Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) **v. 36** 2 (2018): 169–183.
©SPM –ISSN-2175-1188 on line ISSN-00378712 in press
SPM: www.spm.uem.br/bspm doi:10.5269/bspm.v36i2.30896

Un Método Algoritmo para el cálculo del número baricéntrico de Ramsey para el grafo estrella

F. Villarroel, J. Figueroa, H. Márquez y A. Anselmi

ABSTRACT: Let G be an abelian finite group and H be a graph. A sequence in G, with length al least two, is barycentric if it contains an "average" element of its terms. Within the context of these sequences, one defines the barycentric Ramsey number, denoted by $BR(H,G)$, as the smallest positive integer t such that any coloration of the edges of the complete graph K_t with elements of G produces a barycentric copy of the graph H. In this work we present a method based on the combinatorial theory and on the definition of barycentric Ramsey for calculating exact values of the above metioned constant, for some small graphs where the order is less than or equal to 8. We will exemplify the case where H is the star graph $K_{1,k}$, and where G is the cyclical group $\mathbb{Z}_n$, with $3 \leq n \leq 11$ and $3 \leq k \leq n$.

Key Words: Finite Abelian group, Barycentric sequences, Barycentric Ramsey numbers, Star Graph.

Contents

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35B40, 35L70.
Submitted February 07, 2016. Published July 18, 2016

1. Introducción

Sea G un grupo abeliano finito de orden n, una secuencia S de elementos de G, es aquella donde la repetición de elementos es permitida y el orden de colocación no se considera. Sea $|S|$ la longitud o cardinalidad de S y $\sum S = \{\sigma(A) : A \subset S\}$, donde $\sigma(A)$ es la suma de los elementos de A. Cuando $\sigma(A) = 0$, se dice que A es de suma cero.

El primer resultado sobre Problemas de Suma Cero, es el denominado por Erdös lema prehistórico: Sea G un grupo abeliano de orden n. Entonces toda secuencia de n elementos contiene una subsecuencia de suma cero.

Este resultado constituye la base fundamental en el desarrollo del área de investigación denominada Problemas de Suma Cero, la cual está inmersa en el campo de la Teoría Combinatoria.

En 1961, es cuando aparece por primera vez, la definición de secuencia de suma cero, la cual se atribuye a Erdös- Ginzburg - Ziv [7], y además, dan el siguiente resultado:

Toda secuencia con longitud $2n - 1$ contiene una subsecuencia de longitud n y de suma cero en G.

Este resultado puede considerarse como el origen de los denominados “problemas de suma cero”. Con el nacimiento de esta teoria en el año 1961 aparece la constante de suma cero, $ZS(G)$, es decir, el menor entero positivo t tal que toda secuencia de longitud t contiene una subsecuencia de longitud $|G| = n$ y de suma cero.

Las secuencias con peso están formadas por términos de la forma $w_i a_i$ donde los a_i son elementos de G y los coeficientes w_i pesos son enteros positivos que aparecen primeramente en la conjetura de Caro. Esto servirá como inicio a lo que llamaremos problemas baricéntricos.

En 1996 Hamidoune [11], demostró la conjetura de Caro con la condición adicional $(w_i, n) = 1 \ \forall i$. En 2006 David Grynkiewiez en [9] la demuestra.

El hecho que Hamidoune, demostrara parcialmente la conjetura de Caro, permitió a Ordaz introducir la definición de secuencias k-baricéntricas, estás se definen como:

Sea G un grupo de orden $n \geq 2$ y A un conjunto finito $|A| \geq 2$. Una secuencia $f : A \to G$ es baricéntrica si existe $a \in A$ que verifica $\sum f = |a| f(a)$. El elemento $f(a)$ se llama baricentro. Cuando $|A| = k$ hablamos de secuencia k-baricéntrica y cuando f es inyectiva hablamos del conjunto k-baricéntrico.

Por ejemplo en el grupo Z_9, el conjunto 012345 es 6-baricéntrico, ya que $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 6 = 6 \cdot 1$ y el baricentro es 1. Sin embargo, el conjunto 012347 no es 6-baricéntrico, ya que $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 7 = 8$ y $8 \neq 6 \cdot 0 = 0$, $8 \neq 6 \cdot 1 = 6$, $8 \neq 6 \cdot 2 = 3$, $8 \neq 6 \cdot 3 = 0$, $8 \neq 6 \cdot 4 = 6$, y $8 \neq 6 \cdot 5 = 3$.

