



## Aplicações da Teoria de Lie à Geometria Simplética

Elizabeth Terezinha Gasparim e Carlos Augusto Bassani Varea<sup>1</sup>

**ABSTRACT:** Estas são notas de aula para um minicurso de verão apresentado na Universidade Estadual de Maringá em 2015. Os objetivos do minicurso foram: chegar de maneira rápida a temas atuais de pesquisa em geometria e discutir problemas em aberto.

**Key Words:** Variedades simpléticas, diamantes de Hodge, fibrações de Lefschetz.

### Contents

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| <b>1</b>  | <b>Introdução</b>                        | <b>141</b> |
| <b>2</b>  | <b>Homotopias e fibrações</b>            | <b>143</b> |
| <b>3</b>  | <b>Teorema da bola cabeluda</b>          | <b>144</b> |
| <b>4</b>  | <b>Fibrações de Lefschetz</b>            | <b>146</b> |
| <b>5</b>  | <b>Homologia</b>                         | <b>148</b> |
| <b>6</b>  | <b>Grupo fundamental</b>                 | <b>151</b> |
| <b>7</b>  | <b>Representação de grupos</b>           | <b>152</b> |
| <b>8</b>  | <b>Representação de monodromia</b>       | <b>152</b> |
| <b>9</b>  | <b>Cohomologias e diamantes de Hodge</b> | <b>154</b> |
| <b>10</b> | <b>Cálculos de diamantes de Hodge</b>    | <b>157</b> |

### 1. Introdução

Expressamos aqui nosso sincero agradecimento ao pessoal da UEM pela excelente hospitalidade e pela oportunidade de poder contribuir com estas notas de aula para publicação no boletim de matemática que é paranaense, como somos nós.

---

<sup>1</sup> Os autores agradecem os auxílios recebidos da Universidade Estadual de Maringá e do programa Network NT8, Office of External Activities, International Centre for Theoretical Physics, Italia.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 35B40, 35L70.

Submitted August 09, 2016. Published February 28, 2018

As aplicações que queremos apresentar apareceram recentemente em trabalhos de Callander, Gasparim, Grama, e San Martin [C], [CG], [GGSM1], [GGSM2]. Uma versão resumida destes resultados está em [CGGSM].

Apresentaremos o curso no formato de trabalho de um pesquisador. A pesquisa científica muitas vezes acontece assim: primeiro encontramos um resultado motivador que nos deixa curioso, e então saímos procurando como entender detalhes, buscamos definições, estudamos teorias básicas, lemos alguns livros, páginas da wikipédia, perguntamos a amigos, etc; seja lá o que for que nos ajude a compreender o texto. Cada vez que compreendemos mais uma parte da teoria, voltamos a reler o resultado que nos interessa, e assim avançamos até entender os detalhes. Propomos estudarmos o seguinte resultado motivador:

★ **Teorema** [GGSM1] Seja  $\mathfrak{h}$  a subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie complexa semissimples. Sejam dados  $H_0 \in \mathfrak{h}$  e  $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  com  $H$  um elemento regular. A função altura  $f_H: \mathcal{O}(H_0) \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f_H(x) = \langle H, x \rangle \quad x \in \mathcal{O}(H_0)$$

tem um número finito ( $= |\mathcal{W}|/|\mathcal{W}_{H_0}|$ ) de singularidades isoladas e dá a  $\mathcal{O}(H_0)$  uma estrutura de fibração de Lefschetz simplética.

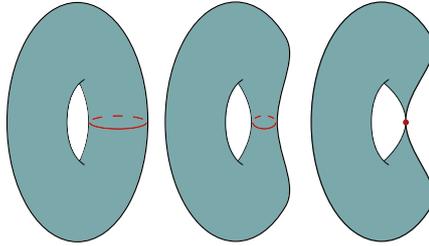


Figure 1: Fibras associadas à uma fibração de Lefschetz

Uma das razões pelas quais este resultado é interessante é que ele combina duas áreas distintas da matemática: a teoria de Lie e a geometria simplética.

