{B}(V, \mathbb{R})$ é dita **simétrica** se $f(u, v) = f(v, u)$ para todos $u, v \in V$.*

Em termos da representação matricial, uma forma bilinear $f \in \mathrm{B}(V, \mathbb{R})$ é simétrica se e somente se sua matriz $[f]_{\mathcal{B}}$ é simétrica em qualquer base $\mathcal{B}$ de V.

Definição 3.4. *Uma forma bilinear $f \in \mathrm{B}(V, \mathbb{R})$ é dita **degenerada** se existe um elemento não nulo $v \in V$ que satisfaz $f(v, u) = 0$ para todo $u \in V$.*

Uma forma bilinear $f \in \mathrm{B}(V, \mathbb{R})$ é degenerada se e somente se $\det [f]_{\mathcal{B}} = 0$ para qualquer base $\mathcal{B}$ de V.

Observação 3.1. *Um produto interno sobre um espaço vetorial real V é uma forma bilinear simétrica que é positiva definida, ou seja, $f(u, u) > 0$ sempre que $u \neq 0$. Portanto, um produto interno é uma forma bilinear simétrica e não degenerada.*

Se $f \in \mathrm{B}(V, \mathbb{R})$ é simétrica, então existe uma base $\mathcal{B}$ de V tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal. Se, além disso, f é não degenerada, então as entradas na diagonal de $[f]_{\mathcal{B}}$ são todas não nulas. Nesse caso, normalizando os vetores da base, pode-se considerar $[f]_{\mathcal{B}}$ como uma matriz com entradas ± 1 na diagonal. Faremos a demonstração de uma versão mais específica desse resultado na Seção 4.

A **forma quadrática** de uma forma bilinear $f \in \mathrm{B}(V, \mathbb{R})$ é a função $q : V \to \mathbb{R}$ dada por $q(v) = f(v, v)$. Se f é simétrica, então existem $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ e uma base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de V tal que $f(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n$ e

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$$

para cada vetor $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ em V. No caso específico de um produto interno, $q(v) > 0$ sempre que v é não nulo.

Para finalizar sobre as propriedades de formas bilineares, existe uma correspondência biunívoca entre as formas bilineares simétricas e os operadores auto-adjuntos, obtida pela seguinte relação:

$$f(u, v) = \langle T(u), v \rangle, \quad u, v \in V,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em V, f é uma forma bilinear simétrica sobre V e T é um operador linear auto-adjunto de V.

3.2. Grupos de Lie de matrizes

Definimos agora os conceitos que envolvem os grupos de Lie de matrizes com entradas reais. Referimos ao livro [4] para noções de topologia em espaços métricos e ao livro [3] para a teoria de grupos de Lie de matrizes.

Denotamos por $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Então, $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é isomorfo ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$. Seja $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ o subconjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis. Munido com a operação de multiplicação de matrizes, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ possui a estrutura algébrica de um grupo, uma vez que o produto de duas matrizes invertíveis é uma matriz invertível, a matriz identidade é o elemento neutro, uma matriz invertível possui uma inversa e a multiplicação de matrizes é uma operação associativa. Esse grupo é chamado de **grupo linear geral**.

Assumimos $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ com a topologia relativa de $\mathbb{R}^{n^2}$. Dessa forma, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ é um espaço métrico com a métrica usual de $\mathbb{R}^{n^2}$. Uma sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrizes em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ converge para uma matriz $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ se cada entrada de A_n converge para a correspondente entrada de A. Um subconjunto $X \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ é dito **fechado** em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ se toda matriz invetível A que é limite de uma sequência em X pertence a X. Um subconjunto $Y \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ é dito **aberto** em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ se seu conjunto complementar $X = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \setminus Y$ é fechado em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Isto significa que, se Y é aberto e $A \in Y$, então existe um número positivo ϵ tal que a bola $B(A, \epsilon)$ está contida em Y.

Definição 3.5. *Um **grupo de Lie de matrizes** é qualquer subgrupo fechado de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Como $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ é fechado em si mesmo, então o grupo linear geral é um grupo de Lie de matrizes. Denote por $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ o subconjunto de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ constituido das matrizes de determinante 1. Usando a fato de que o determinante de duas matrizes equivale ao produto dos determinantes desses matrizes, é fácil verificar que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ é um subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Além disso, se uma sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ converge para uma matriz invetível A, segue pela continuidade do determinante que

$$\det A = \det \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \det A_n = 1.$$

Logo, $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ e, portanto, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie de matrizes. Esse grupo é chamado de **grupo linear especial**.

Agora, consideremos o subconjunto $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ das matrizes que preservam o produto interno usual de $\mathbb{R}^{n^2}$, ou seja, $A \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ se $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^{n^2}$. Então, $A \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ se e somente se os vetores coluna de A são ortogonais e unitários (ornotormais). Uma matriz que satisfaz essa propriedade é chamada de matriz ortogonal. Outra caracterização diz que $A \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ se e somente se $A^tA = I$. Isto implica que $(\det A)^2 = 1$ e, portanto, $\det A = \pm 1$. Não é difícel ver que o produto de duas matrizes ortogonais é ortogonal, que matriz identidade é ortogonal e que a inversa de uma matriz ortogonal também é ortogonal. Logo, $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ é um subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Além disso, se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ que converge para uma matriz invertível A, segue da continuidade do pruduto e da transposição de matrizes que

$$A^tA = \lim_{n\to\infty} A_n^t \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n^t A_n = I.$$

Logo, $A \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ e, portanto, $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie de matrizes. Este grupo é chamado de **grupo ortogonal**.

O subconjunto $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ das matrizes ortogonais com determinate 1 é claramente um subgrupo de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Visto que a propriedade de ter determinane 1 é preservada por limites, segue que $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie de matrizes. É fácil ver que $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Este grupo é chamado de **grupo ortogonal especial**.

Na sequência, definimos a aplicação exponencial de matrizes.

Definição 3.6. *Seja X uma matriz $n\times n$ com entradas reais. Define-se a* ***exponencial*** *de X, denotada por e^X ou $\exp X$, a matriz dada pela série de potências*

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \ldots.$$

A série de potências acima converge, pois cada entrada $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{X^m}{m!}\right)_{i,j}$ é uma série numérica convergente. Dessa forma, a exponencial de matrizes possui as seguintes propriedades fundamentais:

1. $e^{\mathrm{diag}\{a_1,\ldots,a_n\}} = \mathrm{diag}\{e^{a_1},\ldots,e^{a_n}\}$.
2. $e^{X+Y} = e^Xe^Y$ sempre que $XY = YX$.

3. $\det e^X = e^{\operatorname{tr} X}$.
4. $\dfrac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX}$.

Além disso, como $I = e^0 = e^{X-X} = e^X e^{-X}$, segue que e^X é inversível e sua inversa é e^{-X}. Mais ainda, existe uma vizinhança da matriz nula 0 onde a exponencial é um homeomorfismo e sua inversa é dada pelo logarítmo de matrizes, conforme a próxima definição.

Definição 3.7. *Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas reais. Define-se o **logarítmo** de A, denotado por $\log A$, a série de potências*

$$\log A = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(A-I)^m}{m} = (A-I) - \frac{(A-I)^2}{2} + \frac{(A-I)^3}{3} - \frac{(A-I)^4}{4} + \ldots.$$

A série de potências de $\log A$ converge para toda matriz A em uma vizinhança da identidade I em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Dessa forma, existem vizinhanças V e U de 0 em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e de I em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, respectivamente, tais que $e : V \to U$ e $\log : U \to V$ são homeomorfismos.

As informações sobre o grupo de Lie de matrizes podem ser obtidas a partir de sua álgebra de Lie.

Definição 3.8. *Seja G um grupo de Lie de matrizes. A **álgebra de Lie** de G, denotada por $\mathfrak{g}$, é o conjunto das matrizes X tais que $e^{tX} \in G$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie de matrizes G pode ser identificada com o espaço vetorial dos vetores tangentes à identidade I, ou seja, $X \in \mathfrak{g}$ se e somente se $X = \dfrac{d}{dt}\gamma(t) \mid_{t=0}$ onde $\gamma(t)$ é uma curva diferenciável em G com $\gamma(0) = I$. Por exemplo, a álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ é $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$; a de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ é o espaço $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ das matrizes de traço 0; a de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ é o espaço $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ das matrizes antisimétricas ($X^t + X = 0$). A álgebra de Lie de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ também é $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$.

Define-se a dimensão de um grupo de Lie de matrizes como a dimensão de sua álgebra. Assim, a dimensão de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ é n^2; de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ é $n^2 - n$; a de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ é $\dfrac{n^2 - n}{2}$.

Todos estes conceitos e propriedades possuem seus correspondentes no caso de grupo de matrizes com entradas complexas, entre os quais os principais são $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$.

3.2.1. Grupos compactos e grupos conexos. As questões topológicas mais comuns nos estudos de grupos de Lie de matrizes envolvem os conceitos de compacidade e conexidade.

Definição 3.9. *Um grupo de Lie de matrizes G é dito **compacto** se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de matrizes em G e $A_n \to A$, então $A \in G$.*

2. Existe uma constante C tal que $|A_{i,j}| \leq C$ para toda matriz $A = (A_{i,j})$ de G.

Por exemplo, os grupos $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ são compactos pois limite de matrizes ortogonais é ortogonal, limite de matrizes com determinante 1 tem determinate 1 e, além disso, os vetores coluna de uma matriz ortogonal A possuem norma 1, o que implica $|A_{i,j}| \leq 1$. Para $n \geq 2$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ não é compacto, pois as matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha & & & & \\ & \frac{1}{\alpha} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0,$$

tem determinante 1 qualquer que seja o valor de α.