La definición de secuencias k-baricéntricas da inicio a los denominados problemas baricéntricos. Es importante señalar que las secuencias baricéntricas generalizan a las secuencias de suma cero cuando su longitud es un múltiplo del orden del grupo donde están definidas.

El estudio de las secuencias k-baricéntricas se inician en [5] y [6]. En [6] la constante de Davenport Baricéntrica, $BD(G)$, es decir, el menor entero positivo t tal que toda t-secuencia en G contiene una subsecuencia baricéntrica. En [5] la constante de Davenport k-baricéntrica, $BD(k, G)$, se define como el menor entero positivo t tal que toda t-secuencia en G contiene una subsecuencia k-baricéntrica.

Haciendo uso de los problemas de suma cero se ha desarrollado la teoría de Ramsey de suma cero, la cual ofrece generalizaciones combinatorias del teorema de Erdös- Ginzburg - Ziv.

En 1992 Bialostocki y Dierker [1] inspirados por el teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv [7] definen el número de Ramsey de suma cero $R(H, Z_n)$ como el menor entero positivo t tal que cualquier coloración $C : E(K_t) \to Z_n$ de los lados del grafo completo K_t con elementos de Z_n, produce una copia H_0 de H tal que: $\sum\limits_{e \in E(H)} C(e) = 0$

Este concepto se puede extender a cualquier grupo abeliano G de orden n. Grandes investigadores han apoyado el estudio de los números de Ramsey de suma cero tales como: Caro [3, 4], Bialostocki - Dierker [1], Hamidoune [10, 11], y S. González [2], entre otros.

En 1992 Caro [3], y en el mismo año Bialostocki y P. Dierker [1], demostraron el llamado "Teorema de Ramsey de suma cero el cual se enuncia de la siguiente manera: Sea G un grafo de k lados y Z_n el grupo cíclico de orden n, n y k dos enteros positivos tales que $2 \leq n \leq k$, si n divide k, entonces:

$$R(k_{1,n}, Z_k) = \begin{cases} n + k - 1 & si \quad n \equiv k \equiv 0(mod\ \ 2) \\ n + k & en \quad otros\ \ casos. \end{cases}$$

Para $n = k$, este número fue calculado por Bialostocki, Dierker [1], en el 1992, y en el caso general para (n múltiplo de k) por Y. Caro en el mismo año por González [8]. El resultado de la prueba del teorema de suma cero dado en [3] inspiraron a Delorme, Fernández de La Vega y Ordaz en 1995 para definir un nuevo número Ramsey, asociado a un grafo H y a un grupo abeliano G de orden n (sin exigir que $E|H| \equiv 0(mod\ \ \text{n})$), reemplazando, además, la condición de suma cero en la definición de $R(H, Z_n)$.

En 1996, surge en el Centro ISYS de la Universidad Central de Venezuela la teoría baricéntrica de Ramsey, la cual constituye un área nueva dentro de la combinatoria y, específicamente dentro de la teoría de Ramsey que proviene del teorema de Hamidoune en 1996 dado en [11].

El número baricéntrico de Ramsey introducido en $[1, 8, 12]$ se define como el menor entero positivo t tal que cualquier coloración $c : E(K_t) \to G$ de los lados del grafo completo K_t con elementos de G produce una copia H_0 de H con un lado e_0 tal que se verifica:

$$\sum_{e \in E(H_0)} c(e) = kc(e_0) \tag{1}$$

En [12] se presenta un método algorítmico para el cálculo de $BR(H, Z_n)$, con $H = K_{1,k}$ el grafo estrella.

Usando como base fundamental los teoremas y definiciones, se presenta ahora un nuevo algoritmo para hallar los números baricéntricos de Ramsey para el grafo estrella, obteniendo resultados óptimos, ya que anteriormente los cálculos se realizaron manualmente. Además se presentan las cotas inferiores y el tiempo de ejecución. Posteriormente se muestra los resultados obtenidos con un programa computacional desarrollado en MUPAD.