Queremos aproveitar os exemplos dados por este teorema para ilustrar conceitos de topologia algébrica básica de maneira nova. Se lemos sobre homologia, homotopia, ou cohomologia, os livros textos sempre dão os mesmos exemplos:  $\mathbb{R}^n$ , esferas  $S^n$ , espaços projetivos reais  $\mathbb{R}P^n$ , espaços projetivos complexos  $\mathbb{C}P^n$  e superfícies de Riemann. Ficamos com a impressão errada de que estas teorias terminaram no século passado, e não é óbvio como conectar estes temas com algo atual. Aplicando este teorema às órbitas adjuntas de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  e  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  vamos apresentar exemplos novos onde estes conceitos de topologia algébrica fazem conexão com problemas abertos de matemática atual de ponta relacionada com a famosa Conjectura Homológica da Simetria Especular de Kontsevich. Ou seja, queremos tentar fazer um atalho no qual se vai rapidamente de topologia básica para conjecturas famosas.

Vamos passar a maior parte do tempo explicando conceitos básicos de topologia e geometria, e pretendemos dar muitos exemplos. Na última aula queremos escr-

ever alguns diamantes de Hodge e mostrar como podemos calcular tais diamantes diretamente no computador usando conceitos simples de geometria algébrica.

### 2. Homotopias e fibrações

Relendo nosso teorema  $\star$  vemos que a conclusão é de que certos espaços tem estrutura de fibrações de Lefschetz. Claramente a conclusão é a parte mais importante do resultado, portanto a primeira coisa que o pesquisador vai estudar. Logo, nosso primeiro objetivo é o de entender o que é uma fibração de Lefschetz. A propriedade mais importante de uma fibração é que ela satisfaz a propriedade do levantamento de homotopias. Seja  $I = [0, 1]$  com a topologia usual induzida da reta.

**Definition 2.1.** *Sejam  $E$  e  $B$  espaços topológicos. Uma **fibração** sobre  $B$  é uma sobrejeção contínua  $p: E \rightarrow B$  tal que para cada homotopia  $H: X \times I \rightarrow B$  e para cada aplicação  $\tilde{H}_0: X \rightarrow E$ , existe uma homotopia  $\tilde{H}: X \times I \rightarrow E$  satisfazendo  $p \circ \tilde{H} = H$  e  $\tilde{H}|_{X \times \{0\}} = \tilde{H}_0$ . Dizemos que  $\tilde{H}$  levanta  $H$ , e  $E$  chama-se o espaço total da fibração.*

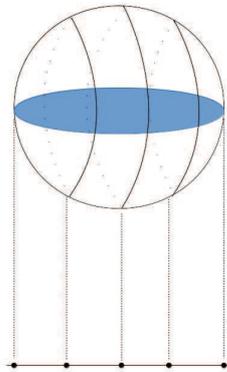


Figure 2: Uma fibração da esfera

Agora precisamos definir homotopia. Além disto, em seguida vamos necessitar o conceito de grupo fundamental para definir a representação de isotopia da fibração.

**Definition 2.2.** *Sejam  $f, g: X \rightarrow Y$  duas aplicações contínuas. Uma **homotopia** entre  $f$  e  $g$  é uma aplicação contínua  $H: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $H(t, 0) = f(t)$  e  $H(t, 1) = g(t)$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  são homotópicas e denotamos isto por  $f \sim g$ .*

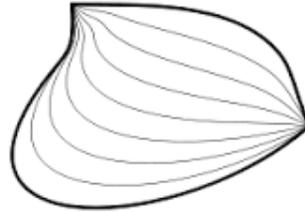


Figure 3: Homotopia entre caminhos

**Definition 2.3.** Um espaço topológico  $X$  é **contrátil** se a aplicação identidade em  $X$  é homotópica a uma aplicação constante.

**Example 2.4.** O espaço  $\mathbb{R}^n$  é contrátil.

**Definition 2.5.** Dizemos que dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  são **homotopicamente equivalentes** se existem aplicações  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow X$  tais que  $g \circ f \sim id_X$  e  $f \circ g \sim id_Y$ .

**Example 2.6.** Todo espaço contrátil é homotopicamente equivalente a um ponto.

**Example 2.7.** O espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  sem a origem,  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , é homotopicamente equivalente à esfera  $S^{n-1}$ .

### 3. Teorema da bola cabeluda

Dada uma aplicação diferenciável  $f: M \rightarrow N$  entre variedades compactas orientadas de mesma dimensão e um ponto regular  $x$  de  $f$  definimos o sinal em  $x$  como

$$\text{sg}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } \det(\text{Jac}(f(x))) > 0 \\ -1 & \text{se } \det(\text{Jac}(f(x))) < 0 \end{cases} .$$

**Definition 3.1.** Seja  $y$  um valor regular de  $f$ , sabemos que existe pelo teorema de Sard. O **grau** (diferenciável) de  $f$  é o inteiro  $\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sg}(x)$ .