Definição 3.10. *Um grupo de Lie de matrizes G é dito* ***conexo*** *(por caminhos) se dadas quaisquer matrizes $g, h \in G$, existe um caminho contínuo $\gamma : [a, b] \to G$ tal que $\gamma(a) = g$ e $\gamma(b) = h$. Um subconjunto S de G é dito conexo se este é conexo como subespaço de G.*

Em geral, podemos definir a seguinte relação de equivalência em um grupo de Lie de matrizes G:

$$g \sim h \text{ se existe um caminho contínuo que liga } g \text{ a } h.$$

As classes de equivalência dessa relação são chamadas **componentes conexas** de G. Uma componente conexa de G é um conjunto conexo que não está contido propriamente em outro conjunto conexo. Visto que o fecho de um conjunto conexo é conexo, segue que as componentes conexas de G são conjuntos fechados.

Na verdade, um grupo de Lie de matrizes G também é localmente conexo por caminhos, o que significa que para todo $g \in G$ e toda vizinhança V de g existe uma vizinhança conexa por caminhos U de x tal que $x \in U \subset V$. Essa propriedade dos grupos de Lie de matrizes é facilmente verificada por meio da aplicação exponencial, visto que álgebra de Lie de G é um espaço vetorial, portanto, localmente conexo por caminhos.

Outra forma de definir conexidade é por meio do conceito de cisão. Uma cisão de um espaço topológico S é uma decomposição $S = X \cup Y$ de S como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos X e Y. Consequentemente, em uma cisão $S = X \cup Y$, os conjuntos X e Y são abertos e fechados em S. O espaço S é conexo se a única cisão possível é a trivial, ou seja, $S = S \cup \varnothing$. Isto significa que os únicos subconjuntos que são abertos e fechados em um espaço conexo são os triviais. Uma componente conexa de S é um conjunto conexo que não está contido propriamente em outro conjunto conexo. No caso de um grupo de Lie de matrizes, os conceitos de conexidade e conexidade por caminhos são equivalentes, visto que os grupos de Lie de matrizes são localmente conexos por caminhos (ver [4, Proposição 12] para o caso geral de espaços métricos).

Proposição 3.11. *Seja G um grupo de Lie de matrizes. A componente conexa da identidade de G é um subgrupo de Lie de G.*

Demonstração: Seja G_0 a componente conexa da identidade I de G. Se $g, h \in G_0$, então existem caminhos contínuos $g(t)$ e $h(t)$ que ligam I respectivamente a g e h. Pela continuidade das operações de produto e inversão, segue que o produto $gh^{-1}(t) = g(t)\, h(t)^{-1}$ é um caminho contínuo que liga I a gh^{-1}. Logo, $gh^{-1} \in G_0$ e, portanto, G_0 é um subgrupo de G. Visto que componente conexas são conjuntos fechados, segue que G_0 é um grupo de Lie de matrizes. □

Seja H um subgrupo de um grupo de Lie de matrizes G e seja $\pi : G \to G/H$ a projeção sobre o espaço quociente G/H. Lembramos que o espaço G/H é o espaço das classes laterais gH $(g \in G)$ munido com a topologia quociente: $U \subset G/H$ é aberto em G/H se e somente se $\pi^{-1}(U)$ é aberto em G. Cada classe lateral gH é homeomorfa a H e a projeção π é uma aplicação aberta.

Proposição 3.12. *Seja H um subgrupo conexo de um grupo de Lie de matrizes G. Se G/H possui n componentes conexas, então G possui n componentes conexas.*

Demonstração: Seja C uma componente conexa de G/H e considere $S = \pi^{-1}(C)$. Afirmamos que S é uma componente conexa de G. Primeiro, mostramos que S é conexo. De fato, suponha por absurdo que $S = X \cup Y$ é uma reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos X e Y da topologia relativa em S. Então, existem abertos U e V de G tais que $X = S \cap U$ e $Y = S \cap V$. Assim,

$$\begin{aligned} C &= \pi(S) = \pi(S \cap U) \cup \pi(S \cap V) \subset \\ &\subset \{C \cap \pi(U)\} \cup \{C \cap \pi(V)\} \subset C \end{aligned}$$

de onde segue que $C = \{C \cap \pi(U)\} \cup \{C \cap \pi(V)\}$, com $\pi(U)$ e $\pi(V)$ abertos em G/H. Como C é conexo, temos que $\{C \cap \pi(U)\} \cap \{C \cap \pi(V)\} \neq \varnothing$. Logo, existe $g \in S$ tal que $\pi(g) \in C \cap \pi(U) \cap \pi(V)$. Isto significa que

$$gH = gH \cap S = (U \cap gH) \cup (V \cap gH)$$

com $U \cap gH$ e $U \cap gH$ abertos disjuntos não vazios de gH, contradizendo o fato de H ser conexo, visto que H é homeomorfo a gH. Portanto, S é conexo. Agora, suponha que $S \subset S'$ com S' conexo. Então, $\pi(S') \subset G/H$ é conexo e $C \subset \pi(S')$. Como C é componente conexa, segue que $C = \pi(S')$. Logo, $S' \subset \pi^{-1}(C) = S$ e, portanto, $S = S'$. Isto significa que S é uma componente conexa de G. Para concluir, visto que componentes conexas são conjuntos disjuntos, segue que G tem n componentes conexas se G/H tem n componentes conexas. □

Outro resultado interessante sobre as componentes conexas é que elas são conjuntos abertos e fechados. Para ver isso, precisamos do seguinte resultado.

Proposição 3.13. *Seja H um subgrupo de um grupo de Lie de matrizes G.*

1. *Se H tem interior não vazio, então H é aberto.*

2. Se H é aberto, então H é fechado.

Demonstração: 1. Suponha que $\operatorname{int}(H) \neq \emptyset$ e tome $h \in \operatorname{int}(H)$. Por continuidade, temos que $1 = h^{-1}h \in \operatorname{int}\left(h^{-1}H\right) = \operatorname{int}(H)$. Assim, dado qualquer outro $g \in H$, temos que $g \in \operatorname{int}(H)\, g = \operatorname{int}(H)$. Logo, $\operatorname{int}(H) = H$ e, portanto, H é aberto.

2. Se H é aberto, então Hg é aberto para todo $g \in G$. Como $G = \bigcup_{g \in G} Hg$, segue que o complementar de H em G é um conjunto aberto e, portanto, H é fechado. □

Visto que um grupo de Lie de matrizes G é localmente conexo por caminhos, existe uma vizinhança V da identidade que é conexa. Logo, V está contida na componente conexa da identidade H_0. Isto significa que H_0 tem interior não vazio, de onde segue pela Proposição 3.13 que H_0 é aberta e fechada. Como as componentes conexas de G são da forma gH_0, segue que toda componente conexa de G é um conjunto aberto e fechado.

Finalmente, temos a seguinte caracterização dos grupos de Lie de matrizes conexos.

Teorema 3.14. *Seja G um grupo de Lie de matrizes conexo e seja $U \subset G$ uma vizinhança aberta da identidade de G. Então, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.*

Demonstração: Considere a vizinhança $V = U \cap U^{-1}$ da identidade. Então V é simétrica no sentido de que $V^{-1} = V$. Basta então mostrar que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$. De fato, dados $g, h \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$, temos que $g \in V^n$ e $h \in V^m$ para certos n e m. Assim, $g^{-1} \in V^{-n} = V^n$ e $g^{-1}h \in V^{n+m}$. Isto significa que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ é um subgrupo de G. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ é aberto, segue da Proposição 3.13 que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ é aberto e fechado. Visto que G é conexo, isto só é possível se $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$. □

4. Grupo ortogonal generalizado

Nesta seção estudamos uma versão generalizada do grupo ortogonal visto na seção anterior. O grupo ortogonal generalizado é um grupo de Lie de matrizes que depende de uma forma bilinear simétrica sobre $\mathbb{R}^n$ a qual não se trata de um produto interno. O grupo de Lorentz é um subgrupo de um grupo ortogonal generalizado que age no espaço quadridimensional. Faremos um estudo minucioso para compreendermos as propriedades fundamentais desses grupos. Todos os resultados são baseados no livro [3].

Sejam k e n números inteiros positivos e consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{k+n}$ munido com o produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definimos a função $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n} : \mathbb{R}^{k+n} \times \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}$ pela fórmula

$$\langle x, y \rangle_{k,n} = -x_1y_1 - \cdots - x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1} + \cdots + x_{k+n}y_{k+n}$$

onde $x = (x_1, ..., x_{k+n})$ e $y = (y_1, ..., y_{k+n})$ são coordenadas da base canônica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^{k+n}$. Definimos também a função $\|\cdot\|_{k,n} : \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}$ por

$$\|x\|_{k,n} = \sqrt{\left|\langle x, x\rangle_{k,n}\right|}.$$

O seguinte resultado descreve as propriedades principais da função $\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,n}$.

Proposição 4.1. *A função $\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,n}$ definida acima é uma forma bilinear simétrica não degenerada sobre $\mathbb{R}^{k+n}$. Sua matriz $\left[\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,n}\right]_{\mathcal{C}}$ com respeito à base canônica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^{k+n}$ é*

$$\left[\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,n}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

onde 0 é o bloco nulo e I_m é o bloco matriz identidade de ordem m.