2. Método

El proceso para obtener el $BR(K_{1,k}, Z_n)$ es el siguiente: Se elige $t = k+1$ como el menor números de lados y n el número de coloraciones, con estos dos números n y t se busca el número de combinacion con repetición, es decir,

$$CR_t^n = \binom{n+t-1}{t} = \frac{(n+t-1)!}{t!(n+t-1-t)!} = \frac{(n+t-1)!}{t!(n-1)!},$$

ahora con los elementos de Z_n se hallan todas las posibles combinaciones o secuencias de longitud t, con estas secuencias se colorean los lados del subgrafo, a cada una de estas coloraciones se le aplica nuevamente combinación con repetición, luego a estas últimas combinaciones se les aplican la definición baricéntrica, es decir,

$$\sum_{e \in E(H_0)} f(e) = kf(e),$$

con esto se busca identificar un $K_{1,k}$ baricéntrico en un $K_{1,t}$.

3. Algoritmo que calcula los números Baricéntricos de Ramsey para el grafo estrella

Paso 1 Inicio

Paso 2 Leer n, k, $t = k + 1$, t: el menor número de lados, CR_t^n :es el número de combinación con repetición, S: Suma baricéntrica y $F : Verdad$

Paso 3 Si $t = k + 1 \wedge F$, entonces

3.1 **Combina**

3.2 **Combinate**

3.3 **Suma Baricéntrica**

Mientras $(t < |S| + 1 \wedge F)$ hacer
Si t es baricéntrico, entonces
$BR(K_{1,k}, Z_n) = t + 1$
FinSi
Sino
$t = t + 1$
Si $t = |S| + 1$, entonces $F =$ falso
FinSi
FinMientras

Paso 4 FinSi

Paso 5 Escribir $BR(K_{1,k}, Z_n) = t + 1$

Paso 6 Fin algoritmo

Observación.

Combina: Calcula el número de combinaciones con repetición de t lados y n colores.

Combinate: Forma todas las posibles lista de secuencias con repetición de longitud t con elementos del conjunto $Z_n = \{0, 1, 2, \cdots, k, \cdots, n - 1\}$.

Suma Baricéntrica: Expresa la suma de los k elementos de la secuencia como el producto por el baricéntro, es decir, ($\sum_{e \in E(H_0)} f(e) = kf(e)$).

4. Ejemplo de la Aplicación del Método Algoritmico

Paso 1 Inicio

Paso 2 Leer $n = 4$ y $k = 3$

Paso 3 Si $t = 3 + 1 = 4 \wedge F$, entonces

3.1 **Combina**

$$CR_4^4 = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$$

3.2 **Combinate lista de** ($Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$)

{0,0,0,0}	{0,0,0,1}	{0,0,0,2}	{0,0,0,3}
{0,0,1,1}	{0,0,1,2}	{0,0,1,3}	{0,0,2,2}
{0,0,2,3}	{0,0,3,3}	{0,1,1,1}	{0,1,1,2}
{0,1,1,3}	{0,1,2,2}	{0,1,2,3}	{0,1,3,3}
{0,2,2,2}	{0,2,2,3}	{0,2,3,3}	{0,3,3,3}
{1,1,1,1}	{1,1,1,2}	{1,1,1,3}	{1,1,2,2}
{1,1,2,3}	{1,1,3,3}	{1,2,2,2}	{1,2,2,3}
{1,2,3,3}	{1,3,3,3}	{2,2,2,2}	{2,2,2,3}
{2,2,3,3}	{2,3,3,3}	{3,3,3,3}	

3.3 **Suma Baricéntrica** (S)

Observe que tadas las secuencias son 3−baricéntrca menos esta $\{0, 0, 1, 1\}$ que falla, pues.

001, $0 + 0 + 1 = 1$, pero $1 \neq 3x1$ y $1 \neq 3x0$.

011, $0 + 1 + 1 = 2$, pero $2 \neq 3x0$, y $2 \neq 3x1$, además $2 \notin \{0, 1, 1\}$.

Asi la secuencia $\{0, 0, 1, 1\}$ no es 3-baricéntrica.