**Example 3.2.** A aplicação identidade tem grau 1.

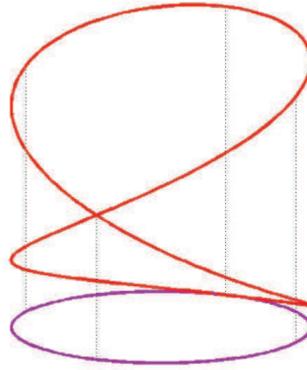


Figure 4: Exemplo de aplicação com grau 2

**Example 3.3.** A aplicação antípoda  $p \mapsto -p$  na esfera  $S^n$  tem grau  $(-1)^{n+1}$ .

**Remark 3.4.** Um fato básico é que aplicações homotópicas tem o mesmo grau. Portanto nas esferas  $S^n$  com  $n$  par, a aplicação antípoda não é homotópica à identidade.

Veremos outra definição de grau, que vale em maior generalidade para quaisquer aplicações contínuas. Para o caso especial de aplicações entre esferas vale também a recíproca. De fato:

**Teorema de Hopf:** Sejam  $f, g: S^n \rightarrow S^n$  aplicações contínuas. Então  $f \sim g$  se e somente se  $\deg(f) = \deg(g)$ .

Vamos assumir este teorema sem demonstração, e usá-lo para provar o teorema da bola cabeluda, segundo o qual não se pode pentear os cabelos de uma esfera cabeluda sem deixar redemoinhos.

**Teorema:** Todo campo diferenciável de vetores tangentes à esfera  $S^{2n}$  tem ao menos um zero.

*Demonstração:* Suponhamos que  $\sigma$  é um campo de vetores tangentes na esfera  $S^{2n}$  sem zeros. Uma homotopia entre a aplicação identidade e a antípoda é obtida movendo cada  $x \in S^{2n}$  ao longo da geodésica (círculo máximo) na direção de  $\sigma(x)$  até chegar a  $-x$ . Mas isto contradiz a observação 3.4.

Uma maneira menos deselegante de descrever esta aplicação é a afirmação de que a todo momento existe sempre um local na terra onde o vento não sopra.

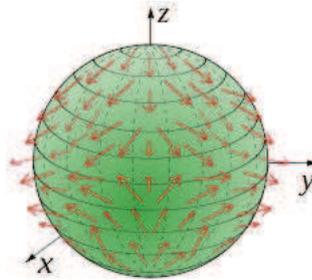


Figure 5: Campo diferenciável de vetores tangentes à esfera

#### 4. Fibrações de Lefschetz

A definição clássica de fibrações, dada em 2.1, diz que elas são sobrejeções contínuas que satisfazem a propriedade do levantamento de homotopias.

**Example 4.1.** *O tipo mais simples de fibração ocorre quando todas as fibras são difeomorfas. Mais ainda, temos o caso onde a fibração  $p: E \rightarrow B$  é localmente um produto. Seja  $F = p^{-1}(b)$  a fibra sobre um ponto  $b \in B$  e suponhamos que  $B$  seja conexo. A condição de ser uma fibração **localmente trivial** significa que cada ponto  $x \in B$  tem uma vizinhança aberta  $U_x$  tal que  $p^{-1}(U_x) \simeq U_x \times F$ . Neste caso chamamos  $E$  de um **fibrado** sobre  $B$  com fibra  $F$ .*

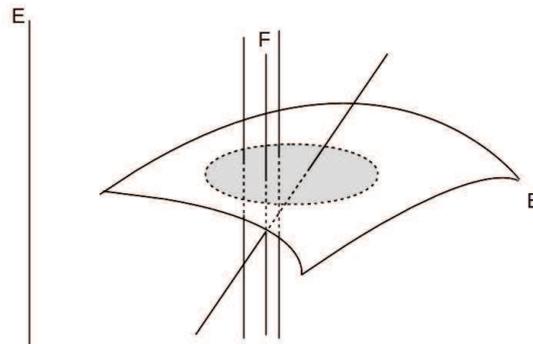


Figure 6: Exemplo de uma fibração localmente trivial

Uma das vantagens de considerarmos uma fibração  $p: E \rightarrow B$  é que o espaço total  $E$  da fibração fica descrito como uma coleção de espaços de dimensão menor, as fibras  $p^{-1}(x)$  com  $x \in B$ . Naturalmente o primeiro caso a considerar é quando  $B$  tem dimensão 1. No caso que nos interessa, o de variedades complexas, pedimos então que seja  $B = \mathbb{P}^1$  no caso compacto, ou  $B = \mathbb{C}$  no caso aberto, e gostaríamos que as fibras fossem subvariedades lisas de  $E$ . O problema com esta escolha é que

tal tipo de fibração quase nunca acontece. O próximo passo é admitir que as fibras possuam singularidades. Resulta, de modo surpreendente, que permitindo apenas o tipo mais simples de singularidades já se abrange uma boa maioria de casos.