Demonstração: Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^{k+n}$ e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \langle ax + z, y\rangle_{k,n} &= -a\sum_{j=1}^{k} x_j y_j + a\sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j - \sum_{j=1}^{k} z_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} z_j y_j \\ &= a\left(-\sum_{j=1}^{k} x_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j\right) - \sum_{j=1}^{k} z_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} z_j y_j \\ &= a\langle x, y\rangle_{k,n} + \langle z, y\rangle_{k,n}. \end{aligned}$$

Segue de forma análoga para a segunda entrada. Logo, $\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,n}$ é uma forma bilinear sobre $\mathbb{R}^{k+n}$. Da comutatividade dos números reais segue que

$$\langle x, y\rangle_{k,n} = -\sum_{j=1}^{k} x_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j = -\sum_{j=1}^{k} y_j x_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} y_j x_j = \langle y, x\rangle_{k,n}.$$

Portanto, $\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,n}$ é simétrica. A expressão da matriz $\left[\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,n}\right]_{\mathcal{C}}$ segue diretamente da Definição 3.2. Enfim, $\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,n}$ é não degenerada pois $\det\left[\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,n}\right]_{\mathcal{C}} = \pm 1$. □

O próximo resultado mostra que a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,n}$ não é um produto interno, pois é indefinida e anula vetores não nulos.

Proposição 4.2. *Considere a forma quadrática $q(x) = \langle x, x\rangle_{k,n}$ associada à forma bilinear $\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,n}$. Existem vetores não nulos $x, y, z \in \mathbb{R}^{k+n}$ tais que*

$$q(x) > 0, \quad q(y) = 0, \quad q(z) < 0.$$

Demonstração: Podemos escrever explicitamente $q(x)$ na forma

$$q(x) = \langle x, x\rangle_{k,n} = -\sum_{j=1}^{k} x_j^2 + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j^2.$$

Como se trata de números reais, $x_j^2 \geq 0$ para todo j. Dessa forma,

$$\begin{array}{lllll} \text{se } \sum_{j=1}^{k} x_j^2 & < & \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j^2 & \text{então } q(x) > 0 \ ; \\ \text{se } \sum_{j=1}^{k} x_j^2 & = & \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j^2 & \text{então } q(x) = 0 \ ; \\ \text{se } \sum_{j=1}^{k} x_j^2 & > & \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j^2 & \text{então } q(x) < 0 \ . \end{array}$$

Não é difícel encontrar vetores que satisfazem essas condições. □

Apresentamos agora o operador linear auto-adjunto que representa a forma biliniar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$.

Proposição 4.3. *Seja $T : \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^{k+n}$ o operador linear auto-adjunto tal que $\langle x, y \rangle_{k,n} = \langle T(x), y \rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$. Então*

$$[T]_{\mathcal{C}} = \left[\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n} \right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

e $[T]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}^{-1}$. Se $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{k+n}$ com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então $[T]_{\mathcal{B}} = \left[\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n} \right]_{\mathcal{B}}$.

Demonstração: Temos que

$$\langle x, y \rangle_{k,n} = -\sum_{j=1}^{k} x_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j$$

e

$$\langle T(x), y \rangle_{k,n} = -\sum_{j=1}^{k} T(x)_j \, y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} T(x)_j \, y_j$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$. Logo, $T(x)_j = -x_j$, se $1 \leq j \leq k$, e $T(x)_j = x_j$, se $k+1 \leq j \leq k+n$. Portanto, na base canônica $\mathcal{C}$, a matriz de T é a matriz diagonal

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

que corresponde à matriz $\left[\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n} \right]_{\mathcal{C}}$. Agora

$$[T]_{\mathcal{C}} \ [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix} = I_{k+n}$$

de onde temos $[T]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}^{-1}$. Agora, seja $\mathcal{B} = \{x_1, ..., x_{k+n}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{k+n}$ com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Escrevemos $T(x_i) = \sum_{j=1}^{k+n} \alpha_{ij} x_j$ para cada $i = 1, ..., k+n$, ou seja, $[T]_{\mathcal{B}} = (\alpha_{ij})_{i,j}$. Temos que

$$\langle x_i, x_j \rangle_{k,n} = \langle T(x_i), x_j \rangle = \alpha_{ij}$$

para todos $1 \leq i, j \leq k+n$. Logo, $\left[\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n} \right]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}$. □

Seja A uma matriz real $(k+n) \times (k+n)$. Dizemos que A preserva a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ se

$$\langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} = \langle x, y \rangle_{k,n}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$. Com essa propriedade introduzimos o conceito de grupo ortogonal generalizado, conforme o seguinte teorema.

Teorema 4.4. *Denote por* $\mathrm{O}(k;n)$ *o conjunto das matrizes reais* $(k+n) \times (k+n)$ *que preservam a forma bilinear* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$. *Então* $\mathrm{O}(k;n)$ *é um grupo de Lie de matrizes em* $\mathrm{GL}(k+n;\mathbb{R})$.

Demonstração: Dados $A, B \in \mathrm{O}(k;n)$ e $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$, temos que

$$\langle AB(x), AB(y) \rangle_{k,n} = \langle A(B(x)), A(B(y)) \rangle_{k,n} = \langle B(x), B(y) \rangle_{k,n} = \langle x, y \rangle_{k,n}.$$

Logo, $AB \in \mathrm{O}(k;n)$. Se $x \in Nuc(A)$, então

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, y \rangle_{k,n} = \langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} = \langle 0, y \rangle_{k,n} = 0$$

para todo $y \in \mathbb{R}^{k+n}$. Visto que T é inversível e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada, segue que $x = 0$. Logo, A é inversível. Além disso,

$$\left\langle A^{-1}(x), A^{-1}(y) \right\rangle_{k,n} = \left\langle AA^{-1}(x), AA^{-1}(y) \right\rangle_{k,n} = \langle x, y \rangle_{k,n}.$$

Portanto, $A^{-1} \in \mathrm{O}(k;n)$, mostrando que $\mathrm{O}(k;n)$ é um subgrupo de $\mathrm{GL}(k+n;\mathbb{R})$. Agora, suponha que uma matriz $A \in \mathrm{GL}(k+n;\mathbb{R})$ é o limite de uma sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathrm{O}(k;n)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$, segue por continuidade que

$$\begin{aligned} \langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} &= \left\langle \lim_{n\to\infty} A_n(x), \lim_{n\to\infty} A_n(y) \right\rangle_{k,n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle A_n(x), A_n(y) \rangle_{k,n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle x, y \rangle_{k,n} \\ &= \langle x, y \rangle_{k,n}. \end{aligned}$$

Logo, $A \in \mathrm{O}(k;n)$ e, portanto, $\mathrm{O}(k;n)$ é fechado em $\mathrm{GL}(k+n;\mathbb{R})$, sendo assim um grupo de Lie. □

O grupo de Lie de matrizes $\mathrm{O}(k;n)$ é chamado de **grupo ortogonal generalizado**. Esse nome se deve ao fato das matrizes serem ortogonais com respeito a forma biliniar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$, conforme a seguinte definição.

Definição 4.5. *Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$ são* ***ortogonais*** *com respeito à forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ se $\langle x, y \rangle_{k,n} = 0$. Um vetor $x \in \mathbb{R}^{k+n}$ é* ***unitário*** *com respeito à forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ se $\|x\|_{k,n} = 1$, ou seja, se $\langle x, x \rangle_{k,n} = \pm 1$. Um conjunto de vetores $\{x_1, ..., x_k\}$ em $\mathbb{R}^{k+n}$ é chamado* ***ortonormal*** *com respeito a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$ se os vetores são ortogonais e unitários com respeito à forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$.*

Se $A \in \mathbb{M}_{k+n}(\mathbb{R})$, $A = (A_{i,j})$, denote por $A^{(j)}$ o j-ézimo vetor coluna de A dado por

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{k+n,j} \end{pmatrix}.$$

O resultado seguinte mostra que os vetores coluna de uma matriz do grupo ortogonal generalizado formam um conjunto ortonormal com respeito a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$.