Mientras $(t < |S| + 1 \wedge F)$ hacer

$t = 4 + 1 = 5$

3.3.1 **Combina**

$$CR_5^4 = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56$$

3.3.2 **Combinate lista de** ($Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$)

{0,0,0,0,0}	{0,0,0,0,1}	{0,0,0,0,2}	{0,0,0,0,3}
{0,0,0,1,1}	{0,0,0,1,2}	{0,0,0,1,3}	{0,0,0,2,2}
{0,0,0,2,3}	{0,0,0,3,3}	{0,0,1,1,1}	{0,0,1,1,2}
{0,0,1,1,3}	{0,0,1,2,2}	{0,0,1,2,3}	{0,0,1,3,3}
{0,0,2,2,2}	{0,0,2,2,3}	{0,0,2,3,3}	{0,0,3,3,3}
{0,1,1,1,1}	{0,1,1,1,2}	{0,1,1,1,3}	{0,1,1,2,2}
{0,1,1,2,3}	{0,1,1,3,3}	{0,1,2,2,2}	{0,1,2,2,3}
{0,1,2,3,3}	{0,1,3,3,3}	{0,2,2,2,2}	{0,2,2,2,3}
{0,2,2,3,3}	{0,2,3,3,3}	{0,3,3,3,3}	{1,1,1,1,1}
{1,1,1,1,2}	{1,1,1,1,3}	{1,1,1,2,2}	{1,1,1,2,3}
{1,1,1,3,3}	{1,1,2,2,2}	{1,1,2,2,3}	{1,1,2,3,3}
{1,1,3,3,3}	{1,2,2,2,2}	{1,2,2,2,3}	{1,2,2,3,3}
{1,2,3,3,3}	{1,3,3,3,3}	{2,2,2,2,2}	{2,2,2,2,3}
{2,2,2,3,3}	{2,2,3,3,3}	{2,3,3,3,3}	{3,3,3,3,3}

3.3.3 Suma baricéntrica:

Esta secuencia es baricéntrica $\{0, 0, 0, 1, 1\}$, pues

000: $0 + 0 + 0 = 0 = 3x0$, es $3-$baricéntrica, donde el baricéntro es 0.

Si $t = |S| + 1$, entonces $F =$ falso

FinSi

FinMientras

Paso 4 FinSi

Paso 5 Escribir $BR(K_{1,3}, Z_4) = 6$

Paso 6 Fin algoritmo

Esto es, sí coloreamos los lados del grafo completo K_6, usando todas las secuencias con repetición de las quintuplas halladas anteriormente, siempre es posible extraer un $K_{1,3}$ baricéntrico del $K_{1,5}$.

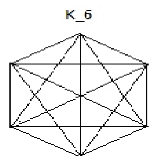

Figure 1: Representa el k_6

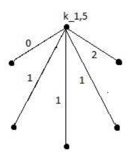

Figure 2: Representa el $K_{1,5}$

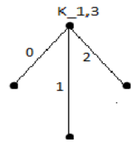

Figure 3: Representa el $K_{1,3}$ baricéntrico. Es decir, 012: $0+1+2=3\cdot 1$, es un 3-baricéntrico, donde el baricentro es 1.

5. Algoritmo en seudocódigo que calcula los números Baricéntricos de Ramsey para el grafo estrella

(Chapter head:)5.1 Programa Principal

/∗**Programa principal** ∗/

/∗ input (" Leer n: ", n): input("Leer k : ", k): ∗/

tabla := *stringlib* : : format(" cota inferior "·" k "·" n "·" "·" BR "·" *tiempo*", 60, *Right*):

$Print(Unguoted, tabla)$:

for k from 3 to 11 do

for n from k to 11 do

Secuencia := i S $i = 0, \cdots, n-1$:

$ListaZ_n := [secuencias]$:

bar := 0 : cota := [ ]: / ∗ *bar* = 0 ó 1 − >> Baricéntrico falso ó verdad ∗/

$r := k+1$:

while $r \Leftarrow (2^\star n - 1)$ and $bar = 0$ do

$tp1 := time()$:

Lista := *combinat* : : *subwords* : : *lista*($ListaZ_n$, r, *Repeat* :) /⋆ Lista: Secuencias con repetición ⋆ /

Cord := *nops*(*Lista*):

$i := 1$:

$bar := 1$:

while ($i \Leftarrow Card$) and ($bar = 1$) do

$L := Combinat : : Subwords : : lista(Lista[i], k) : conj := \{\}$:

for j from 1 to $nops(L)$ do

$conj := conj$ union $\{L[j]\}$: /$*$ $conj.$ subsecuencia con repetición $*$/

end for:

$m := 1 : Tbar := 0 :$

Baricéntrico(); /$*$ baricéntrico: devuelve $bar = 0$ (no Baricéntrico) y $bar = 1$ (Baricéntrico)$*$/

if bar=1 then $BR := r + 1 :$

end if:

$i := i + 1 :$

end while:

$r := r + 1 :$

end while:

$tp2 := time() :$

$tp := float((tp2 - tp1)/1000) :$

$hr := trunc(tp/3600)$:

if $length(hr) \Leftarrow 1$ then $hr2 :=$ "0" $\cdot\, hr$ else $hr2 :=$ " " $\cdot\, hr$:

end if:

$mn := trunc(tp/60 - hr^*60)$:

if $lenght(mn) \Leftarrow 1$ then $mn2 :=$ "0" $\cdot\, mn$; else $mn2 :=$" "$\cdot mn$:

end if:

$sc := truenc(tp - mn^*60 - hr^*3600)$:

if $length(sc) \Leftarrow 1$ then $sc2 :=$ "0" $\cdot\, sc$;else $sc2 :=$" " $\cdot sc$:

end if:

$ms := expr2text(tp - trunc(tp))$:

$ms := strinlib : : remove(ms, ms[1], First)$:

if $length(ms) = 3$ then $ms := ms\cdot$ "0";

$eliflength(ms) = 2$ then $ms := ms \cdot'' 00''$; $eliflength(ms) = 0$ then $ms := ms\cdot$ " $\cdot 000$";

end if:

$temp :=$" " $\cdot hr2\cdot$ " : "$\cdot mn2$" : "$sc2 \cdot sm; string1a :=$" "$string2a :=$" ":$string3a$:" ":

string1b:=expr2text(k):strin2b:=expr2text(n):strin3b:=expr2text(BR): /$*$ Se manda a escribir $BR*$/

$tabla := stringi1b :\ :$ format $(cotamin \cdot string1a \cdot string1b \cdot string2a \cdot string2b \cdot string3a \cdot string3b \cdot temp, 67, Ringht) :$

Pint(Unquated,table); end:end:

(Chapter head:) 5.2 Subrutina Baricéntrica

Baricéntrico $:= proc()$

Local $s, t, suma, resul;$

while $(m \Leftarrow nops(conj))$ and $(bar = 1)$ do

$suma := 0 :$

for s from 1 to $nops(conj[m])$ do

$suma := suma + 0p(conj[m][s]) :$

if $suma > (n - k)$ then $suma := mod(suma, n) :$

end if:

end for:

$t := 1 :$

while $(t \Leftarrow nops(conj)[m]))$ do

$resul := K^\star op(conj[m][t]) :$

if $resul > (n - 1)$ then $resul := mod(K^\star op(conj[m][t]), n) :$

end if:

if $suma <> resul$ then

$Tbar := Tbar + 1 :$

end if:

t:=t+1:

end while:

if $Tbar = K^\star nops(conj)$ then

$bar := 0 :$

$cota := Lista[i] :$

$cotamin := expr2text(cota) :$

$cota := [0] \cdot cota : i := constains(Lista, cota) :$

end if:

$m := m + 1 :$

end while:

end proc:

6. Experimentos Computacionales

El algoritmo fue codificado en MuPAD Pro-versión 3.0, el cual es un manipulador algebraico desarrollado por SciFace Software y la Universidad de Paderborn, Alemania. Los resultados fueron obtenidos en una computadora Core 2 Duo con procesador a 2.2 Mhz y 2 Gb de memoria.

Se usa MuPAD porque posee una ayuda muy útil y también tiene las herramientas necesarias para programar algoritmo de optimización combinatoria.

La sintaxis es modelada en Pascal, y ésta es similar a la usada en el programa Maple de álgebra computacional. La mayor diferencia entre los dos es que MuPAD provee soporte para la programación orientada a objetos. Esto significa que cada objeto carga consigo los métodos permitidos para ser usado.

MuPAD Pro es un completo sistema de álgebra computacional para el cálculo simbólico y numérico. Además de las características comunes a todas las versiones de MuPAD, la versión Pro para Windows tiene excelentes ventajas para la anotación matemática de una manera sencilla y directa.

El MuPAD, tiene entre sus herramientas una función combinat:subwords, la cual devuelve una lista de todas las combinaciones con repetición (o sin repetición) de los elementos a partir de una secuencia de m elementos.