**Definition 4.2.** *Seja  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação diferenciável, dizemos que  $f$  tem singularidade no ponto  $a$  se todas as derivadas parciais de  $f$  se anulam em  $a$ , ou seja*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

*Dizemos que a singularidade é não degenerada se o determinante do Hessiano de  $f$  não se anula em  $a$ , ou seja*

$$\det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) \neq 0.$$

No caso real, o famoso lema de Morse diz que existe uma escolha de coordenadas tal que ao redor da singularidade não degenerada a função se escreve na forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(a) + x_1^2 + \dots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

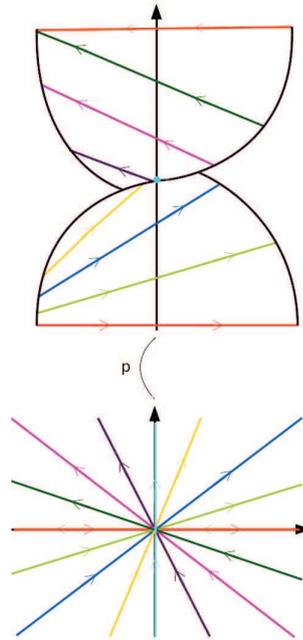
Como no caso complexo pode-se mudar  $x_j$  por  $\sqrt{-1}x_j$ , podemos escolher todos os sinais como positivos.

**Definition 4.3.** *Seja  $X$  uma variedade complexa compacta de dimensão  $n$  com uma aplicação sobrejetiva diferenciável  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Dizemos que  $f$  é uma **fibração de Lefschetz topológica** se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *A diferencial  $df$  é sobrejetiva fora de um conjunto finito de pontos  $\{Q_1, \dots, Q_\mu\}$ .*
2. *Sempre que  $p \in \mathbb{P}^1 \setminus \{f(Q_1), \dots, f(Q_\mu)\}$ , as fibras  $f^{-1}(p)$  são variedades complexas lisas homeomorfas entre si.*
3. *Para cada  $i$  existem pequenos discos  $Q_i \subset U_{Q_i}$  e coordenadas  $(x_0, \dots, x_n) \in U_{Q_i}$  tais que  $f(x_0, \dots, x_n) = f(Q_i) + x_0^2 + \dots + x_n^2$ .*
4.  *$f$  restrita às fibras regulares é localmente trivial.*

*Se além disso exigimos que  $X$  seja uma variedade simplética, que as fibras suaves sejam subvariedades simpléticas e que os cones tangentes às singularidades das fibras sejam subespaços simpléticos dos respectivos espaços tangentes, então obtemos o conceito de **fibração de Lefschetz simplética**.*

**Example 4.4.** *Donaldson [Do] mostrou que após blow-up em um número finito de pontos toda variedade simplética de dimensão real  $4$  admite uma estrutura de fibração de Lefschetz simplética.*

Figure 7: Blow-up de  $\mathbb{C}^2$  na origem

**Remark 4.5.** *Note que permitir blow-ups em alguns pontos é uma condição necessária em 4.4, por exemplo, não existe fibração  $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Uma maneira de provar isto é usando a característica de Euler, o que veremos na próxima seção.*

Nosso resultado  $\star$  dá exemplos de fibrações de Lefschetz em dimensões maiores do que 4, nos quais o espaço total da fibração é uma órbita adjunta. Dentro destas fibrações vamos querer procurar ciclos evanescentes, que vivem na homologia média da fibra regular, mas morrem na homologia da fibra singular.

## 5. Homologia

Existem muitos tipos de homologia: simplicial, singular, celular, a suporte compacto, cíclica, de Borel–Moore, de grupos, de álgebras, de Hochschild, de feixes, de Floer, de interseção, de Morse, de Steenrod, persistente, étale, etc. Cada vez escolhemos aquela que for mais adequada ao problema que precisamos tratar. Fica a pergunta geral: quando uma teoria pode ser chamada de homologia? Resposta: quando ela satisfaz os axiomas de Eilenberg–Steenrod, ver [Sp].