Teorema 4.6. *Seja $A \in \mathrm{GL}(k+n; \mathbb{R})$. Então $A \in \mathrm{O}(k; n)$ se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

$$\begin{aligned} \left\langle A^{(i)}, A^{(j)} \right\rangle_{k,n} &= 0, \quad \textit{se } i \neq j, \\ \left\langle A^{(i)}, A^{(i)} \right\rangle_{k,n} &= -1, \quad \textit{se } 1 \leq i \leq k, \\ \left\langle A^{(j)}, A^{(j)} \right\rangle_{k,n} &= 1, \quad \textit{se } k+1 \leq j \leq k+n. \end{aligned}$$

Demonstração: Seja $A \in \mathrm{O}(k; n)$. Notemos que

$$\left\langle A^{(i)}, A^{(j)} \right\rangle_{k,n} = \langle A(e_i), A(e_j) \rangle_{k,n} = \langle e_i, e_j \rangle_{k,n}$$

onde e_l denota o vetor de $\mathbb{R}^{k+n}$ com 1 na l-ézima entrada e 0 nas outras. Pela definição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,n}$, temos que

$$\begin{aligned} \left\langle A^{(i)}, A^{(j)} \right\rangle_{k,n} &= \langle e_i, e_j \rangle_{k,n} = 0, \quad \text{se } i \neq j, \\ \left\langle A^{(i)}, A^{(j)} \right\rangle_{k,n} &= \langle e_i, e_i \rangle_{k,n} = -1, \quad \text{se } 1 \leq i \leq k, \\ \left\langle A^{(j)}, A^{(j)} \right\rangle_{k,n} &= \langle e_j, e_j \rangle_{k,n} = 1, \quad \text{se } k+1 \leq j \leq k+n. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $A \in \mathrm{GL}(k+n; \mathbb{R})$ satisfaz as condições acima, $x = \sum_{i=1}^{k+n} \alpha_i e_i$ e

$y = \sum_{i=1}^{k+n} \beta_i e_i$ são vetores arbitrários de $\mathbb{R}^{k+n}$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle A(x), A(y)\rangle_{k,n} &= \left\langle \sum_{i=1}^{k+n} \alpha_i A(e_i), \sum_{i=1}^{k+n} \beta_i A(e_i) \right\rangle_{k,n} \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{k+n} \alpha_i A^{(i)}, \sum_{i=1}^{k+n} \beta_i A^{(i)} \right\rangle_{k,n} \\
&= \sum_{i=1}^{k+n} \alpha_i \sum_{j=1}^{k+n} \beta_j \left\langle A^{(i)}, A^{(j)} \right\rangle_{k,n} \\
&= \sum_{i=1}^{k+n} \alpha_i \beta_i \left\langle A^{(i)}, A^{(i)} \right\rangle_{k,n} \\
&= -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_i + \sum_{i=k+1}^{k+n} \alpha_i \beta_i \\
&= \langle x, y\rangle_{k,n}.
\end{aligned}$$

Portanto, $A \in \mathrm{O}(k;n)$. □

Apresetamos agora outro resultado de caracterização do conjunto ortogonal generalizado.

Teorema 4.7. *Seja $A \in \mathrm{GL}(k+n;\mathbb{R})$. Então $A \in \mathrm{O}(k;n)$ se e somente se $A^t g A = g$, onde $g = [T]_{\mathcal{C}}$ é a matriz do operador linear auto-adjunto da Proposição 4.3.*

Demonstração: Sejam $A \in \mathrm{O}(k;n)$ e $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$. Pela Proposição 4.3, temos que

$$\langle A(x), A(y)\rangle_{k,n} = [A(x)]_{\mathcal{C}}^t [T]_{\mathcal{C}} [A(y)]_{\mathcal{C}} = [x]_{\mathcal{C}}^t A^t [T]_{\mathcal{C}} A [y]_{\mathcal{C}}.$$

Por outro lado

$$\langle A(x), A(y)\rangle_{k,n} = \langle x, y\rangle_{k,n} = [x]_{\mathcal{C}}^t [T]_{\mathcal{C}} [y]_{\mathcal{C}}.$$

Como $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$ são arbitrários, segue que $A^t \; [T]_C \; A = [T]_C$. Reciprocamente, se $A^t [T]_C A = [T]_C$, então usamos as mesmas igualdades acima para concluir que $\langle A(x), A(y)\rangle_{k,n} = \langle x, y\rangle_{k,n}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^{k+n}$. Portanto $A \in \mathrm{O}(k;n)$. □

Corolário 4.8. *Se $A \in \mathrm{O}(k;n)$, então* $\det A = \pm 1$.

Demonstração: Pelo Teorema 4.7, temos que $\det(A^t [T]_C A) = \det [T]_C$, de onde segue que $(\det A)^2 = 1$. Logo, $\det(A) = \pm 1$. □

Não é difícel verificar que existem matrizes ortogonais com determinante igual a 1 e outras com determiante igual a -1. Nesta discussão, definimos o seguinte subconjunto de $\mathrm{O}(k;n)$:

$$\mathrm{SO}(k;n) = \{A \in \mathrm{O}(k;n) : \det A = 1\}.$$

Este conjunto é um subgrupo de Lie de $\mathrm{O}(k;n)$, conforme mostra o próximo resultado.

Proposição 4.9. *O conjunto* $\mathrm{SO}(k;n)$ *é um subgrupo de Lie de matrizes de* $\mathrm{O}(k;n)$.

Demonstração: Se $A, B \in \mathrm{SO}(k;n)$, então $\det\left(AB^{-1}\right) = \det A \det B^{-1} = 1$. Logo, $\mathrm{SO}(k;n)$ é um subgrupo de $\mathrm{O}(k;n)$. Resta mostrar que $\mathrm{SO}(k;n)$ é fechado. Com efeito, considerando a restrição a $\mathrm{O}(k;n)$ da função determiante, $\det : \mathrm{O}(k;n) \to \mathbb{R}$, temos que $\mathrm{SO}(k;n) = \det^{-1}(1)$. Segue pela continuidade do determinante que $\mathrm{SO}(k;n)$ é fechado, pois é a imagem inversa de um conjunto fechado (um ponto). □

O grupo de Lie de matrizes $\mathrm{SO}(k;n)$ será chamado **grupo ortogonal generalizado especial**.

Na linguagem da teoria de Lie, o próximo resultado garante que o grupo $\mathrm{O}(1;n)$ (e $\mathrm{SO}(1;n)$) exerce uma ação transitiva sobre o hiperbolóide de duas folhas

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \left\{(a_1, ..., a_{1+n}) \in \mathbb{R}^{1+n} : a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_{1+n}^2 = 1\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R}^{1+n} : \langle x, x\rangle_{1,n} = -1\right\},
\end{aligned}$$

o que significa que uma órbita de $\mathrm{O}(1;n)$ ou $\mathrm{SO}(1;n)$ coincide com H.

Teorema 4.10. *Seja* $x \in \mathbb{R}^{1+n}$ *tal que* $\langle x, x\rangle_{1,n} = -1$. *Existe uma base* $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, ..., x_{1+n}\}$ *de* $\mathbb{R}^{1+n}$, *com* $x_1 = x$, *tal que* $\langle x_i, x_j\rangle_{1,n} = 0$, *se* $i \neq j$, *e* $\langle x_i, x_i\rangle_{1,n} = 1$ *para todo* $i = 2, ..., 1+n$. *Em outras palavras, existe uma matriz* $A \in \mathrm{O}(1;n)$ *tal que* $A^{(1)} = x$.

Demonstração: Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^{1+n}$ gerado por $x_1 = x$ e considere $V' = \left\{y \in \mathbb{R}^{1+n} : \langle x_1, y\rangle_{1,n} = 0\right\}$. Segue da bilinearidade que V' é um subespaço de $\mathbb{R}^{1+n}$. Mais ainda, $\mathbb{R}^{1+n} = V \oplus V'$. De fato, se $y \in V \cap V'$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $y = \lambda x_1$ e $\langle x_1, \lambda x_1\rangle_{1,n} = 0$. Como $\langle x_1, x_1\rangle_{1,n} = -1$, segue que $\lambda = 0$. Logo, $V \cap V' = \{0\}$. Além disso, considere $y \in \mathbb{R}^{1+n}$ qualquer e escreva $z = y + \langle x_1, y\rangle_{1,n} x_1$. Então

$$\begin{aligned}
\langle x_1, z\rangle_{1,n} &= \left\langle x_1, y + \langle x_1, y\rangle_{1,n} x_1\right\rangle_{1,n} \\
&= \langle x_1, y\rangle_{1,n} + \langle x_1, y\rangle_{1,n} \langle x_1, x_1\rangle_{1,n} \\
&= \langle x_1, y\rangle_{1,n} - \langle x_1, y\rangle_{1,n} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $z \in V'$ e $y = -\langle x_1, y\rangle_{1,n} x_1 + z \in V + V'$. Portanto, $\mathbb{R}^{1+n} = V \oplus V'$. Isto significa que $\dim V' = n$. A restrição de $\langle \cdot,\cdot\rangle_{1,n}$ ao subespaço V' é uma forma bilinear simétrica sobre V'. Se houvesse $z \in V'$ não nulo tal que $\langle z, y\rangle_{1,n} = 0$ para todo $y \in V'$, então $\langle z, y\rangle_{1,n} = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^{1+n}$, pois $\langle z, x_1\rangle_{1,n} = 0$. Como $\langle \cdot,\cdot\rangle_{1,n}$ é não degenerada sobre V, segue que $\langle \cdot,\cdot\rangle_{1,n}$ é não degenerada sobre V'. Isto significa que existe uma base $\mathcal{B}' = \{x_2, ..., x_{1+n}\}$ de V' tal que $\langle x_i, x_j\rangle_{1,n} = 0$, se $i \neq j$, e $\langle x_i, x_i\rangle_{1,n} = \pm 1$ para todo $i = 2, ..., 1+n$. Afirmamos que $\langle x_i, x_i\rangle_{1,n} = 1$ para todo $i = 2, ..., 1+n$. Com efeito, escrevamos $x_1 = (a_1, ..., a_{1+n})$ e $x_i = (b_1, ..., b_{1+n})$. Então $a_1 \neq 0$. Suponhamos por absurdo que $\langle x_i, x_i\rangle_{1,n} = -1$. Dados quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, temos que

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_i, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_i\rangle_{1,n} = -\lambda_1^2 - \lambda_2^2 \leq 0.$$

Dessa forma,

$$0 + \left(\frac{b_1}{a_1} a_2 - b_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b_1}{a_1} a_{1+n} - b_{1+n}\right)^2 = \left\langle \frac{b_1}{a_1} x_1 - x_i, \frac{b_1}{a_1} x_1 - x_i \right\rangle_{1,n} \leq 0$$

o que ocorre somente se $\frac{b_1}{a_1} a_i - b_i = 0$ para todo $i = 1, ..., 1+n$. Logo, $x_i = \frac{b_1}{a_1} x_1$, o que contradiz $x_i \in V'$. Portanto, $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, ..., x_{1+n}\}$ é a base desejada. Segue do Teorema 4.6 que $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{1+n} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(1;n)$, onde $A^{(1)} = x_1$. □

Corolário 4.11. *Seja $x \in \mathbb{R}^{1+n}$ tal que $\langle x, x\rangle_{1,n} = -1$. Existe uma matriz $A \in \mathrm{SO}(1;n)$ tal que $A^{(1)} = x$.*

Demonstração: Seja $A \in \mathrm{O}(1;n)$ tal que $A^{(1)} = x$ obtida pelo Teorema 4.10. Se $\det A = -1$, então basta multiplicar a coluna $A^{(1+n)}$ por -1 obtendo uma matriz $B \in \mathrm{SO}(1;n)$ com $B^{(1)} = x$. □

Existe uma interessante relação entre o grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$ e o grupo ortogonal generalizado $\mathrm{O}(1;n)$, conforme mostra o seguinte resultado.