Esta función sirvió de gran ayuda a la hora de programar.

7. Resultados y Análisis

Las unidades de tiempo arrojadas en la ejecución son:

H: Hora, M: Minutos, S: Segundos, MS: Mili-segundos

Cota inferior	k	n	$BR(K_{1,k}; Z_n)$	Tiempo(H:M:S:MS)
{0, 0, 1, 1}	3	3	6	00:00:00:015
{0, 0, 1, 1}	3	4	6	00:00:00:047
{0, 0, 1, 1}	3	5	6	00:00:00:125
{0, 0, 1, 1}	3	6	6	00:00:00:266
{0, 0, 1, 1, 3, 3}	3	7	8	00:00:04:781
{0, 0, 1, 1, 3, 3}	3	8	8	00:00:11:719
{0, 0, 1, 1, 3, 3, 4, 4}	3	9	10	00:04:14:094
{0, 0, 1, 1, 3, 3, 4, 4}	3	10	10	00:12:48:953
{0, 0, 1, 1, 3, 3, 4, 4}	3	11	10	00:36:52:172
{0, 0, 0, 1, 1, 1}	4	4	8	00:00:00:250
{0, 0, 0, 1, 1, 1}	4	5	8	00:00:00:875
{0, 0, 0, 1, 1, 1}	4	6	8	00:00:02:469
{0, 0, 0, 1, 1, 1, 4}	4	7	9	00:00:19:094
{0, 0, 0, 1, 1, 1, 4, 5}	4	8	10	00:02:33:813
{0, 0, 0, 1, 1, 1, 4, 5}	4	9	10	00:07:07:484
{0, 0, 0, 1, 1, 1, 4, 5}	4	10	10	00:19:05:422
{0, 0, 0, 1, 1, 1, 4, 5}	4	11	10	00:50:35:672
{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1}	5	5	10	00:00:06:172
{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1}	5	6	10	00:00:21:375
{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1}	5	7	10	00:01:05:859
{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1}	5	8	10	00:03:06:797
{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1}	5	9	10	00:08:29:203
{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1}	5	10	10	00:22:20:172
{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 5}	5	11	11	04:11:09:766
{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1}	6	6	12	00:03:53:578
{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1}	6	7	12	00:13:15:797
{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1}	6	8	12	00:42:11:188
{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1}	6	9	12	03:00:38:969
{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1}	6	10	12	06:24:27:828
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1}	7	7	14	04:06:11:915
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1}	7	8	14	13:07:41:430

Tabla 1: Resultados arrojados por el algoritmo que determina los números baricéntricos de Ramsey para grafos estrellas $BR(K_{1,k}, Z_n)$, $3 \le k \le 7$ y $3 \le n \le 11$.

Observe que los resultados del $BR(K_{1,k}, Z_n)$ y las cotas inferiores determinadas por el programa son iguales a las de [12], de acuerdo con los resultados dado en la tabla (1). A continuación se tienen las siguientes figuras:

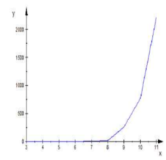

Figure 4: Valores del $BR(K_{1,k}, Z_n)$ para $k = 3$ fijo y $3 \leq n \leq 11$

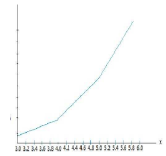

Figure 5: Valores del $BR(K_{1,k}, Z_n)$ para $k = 3$ fijo y $3 \leq n \leq 6$

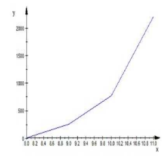

Figure 6: Valores del $BR(K_{1,k}, Z_n)$ para $k = 3$ fijo y $8 \leq n \leq 11$

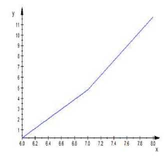

Figure 7: Valores del $BR(K_{1,k}, Z_n)$ para $k = 3$ fijo y $6 \leq n \leq 8$

En las figuras el eje horizontal representa a n el tamaño del grupo o los elementos de coloración y el eje vértical el tiempo de ejecución.