Proposição 4.12. *Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{1+n}(\mathbb{R})$ do tipo*

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & & & \\ \vdots & & B & \\ x_{1+n} & & & \end{pmatrix}$$

onde $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Então $A \in \mathrm{O}(1;n)$ se e somente se $B \in \mathrm{O}(n)$, $x_1 = \pm 1$ e $x_i = 0$ para todo $i = 2, ..., 1+n$.

Demonstração: Pelo Teorema 4.6, $A \in \mathrm{O}(1;n)$ se e somente se

$$\begin{aligned} \left\langle A^{(1)}, A^{(1)} \right\rangle_{k,n} &= -1, \\ \left\langle A^{(i)}, A^{(j)} \right\rangle_{k,n} &= 0, \quad \text{se } i \neq j, \\ \left\langle A^{(j)}, A^{(j)} \right\rangle_{k,n} &= 1, \quad \text{se } 2 \leq j \leq 1+n, \end{aligned}$$

o que ocorre se e somente se $B \in \mathrm{O}(n)$ e

$$\begin{aligned} B_{11}x_2 + B_{21}x_3 + \cdots + B_{n1}x_{1+n} &= 0 \\ &\vdots \\ B_{1n}x_2 + B_{2n}x_3 + \cdots + B_{nn}x_{1+n} &= 0 \end{aligned}$$

é um sistema linear que admite somente a solução trivial $x_2 = ... = x_{1+n} = 0$, o que significa que $x_1 = \pm 1$. $\square$

Este resultado diz que existe uma cópia de $\mathrm{O}(n)$ em $\mathrm{O}(1;n)$ dada pela identificação

$$\mathrm{O}(n) \approx \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(1;n) : B \in \mathrm{O}(n) \right\}$$

o que permite considerar $\mathrm{O}(n)$ como um subgrupo de $\mathrm{O}(1;n)$. Da mesma forma, $\mathrm{SO}(n)$ pode ser considerado como um subgrupo de $\mathrm{SO}(1;n)$ por meio da identificação

$$\mathrm{SO}(n) \approx \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(1;n) : B \in \mathrm{SO}(n) \right\}.$$

4.1. Topologia

Passamos agora a discutir sobre a topologia do grupo ortogonal generalizado. Vamos analisar especificamente os conceitos de compacidade e de conexidade dos grupos $\mathrm{O}(k;n)$ e $\mathrm{SO}(k;n)$. Começamos mostrando que esses grupos não são compactos, o que resulta da propriedade de hiperbolicidade.

Proposição 4.13. *Os grupos de Lie de matrizes* $\mathrm{O}(k;n)$ *e* $\mathrm{SO}(k;n)$ *não são compactos.*

Demonstração: Considere as matrizes reais $(k+n)\times(k+n)$ da forma

$$A_x = \begin{pmatrix} \cosh x & 0 & \cdots & 0 & \mathrm{senh} x \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & I & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \mathrm{senh} x & 0 & \cdots & 0 & \cosh x \end{pmatrix}$$

com $x \in \mathbb{R}$. Não é difícil verificar que essas matrizes satisfazem as condições de ortonormalidade do Teorema 4.6. Logo, $A_x \in \mathrm{O}(k;n)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, $\det A_x = \cosh^2 x + (-1)^{k+n+1}(-1)^{k+n}\,\mathrm{senh}^2 x = 1$. Portanto, $A_x \in \mathrm{SO}(k;n)$. Visto que as funções hiperbólicas não são limitadas, segue que $\mathrm{SO}(k;n)$ não é compacto. Consequentemente, $\mathrm{O}(k;n)$ também não é compacto. □

Agora, analizamos as componentes conexas de $\mathrm{O}(1;n)$ e $\mathrm{SO}(1;n)$. Notemos que as duas "folhas" do hiperbolóide $\mathrm{H} = \left\{x \in \mathbb{R}^{1+n} : \langle x,x\rangle_{1,n} = -1\right\}$ são os gráficos das funções contínuas $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas respectivamente por

$$f_1(x) = \sqrt{1+\|x\|^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{1+\|x\|^2}.$$

Portanto, H possui duas componentes conexas por caminhos.

Proposição 4.14. *Os grupos de Lie de matrizes* $\mathrm{O}(1;n)$ *e* $\mathrm{SO}(1;n)$ *não são conexos e possuem respectivamente 4 e 2 componentes conexas.*

Demonstração: Visto que a função determinante $\det : \mathrm{O}(1;n) \to \mathbb{R}$ é contínua, e sabendo que se $A \in \mathrm{O}(1;n)$ então $\det(A) = \pm 1$, segue que $\mathrm{O}(1;n)$ não é conexo. Considere a aplicação $\phi : \mathrm{SO}(1;n) \to \mathrm{SO}(1;n)\,e_1$ dada por

$$\phi(A) = A(e_1) = A^{(1)}.$$

Essa aplicação é contínua pois se trata de uma projeção. Pelo Teorema 4.6, a órbita $\mathrm{SO}(1;n)\,e_1$ coincide com o hiperbolóide de duas folhas H em $\mathbb{R}^{1+n}$, o qual possui duas componentes conexas. Isto significa que $\mathrm{SO}(1;n)$ também não é conexo. Agora, note que $\phi(A_1) = \phi(A_2)$ se e só se $A_2^{-1}A_1(e_1) = e_1$, o que ocorre se e só se $A_2^{-1}A_1$ é do tipo

$$A_2^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(n).$$

Na linguagem da teoria de Lie, $\mathrm{SO}(n)$ é o subgrupo de isotropia de e_1. Tomando o espaço quociente $\mathrm{SO}(1;n)/\mathrm{SO}(n)$, temos que a aplicação induzida $\Phi : \mathrm{SO}(1;n)/\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{H}$ dada por

$$\Phi(A\mathrm{SO}(n)) = \phi(A)$$

é um homeomorfismo. Logo, $\mathrm{SO}(1;n)/\mathrm{SO}(n)$ possui duas componentes conexas. Visto que $\mathrm{SO}(n)$ é conexo, segue da Proposição 3.12 que $\mathrm{SO}(1;n)$ tem duas componentes conexas. Enfim, o conjunto complementar de $\mathrm{SO}(1;n)$ em $\mathrm{O}(1;n)$ é o conjunto $\mathrm{SO}(1;n)^C$ das matrizes com determinante -1, o qual é desconexo com $\mathrm{SO}(1;n)$. Mas $\mathrm{SO}(1;n)^C$ é homeomorfo a $\mathrm{SO}(1;n)$, o que é facilmente verificado usando a aplicação que inverte o sinal de uma coluna fixa das matrizes. Isto significa que $\mathrm{SO}(1;n)^C$ também possui duas componentes conexas e, portanto, $\mathrm{O}(1;n)$ possui quatro componentes conexas. □

Para visualizar as componentes conexas de $\mathrm{O}(1;n)$, tomemos $A = (A_{ij})$ em $\mathrm{O}(1;n)$. Visto que $-A_{11}^2 + A_{21}^2 + \cdots + A_{n1}^2 = -1$, temos que $A_{11}^2 = 1 + A_{21}^2 + \cdots + A_{n1}^2 \geq 1$. Logo, $|A_{11}| \geq 1$. Assim, podemos identificar quatro conjuntos dois a dois desconexos em $\mathrm{O}(1;n)$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{A \in \mathrm{O}(1;n) : A_{11} \geq 1 \text{ e } \det A = 1\}; \\ C_2 &= \{A \in \mathrm{O}(1;n) : A_{11} \leq -1 \text{ e } \det A = 1\}; \\ C_3 &= \{A \in \mathrm{O}(1;n) : A_{11} \geq 1 \text{ e } \det A = -1\}; \\ C_4 &= \{A \in \mathrm{O}(1;n) : A_{11} \leq 1 \text{ e } \det A = -1\}. \end{aligned}$$

Note que esses conjuntos formam um partição de $\mathrm{O}(1;n)$, ou seja, $\mathrm{O}(1;n) = \bigcup_{i=1}^{4} C_i$ e $C_i \cap C_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Logo, C_1, C_2, C_3 e C_4 são justamente as componentes conexas de $\mathrm{O}(1;n)$, C_1 e C_2 são as componentes conexas de $\mathrm{SO}(1;n)$ e $C_1 = \mathrm{SO}(1;n)_0$. Olhando as componentes conexas como classes de equivalência, podemos também descrevê-las a partir de seus representantes da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \qquad C_2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right], \\ C_3 &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right], \qquad C_4 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]. \end{aligned}$$

Em física, as matrizes da componente C_1 correspondem às transformações *próprias* ($\det A = 1$) e *ortócronas* ($A_{11} \geq 1$); as matrizes de C_2 correspondem às transformações próprias e *antiortócronas* ($A_{11} \leq -1$); as matrizes de C_3 representam as transformações *impróprias* ($\det A = -1$) e ortócronas; e as matrizes de C_4 descrevem as transformações impróprias e antiortócronas.

Fica em aberto a discussão sobre as componentes conexas dos grupos $\mathrm{O}(k;n)$ e $\mathrm{SO}(k;n)$ com $k > 1$.

4.2. A álgebra de Lie

Como todo grupo de Lie, o grupo ortogonal generalizado possui uma álgebra de Lie associada. Na sequência, descrevemos a álgebra de Lie de $\mathrm{O}(k;n)$ e deduzimos sua dimensão.

Teorema 4.15. *A álgebra de Lie* $\mathfrak{so}(k;n)$ *de* $\mathrm{O}(k;n)$ *(e de* $\mathrm{SO}(k;n)$*) é*

$$\mathfrak{so}(k;n) = \left\{X \in \mathbb{M}_{k+n}(\mathbb{R}) : gX^t g = -X\right\}$$

onde $g = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$.

Demonstração: Dados $X \in \mathfrak{so}(n;k)$ e $s \in \mathbb{R}$, temos que

$$e^{-sX} = e^{s\left(gX^t g\right)} = e^{g(sX)^t g}$$

de onde segue que $\left(e^{sX}\right)^{-1} = g\ \left(e^{sX}\right)^t\ g$. Logo, $e^{sX} \in \mathrm{O}(n;k)$. Visto que $\det e^{sX} = e^{\mathrm{tr}(sX)} > 0$, segue que $\det e^{sX} = 1$ e, portanto, $e^{sX} \in \mathrm{SO}(n;k)$. Por outro lado, considere uma curva diferenciável $\gamma(s)$ em $\mathrm{O}(n;k)$ com $\gamma(0) = I$. Então, $\gamma(s)^{-1} = g\ \gamma(s)^t\ g$, de onde segue que

$$-\gamma(s)^{-2}\gamma'(s) = g\left(\gamma'(s)\right)^t g.$$

Dessa forma, $-\gamma'(0) = g\left(\gamma'(0)\right)^t g$. Se $\gamma(s) = e^{sX} \in \mathrm{O}(n;k)$, então $-X = gX^t g$, ou seja, $X \in \mathfrak{so}(k;n)$. Portanto, $\mathfrak{so}(k;n)$ é a álgebra de Lie de $\mathrm{O}(k;n)$ e de $\mathrm{SO}(n;k)$. □

Agora, lembremos que a dimensão do grupo $\mathrm{O}(n;k)$ é a dimensão de sua álgebra de Lie $\mathfrak{so}(k;n)$.

Proposição 4.16. *A dimensão do grupo* $\mathrm{O}(n;k)$ *é* $\dfrac{(n+k)(n+k-1)}{2}$.

Demonstração: Notemos que a multiplicação à esquerda da matriz $g = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$ por uma matriz X inverte o sinal das k primeiras linhas de X, enquanto que a multiplicação à direita de g por X inverte o sinal das k primeiras colunas de X. Dessa forma, dada $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{so}(k;n)$, temos que

$$gXg = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & -x_{1k+1} & \cdots & -x_{1k+n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & -x_{kk+1} & \cdots & -x_{kk+n} \\ -x_{k+11} & \cdots & -x_{k+1k} & x_{k+1k+1} & \cdots & x_{k+1k+n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_{k+n1} & \cdots & -x_{k+nk} & x_{k+nk+1} & \cdots & x_{k+nk+n} \end{pmatrix}.$$

Como $gX^tg = -X$, então $gXg = -X^t$, de onde segue $x_{ii} = 0$ para todo $i = 1, ..., k+n$; $x_{ij} = -x_{ji}$ para $1 \leq i, j \leq k$ ou $k+1 \leq i, j \leq k+n$; e $x_{ij} = x_{ji}$ para $1 \leq i \leq k$ e $k+1 \leq j \leq k+n$. Assim, $\dim \mathfrak{so}\,(k;n) = \dfrac{(n+k)^2 - (n+k)}{2}$. □

Notemos que a dimensão do grupo ortogonal generalizado $\mathrm{O}\,(k;n)$ coincide com a dimensão do grupo ortogonal $\mathrm{O}\,(k+n)$.

Proposição 4.17. *Seja* $\mathrm{SO}\,(k;n)_0$ *a componente conexa da identidade de* $\mathrm{O}\,(k;n)$*. Então* $\mathfrak{so}\,(k;n)$ *também é a álgebra de Lie de* $\mathrm{SO}\,(k;n)_0$*.*

Demonstração: Pela Proposição 3.11, $\mathrm{SO}\,(k;n)_0$ é um grupo de Lie de matrizes e um subgrupo de $\mathrm{SO}\,(k;n)$. Como $\mathfrak{so}\,(k;n)$ é conexo, a imagem da aplicação exponencial deve ser um conjunto conexo que possua a identidade. Logo, $e^X \in \mathrm{SO}\,(k;n)_0$ para todo $X \in \mathfrak{so}\,(k;n)$ e, portanto, $\mathfrak{so}\,(k;n)$ é a álgebra de $\mathrm{SO}\,(k;n)_0$. □

Em teoria de Lie, sempre é importante conhecer o grupo de Lie conexo associado a uma álgebra de Lie. Se dois grupos de Lie conexos possuem a mesma álgebra de Lie, então esses grupos são isomorfos.

4.3. Grupo de Poincaré

Por definição, uma matriz $A \in \mathrm{O}\,(1;n)$ preserva a forma bilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,n}$. Logo, A preserva também a chamada *distância de Lorentz* $\mathrm{d}_{1,n}$ dada por

$$\mathrm{d}_{1,n}\,(x,y) = \|x-y\|_{1,n} = \sqrt{\left|\langle x-y, x-y\rangle_{1,n}\right|}.$$

No entanto, $\mathrm{O}\,(1;n)$ não contém todas as transformações de $\mathbb{R}^{1+n}$ que preservam $\mathrm{d}_{1,n}$. Esse papel cabe ao grupo de Poincaré, o grupo das transformações de $\mathbb{R}^{1+n}$ que preservam a distância de Lorentz (isometrias). Finalizaremos essa seção apresentando o grupo de Poincaré como um grupo de Lie de matrizes, mostrando sua descrição a partir $\mathrm{O}\,(1;n)$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^{1+n}$, definimos a translação $T_x : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^{1+n}$ por

$$T_x\,(y) = x + y, \quad y \in \mathbb{R}^{1+n}.$$

Seja $\mathrm{P}\,(1;n)$ o conjunto das transformações afins de $\mathbb{R}^{1+n}$ da forma

$$T = T_x \circ A$$

com $x \in \mathbb{R}^{1+n}$ e $A \in \mathrm{O}\,(1;n)$, onde A é identificada com uma transformação linear de $\mathbb{R}^{1+n}$.

Proposição 4.18. *O conjunto* $\mathrm{P}\,(1;n)$ *é um grupo com a operação de composição de transformações.*

Demonstração: Note que $A \circ T_x = T_{Ax} \circ A$, para todos $x \in \mathbb{R}^{1+n}$ e $A \in \mathrm{O}(1;n)$. Dessa forma, se $T_1 = T_x \circ A$ e $T_2 = T_y \circ B$, então

$$\begin{aligned} T_1 \circ T_2 &= T_x \circ A \circ T_y \circ B \\ &= T_x \circ T_{Ay} \circ AB \\ &= T_{x+Ay} \circ AB \end{aligned}$$

com $x + A(y) \in \mathbb{R}^{1+n}$ e $AB \in \mathrm{O}(1;n)$. Logo, $T_1 \circ T_2 \in \mathrm{P}(1;n)$. O elemento neutro de $\mathrm{P}(1;n)$ é evidentemente $I = T_0 \circ I_{1+n}$. Agora, para $T_x \circ A \in \mathrm{P}(1;n)$, temos que

$$(T_x \circ A) \circ \left(T_{-A^{-1}x} \circ A^{-1}\right) = T_x \circ T_{-x} \circ AA^{-1} = I$$

e

$$\left(T_{-A^{-1}x} \circ A^{-1}\right) \circ (T_x \circ A) = T_{-A^{-1}x} \circ T_{A^{-1}x} \circ A^{-1}A = I.$$

Logo, $T_{-A^{-1}x} \circ A^{-1}$ é o elemento inverso de $T_x \circ A$. Como a operação de composição é associativa, concluímos que $\mathrm{P}(1;n)$ é um grupo de transformações. □

O grupo de transformações afins $\mathrm{P}(1;n)$ é chamado **grupo de Poincaré**. Como a inclusão $\mathrm{O}(1;n) \hookrightarrow \mathrm{P}(1;n)$ é evidentemente um monomorfismo, pode-se considerar $\mathrm{O}(1;n)$ como um subgrupo de $\mathrm{P}(1;n)$. Na verdade, $\mathrm{P}(1;n)$ também é um grupo de Lie de matrizes, conforme mostra o próximo resultado.