En la primera figura se observa que para k: fijo y $BR(K_{1,k}, Z_n)$: variando ella adquiere un comportamiento exponencial para $3 \leq n \leq 11$. En las otras tres figuras se fijo el valor del $BR(K_{1,k}, Z_n)$, se observa que para k: fijo, adquiere un comportamiento polinomial. Esto ocurre de manera general para cualquier valor de k. Por ejemplo, para $k = 4$, el $BR(K_{1,k}, Z_n)$ se mantuvo fijo en 8 desde $4 \leq n \leq 6$ y, $t = 250$:milesimas de segundos.

Para el siguiente valor $n = 7$, el tiempo aumenta aproximadamente el triple, pero el tiempo fue superior a lo esperado debido a que el $BR(K_{1,k}, Z_n)$ aumenta de 8 a 9, la figura para este caso tiener un crecimiento brusco.

Es de hacer notar que para los últimos valores de la tabla, es decir, para $k = 7$ y $n = 7$ el tiempo es de un poco más de cuatro horas y para $n = 8$ el tiempo es aproximadamente el triple, ya que el $BR(K_{1,k}, Z_n)$ se mantuvo constante. Si el valor del $BR(K_{1,k}, Z_n)$ es 14 para $n = 9$, tardaria aproximadamente 40 horas, pero si el $BR(K_{1,k}, Z_n)$ no se mantiene constante, tardaría mucho más. Debido a esta situación es claro que el algoritmo para valores mayores de $k > 11$ y $n > 11$, es intratable. Por esta razón no se lograron obtener más resultados.

Quedara abierta las posibilidades de un proceso de optimización para obtener resultados en poco tiempo de los números baricéntricos de Ramsey con n, $k > 11$, también quedará abierta las posibilidades del paralelismo para compartir el trabajo de calcular dichos números.

8. Bibliografía

References

1. A. Bialostocki and P. Dierker, *On the Erdös-Gizburg-Ziv theorem and the Ramsey numbers for stars and matchings*, Discrete Math. 110 (1992)no.1-3, 1-8.

2. Camaroto T. Agastina M. *Grafos con Estrellas de Suma Nula* Tesis de Maestria. Universidad Central de Venezuela Caracas, Febrero de 1996.

3. Y. Caro, *On zero-sum Ramsey numbers stars*, Discrete Math. 104 (1992), 1-6.

4. Y. Caro, *Zero-sum problems: a survey*, Discrete Math. 152 (1996), no. 1-3, 93-113.

5. C. Delorme, S.González, O. Ordaz, and M. Valera et al, *Barycentric sequences and barycentric Ramsey numbers stars*, Discrete Math. 277 (2004), no. 1-3, 45-56.

6. C. Delorme, I. Márquez, O. Ordaz, and A. Ortuño et al, *Existence conditions for barycentric sequences*, Discrete Math. 281 (2004), no. 1-3, 163-172.

7. Erdös, A. Ginzburg, and A.Ziv, Theorem in the additive number Theory, Bull. Res.Council Israel 10, (1961).

8. S. González, *Número de Ramsey Baricéntrico* Trabajo de Grado, Universidad Central de Venezuela. Caracas, Octubre (1998).

9. D. J. Grynkiewiez, A. Weighted versión *Erdös-Ginzburg-Ziv Theorem Combinatorica.* 4 (2006) 445-453.

10. Y. Hamidounne, *Conbinatorial problems on Sequence Sums*, CNRS, París, June 4, 1993.

11. Y. O. Hamidoune, *On weighted sums in abelian groups*, Discrete Math. 162 (1996), no. $1-3$, $127-132$.

12. F. Villarroel, *La constante de Olson k-baricéntrica y un teorema inver- so de Erdös-Ginzburg-ziv* Tesis doctoral. Universidad central de Venezuela Caracas Abril (2008).

Departamento de Matemáticas,
Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre ,
Cumaná 6101-A, Apartado 245, Venezuela
E-mail address: feliciavillarroel@gmail.com

and

Departamento de Química,
Universidad Politécnica "Clodosbaldo Russián,
Cumaná 6101-A, Apartado 245, Venezuela
E-mail address: figueroa2303@gmail.com

and

Departamento de Matemáticas,
Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre,
Cumaná 6101-A, Apartado 245, Venezuela
E-mail address: henrylmarquez@gmail.com

and

Departamento de Matemáticas,
Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre,
Cumaná 6101-A, Apartado 245, Venezuela
E-mail address: alanselm2010@gmail.com