Proposição 4.19. *O grupo de Poincaré* $\mathrm{P}(1;n)$ *é isomorfo ao grupo das matrizes* $(2+n) \times (2+n)$ *da forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ x_{1+n} & & & \end{pmatrix}$$

com $A \in \mathrm{O}(1;n)$*, o qual é um grupo de Lie de matrizes.*

Demonstração: Defina a aplicação $\psi : \mathrm{P}(1;n) \to \mathbb{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ por

$$\psi(T_x \circ A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ x_{1+n} & & & \end{pmatrix}.$$

Dados $T_1 = T_x \circ A$ e $T_2 = T_y \circ B$, temos que

$$\begin{aligned}
\psi(T_1 \circ T_2) &= \psi(T_x \circ A \circ T_y \circ B) \\
&= \psi(T_{x+Ay} \circ AB) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 + \sum_{i=1}^{1+n} A_{1i} y_i & & & \\ \vdots & & AB & \\ x_{1+n} + \sum_{i=1}^{1+n} A_{1+n,i} y_i & & & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ x_{1+n} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & & & \\ \vdots & & B & \\ y_{1+n} & & & \end{pmatrix} \\
&= \psi(T_1)\ \psi(T_2).
\end{aligned}$$

Logo, ψ é um homomorfismo. Claramente, a aplicação ψ é injetiva e, portanto, ψ é um isomorfismo. A imagem de ψ é um subgrupo fechado de $\mathrm{GL}(2+n, \mathbb{R})$, pois tem a mesma topologia de $\mathbb{R}^{1+n} \times \mathrm{O}(1;n)$. Portanto, $\mathrm{P}(1;n)$ é isomorfo a um grupo de Lie de matrizes. □

É comum identificar o espaço $\mathbb{R}^{1+n}$ como o espaço quociente $\mathrm{P}(1;n)/\mathrm{O}(1;n)$. Tal identificação pode ser obtida da seguinte forma. Tome a aplicação $\varphi : \mathrm{P}(1;n) \to \mathbb{R}^{1+n}$ dada por $\varphi(T_x \circ A) = x$ para todo $T_x \circ A \in \mathrm{P}(1;n)$. Considere a aplicação induzida $\tilde{\varphi} : \mathrm{P}(1;n)/\mathrm{O}(1;n) \to \mathbb{R}^{1+n}$ de forma que o seguinte diagrama comute

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P}(1;n) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R}^{1+n} \\
& \mathrm{P}(1;n)/\mathrm{O}(1;n) \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}.$$

Então $\tilde{\varphi}$ é um homeomorfismo de $\mathrm{P}(1;n)/\mathrm{O}(1;n)$ sobre $\mathbb{R}^{1+n}$.

Enfim, apresentamos a característica principal do grupo de Poincaré.

Proposição 4.20. *Uma transformação T satisfaz $\|T(x) - T(y)\|_{1,n} = \|x-y\|_{1,n}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^{1+n}$ se e somente se $T \in \mathrm{P}(1;n)$.*

Demonstração: Se $T_z \circ A \in \mathrm{P}(1;n)$ e $x, y \in \mathbb{R}^{1+n}$, então

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T(y)\|_{1,n} &= \|(T_z \circ A)(x) - (T_z \circ A)(y)\|_{1,n} \\
&= \|z + A(x) - z - A(y)\|_{1,n} \\
&= \|A(x) - A(y)\|_{1,n} \\
&= \|x - y\|_{1,n}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se T satisfaz $\|T(x) - T(y)\|_{1,n} = \|x-y\|_{1,n}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^{1+n}$, então

$$\left|\langle T(x) - T(y), T(x) - T(y)\rangle_{1,n}\right| = \left|\langle x-y, x-y\rangle_{1,n}\right|.$$

Em particular,

$$\left|\langle T(x) - T(0), T(x) - T(0)\rangle_{1,n}\right| = \left|\langle x, x\rangle_{1,n}\right|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{1+n}$. Denote $x_0 = T(0)$ e defina $A = T_{-x_0} \circ T$. Então

$$\left|\langle A(x) - A(y), A(x) - A(y)\rangle_{1,n}\right| = \left|\langle x - y, x - y\rangle_{1,n}\right|$$

e

$$\left|\langle A(x), A(x)\rangle_{1,n}\right| = \left|\langle x, x\rangle_{1,n}\right|$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^{1+n}$. Considerando a base canônica $\mathcal{C} = \{e_1, ..., e_{1+n}\}$, segue que

$$\left|\langle A(e_i), A(e_i)\rangle_{1,n}\right| = 1, \quad \text{para } i = 1, ..., 1+n.$$

Se $i > 1$, temos que $\left|\langle e_1 + e_i, e_1 + e_i\rangle_{1,n}\right| = \left|\langle e_1 - e_i, e_1 - e_i\rangle_{1,n}\right| = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \left|\langle A(e_1 + e_i), A(e_1 + e_i)\rangle_{1,n}\right| \\ &= \left|\langle A(e_1), A(e_1)\rangle_{1,n} + 2\langle A(e_1), A(e_i)\rangle_{1,n} + \langle A(e_i), A(e_i)\rangle_{1,n}\right| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \left|\langle A(e_1 - e_i), A(e_1 - e_i)\rangle_{1,n}\right| \\ &= \left|\langle A(e_1), A(e_1)\rangle_{1,n} - 2\langle A(e_1), A(e_i)\rangle_{1,n} + \langle A(e_i), A(e_i)\rangle_{1,n}\right| \end{aligned}$$

sempre que $1 < i \leq 1+n$, de onde segue que $\langle A(e_1), A(e_i)\rangle_{1,n} = 0$. Dessa forma, $\langle A(e_i), A(e_i)\rangle_{1,n} = -\langle A(e_1), A(e_1)\rangle_{1,n}$ e $\langle A(e_i), A(e_i)\rangle_{1,n} = \langle A(e_j), A(e_j)\rangle_{1,n}$ sempre que $1 < i, j \leq 1+n$. Agora, para $1 < i, j \leq 1+n$ com $i \neq j$, temos que

$$\begin{aligned} 2 &= \left|\langle A(e_i + e_j), A(e_i + e_j)\rangle_{1,n}\right| \\ &= \left|\langle A(e_i), A(e_i)\rangle_{1,n} + 2\langle A(e_i), A(e_j)\rangle_{1,n} + \langle A(e_j), A(e_j)\rangle_{1,n}\right| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2 &= \left|\langle A(e_i - e_j), A(e_i - e_j)\rangle_{1,n}\right| \\ &= \left|\langle A(e_i), A(e_i)\rangle_{1,n} - 2\langle A(e_i), A(e_j)\rangle_{1,n} + \langle A(e_j), A(e_j)\rangle_{1,n}\right|. \end{aligned}$$

Assim, de $\left|\langle A(e_i + e_j), A(e_i + e_j)\rangle_{1,n}\right|^2 = \left|\langle A(e_i - e_j), A(e_i - e_j)\rangle_{1,n}\right|^2$ obtemos

$$\left[\langle A(e_i), A(e_i)\rangle_{1,n} + \langle A(e_j), A(e_j)\rangle_{1,n}\right]\langle A(e_i), A(e_j)\rangle_{1,n} = 0.$$

Visto que $\langle A(e_i), A(e_i)\rangle_{1,n} + \langle A(e_j), A(e_j)\rangle_{1,n} = \pm 2 \neq 0$, segue que $\langle A(e_i), A(e_j)\rangle_{1,n} = 0$. Portanto, os vetores coluna de A são ortogonais com $\left|\left\langle A^{(i)}, A^{(i)}\right\rangle_{1,n}\right| = 1$, para todo $i = 1, ..., 1+n$, e $\left\langle A^{(i)}, A^{(i)}\right\rangle_{1,n} = -\left\langle A^{(1)}, A^{(1)}\right\rangle_{1,n}$ sempre que $1 < i \leq 1+n$. Finalmente, usando o mesmo argumento do Teorema 4.10, deve existir somente uma coluna de $A^{(i)}$ tal que $\left\langle A^{(i)}, A^{(i)}\right\rangle_{1,n} = -1$, o que somente é possível se $\left\langle A^{(1)}, A^{(1)}\right\rangle_{1,n} = -1$. Assim, $A \in \mathrm{O}(1;n)$ e, portanto, $T = T_{x_0} \circ A \in \mathrm{P}(1;n)$. □

4.4. Grupo de Lorentz

A componente conexa da identidade do grupo ortogonal generalizado $\mathrm{O}(1;3)$ é a representação matricial do **grupo de Lorentz**. Veremos agora o isomorfismo local entre o grupo de Lorentz e o grupo linear especial $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, o grupo das matrizes 2×2 com entradas complexas e com determinante 1. Esse último é um grupo conexo (e simplesmente conexo) e sua álgebra de Lie é o espaço das matrizes complexas 2×2 com traço zero, o que implica que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tem dimensão real 6, a mesma dimensão do grupo de Lorentz.

Seja $\mathfrak{u}(2)$ o conjunto das matrizes 2×2 anti-hermitianas

$$\mathfrak{u}(2) = \left\{X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) : X + \overline{X}^t = 0\right\}.$$

Esse conjunto é um espaço vetorial real, o que é facilmente verificável. Uma matriz X de $\mathfrak{u}(2)$ é da forma

$$X = \begin{pmatrix} ai & b+ci \\ -b+ci & di \end{pmatrix}.$$

Logo, $\mathfrak{u}(2)$ tem dimensão 4 e, portanto, $\mathfrak{u}(2)$ é linearmente isomorfo a $\mathbb{R}^{1+3}$.

Um isomorfismo interessante entre $\mathfrak{u}(2)$ e $\mathbb{R}^{1+3}$ pode ser construído da seguinte forma. Defina a função $\phi : \mathbb{R}^{1+3} \to \mathfrak{u}(2)$ por

$$\phi(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} (a_1 + a_2)\, i & a_3 + a_4 i \\ -a_3 + a_4 i & (a_1 - a_2)\, i \end{pmatrix}.$$

Não é difícil ver que ϕ é um isomorfismo linear e que sua inversa $\phi^{-1} : \mathfrak{u}(2) \to \mathbb{R}^{1+3}$ é a transformação

$$\phi^{-1}\begin{pmatrix} \alpha i & \beta + \gamma i \\ -\beta + \gamma i & \delta i \end{pmatrix} = \left(\frac{\alpha+\delta}{2}, \frac{\alpha-\delta}{2}, \beta, \gamma\right).$$

Além disso, para todo $x = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, temos que

$$\det \phi(x) = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = \langle x, x\rangle_{1,3}.$$

Agora, defina $\Phi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ de modo que, para cada $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $\Phi(g) : \mathbb{R}^{1+3} \to \mathbb{R}^{1+3}$ é a transformação linear

$$\Phi(g)(x) = \phi^{-1}\left(g\phi(x)\bar{g}^t\right), \quad x \in \mathbb{R}^{1+3}.$$

Para cada $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ e $x \in \mathbb{R}^{1+3}$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(g)(x), \Phi(g)(x) \rangle_{1,3} &= \det \phi(\Phi(g)(x)) \\
&= \det\left(g\phi(x)\bar{g}^t\right) \\
&= \det g \det \phi(x) \det \bar{g}^t \\
&= \det \phi(x) \\
&= \langle x, x \rangle_{1,3}.
\end{aligned}$$

Logo, $\Phi(g) \in \mathrm{O}(1;3)$. Além disso, dados $g, h \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ e $x \in \mathbb{R}^{1+3}$, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi(gh)(x) &= \phi^{-1}\left(gh\phi(x)\bar{h}^t\bar{g}^t\right) \\
&= \phi^{-1}\left(g\phi\phi^{-1}\left(h\phi(x)\bar{h}^t\right)\bar{g}^t\right) \\
&= \phi^{-1}\left(g\phi(\Phi(h)(x))\bar{g}^t\right) \\
&= \Phi(g)(\Phi(h)(x)).
\end{aligned}$$

Logo, $\Phi(gh) = \Phi(g) \circ \Phi(h)$ e, portanto, Φ é um homomorfismo de grupos de Lie de matrizes.

O conjunto imagem $\mathrm{Im}\,\Phi$ do homomorfismo Φ é um subgrupo de $\mathrm{O}(1;3)$. Visto que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ é conexo, segue que $\mathrm{Im}\,\Phi$ está contida na componente conexa da identidade de $\mathrm{O}(1;3)$, ou seja, Φ é um homomorfismo de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ no grupo de Lorentz $\mathrm{SO}(1;3)_0$. Se g pertence ao núcleo $\mathrm{Nuc}\Phi$ de Φ, então $g\phi(x)\bar{g}^t = \phi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{1+3}$, pois $\Phi(g) = I$. Como ϕ é um isomorfismo, isto significa que $gX\bar{g}^t = X$ para todo $X \in \mathfrak{u}(2)$. Escrevendo $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e tomando $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}(2)$, temos que

$$\begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{c} \\ c\bar{a} & c\bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de onde segue que $\|a\| = 1$ e $c = 0$. Tomando $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}(2)$, temos que

$$\begin{pmatrix} b\bar{b} & b\bar{d} \\ d\bar{b} & d\bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de onde obtemos $\|d\| = 1$ e $b = 0$. Como $\det g = 1$, a e b são reais unitários de mesmo sinal. Logo, $\mathrm{Nuc}\Phi = \{\pm I\}$. Segue do teorema do isomorfismo que o grupo quociente $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) / \{\pm I\}$ é isomorfo ao grupo imagem $\mathrm{Im}\,\Phi$.

Vejamos agora que $\operatorname{Im}\Phi = \mathrm{SO}(1;3)_0$. Dado $g = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ c_1 + ic_2 & d_1 + id_2 \end{pmatrix}$ em $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, com $a_1d_1 - a_2d_2 - b_1c_1 + b_2c_2 = 1$ e $a_1d_2 + a_2d_1 - b_1c_2 - b_2c_1 = 0$, determinamos a matriz de $\Phi(g)$ com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^{1+3}$ a partir das igualdades $\Phi(g)(e_i) = \phi^{-1}(g\phi(e_i)\bar{g}^t)$, $i = 1, ..., 4$, obtendo

$$\Phi(g) =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2\right) & \frac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2+|c|^2-|d|^2\right) & -a_1b_2+a_2b_1-c_1d_2+c_2d_1 & a_1b_1+a_2b_2+c_1d_1+c_2d_2 \\ \frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2\right) & \frac{1}{2}\left(|a|^2-|b|^2-|c|^2+|d|^2\right) & -a_1b_2+a_2b_1+c_1d_2-c_2d_1 & a_1b_1+a_2b_2-c_1d_1-c_2d_2 \\ a_1c_2-a_2c_1+b_1d_2-b_2d_1 & a_1c_2-a_2c_1-b_1d_2+b_2d_1 & 1+2a_2d_2-2b_2c_2 & 2a_1d_2-2b_2c_1 \\ a_1c_1+a_2c_2+b_1d_1+b_2d_2 & a_1c_1+a_2c_2-b_1d_1-b_2d_2 & 2b_1c_2-2a_1d_2 & 1+2a_2d_2-2b_2c_2 \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que Φ é diferenciável e que sua matriz jacobiana (estendida) na identidade $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$J\Phi(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a qual possui 8 linhas linearmente independentes. A expressão de $J\Phi(I)$ na álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) : \operatorname{tr}(X) = 0\}$ é

$$J\Phi(I)\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ x_5 + ix_6 & -x_1 - ix_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x_1 & -x_4 + x_6 & x_3 + x_5 \\ 2x_1 & 0 & -x_4 - x_6 & x_3 - x_5 \\ -x_4 + x_6 & x_4 + x_6 & 0 & -2x_2 \\ x_3 + x_5 & -x_3 + x_5 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $J\Phi(I)$ é um isomorfismo linear entre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ e $\mathfrak{so}(1;3)$. Pelo teorema da função inversa, existem vizinhanças abertas V da identidade em $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ e U da identidade em $\mathrm{SO}(1;3)_0$ de forma que a restrição $\Phi : V \to U$ é um homeomorfismo. Pelo Teorema 3.14, temos que $\mathrm{SO}(1;3)_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. Como Φ é um homomorfismo, segue que $\operatorname{Im}\Phi = \mathrm{SO}(1;3)_0$, ou seja, Φ é sobrejetiva.

Observação 4.1. *Usando teoremas mais apurados, poderiamos mostrar esse resultado observando que* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$ *tem a mesma dimensão de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$*, já* *que* $\{\pm I\}$ *tem dimensão* 0. *Segue que a dimensão de* $\operatorname{Im}\Phi$ *é* 6. *Assim,* $\operatorname{Im}\Phi$ *é um subgrupo conexo de* $\mathrm{SO}\,(1;3)_0$ *e com a mesma dimensão de* $\mathrm{SO}\,(1;3)_0$*, o que implica* $\operatorname{Im}\Phi = \mathrm{SO}\,(1;3)_0$.

Os resultados acima mostram o seguinte teorema.

Teorema 4.21. *O grupo de Lorentz* $\mathrm{SO}\,(1;3)_0$ *é localmente isomorfo ao grupo linear especial complexo* $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})$ *e isomorfo ao grupo quociente* $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{C})\,/\,\{\pm I\}$.

References

1. Carmo, M. P., Geometria riemanniana. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

2. Coelho, F. U. e Lourenço, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*. São Paulo: Edusp, 2001.

3. Hall, B. C., *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Graduate texts in mathematics 222. New York: Springer-Verlag, 2003.

4. Lima, E. L., *Espaços métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

5. Minkowski, H., *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 53–111, 1908.

6. Minkowski, H., *Raum und Zeit*. Physikalische Zeitschrift, 10, 75–88, 1909.

7. Naber, G. L., *The Geometry of Minkowski Spacetime*. New York: Springer-Verlag, 1992.

8. Poincaré, H., *Sur la dynamique de l'électron*. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 21, 129–176, 1906.

Carlos H. Marques,
Leonardo O. Mendes,
Marcio F. A. Bortotti,
Departamento de Física,
Universidade Estadual de Maringá,
Brasil.
E-mail address: `ra67344@uem.br`
E-mail address: `mendes_leo@live.com`
E-mail address: `fernandobortotti@gmail.com`

and

Sidiney B. Montanhano,
Josiney A. Souza,
Departamento de Matemática,
Universidade Estadual de Maringá,
Brasil.
E-mail address: `sidineybmt@gmail.com`
E-mail address: `jasouza3@uem.br`