**Axiomas de Eilenberg–Steenrod:** Uma teoria de homologia  $(H, \partial)$  consiste de:

- Um funtor covariante da categoria de pares de espaços topológicos e aplicações para a categoria de grupos e homomorfismos de grau 0, isto é,  $(X, A) \rightarrow \{H_q(X, A)\}$ .

- Uma transformação natural de grau  $-1$  do funtor  $H$  em  $(X, A)$  para o funtor  $H$  em  $(A, \emptyset)$ , isto é,  $\partial_q: H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A, \emptyset)$ .

Tais que os seguintes axiomas sejam satisfeitos:

1. **Axioma de homotopia** Se  $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são homotópicas, então  $H(f_0) = H(f_1): H(X, A) \rightarrow H(Y, B)$ .
2. **Axioma de exatidão** Para cada par  $(X, A)$  com inclusões  $i: A \subset X$  e  $j \subset (X, A)$  existe uma sequência exata

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+1}(X,A)} H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_q(X,A)} H_{q-1}(A) \xrightarrow{H_{q-1}(i)} \dots$$

3. **Axioma de excisão** Para cada par  $(X, A)$ , se  $U$  é um subconjunto aberto em  $X$  tal que  $\overline{U} \subset \text{int}(A)$ , então a aplicação de excisão  $j: (X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$  induz um isomorfismo  $H(j): H(X \setminus U, A \setminus U) \simeq H(X, A)$ .
4. **Axioma de dimensão** Se  $P$  é um espaço com um ponto, então

$$H_q(P) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

Uma das consequências mais importantes destes axiomas é o teorema de Mayer–Vietoris.

**Teorema** (Mayer–Vietoris) Se  $X = A \cup B$  com  $A$  e  $B$  abertos em  $X$ , a sequência longa de Mayer–Vietoris dá  $H_*(X)$  em termos de  $H_*(A)$  e  $H_*(B)$ . A seguinte sequência longa é exata:

$$\dots \rightarrow H_q(A \cap B) \rightarrow H_q(A) \oplus H_q(B) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_{q-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

Os seguintes resultados são consequências imediatas.

**Example 5.1.** *Homologia das esferas.*

$$H_q(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = 0, n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Example 5.2.** *Seja  $X$  uma variedade compacta conexa orientável sem bordo de dimensão  $n$ . Então*

$$H_q(X) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = 0, n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma escolha de orientação da variedade  $X$  determina uma escolha de gerador em  $H_n(X)$ , chamado classe de orientação de  $X$ , que é identificado com o gerador  $1 \in \mathbb{Z}$ . Note que, pelos axiomas, o funtor  $H$  associa a cada função contínua  $f: X \rightarrow Y$  homomorfismos de grupos  $H(f): H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$  para todo  $q$ . É mais comum usar a notação  $f_* := H(f)$ . Podemos agora enunciar nossa segunda versão da definição de grau de uma aplicação.

**Definition 5.3.** *Sejam  $X$  e  $Y$  variedades compactas conexas orientadas e sem bordo de dimensão  $n$  e seja  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. O grau (topológico) de  $f$  é o inteiro  $f_*(1) \in H_n(Y) \simeq \mathbb{Z}$ .*

É um exercício interessante e não trivial mostrar que no caso em que  $f$  é diferenciável a definição 5.3 coincide com a definição 3.1.

**Homologia simplicial:**

**Definition 5.4.** *O  $n$ -simplexo standard é o fecho convexo dos  $n+1$ -pontos  $0, e_1, \dots, e_n$  em  $\mathbb{R}^n$ , onde  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  com 1 na posição  $i$ . Um  $n$ -simplexo é um polítopo de dimensão  $n$  que é o fecho convexo de um conjunto de  $n+1$  pontos. Uma  $i$ -face de um  $n$ -simplexo é o fecho convexo de um subconjunto de  $i+1$  destes pontos.*

**Definition 5.5.** *Um complexo simplicial é uma coleção  $K$  de simplexos satisfazendo*

- toda face de um simplexo em  $K$  também está em  $K$
- a interseção de 2 simplexos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  em  $K$  é uma face de ambos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

Um  $k$ -complexo simplicial é um complexo simplicial tal que a dimensão máxima de seus simplexos é  $k$ .



Figure 8: Exemplo de um 3-complexo simplicial

**Definition 5.6.** *Uma  $k$ -cadeia simplicial é uma soma formal de  $k$ -simplexos  $\sum_{i=1}^N c_i \sigma_i$  onde  $c_i \in \mathbb{Z}$  e cada  $\sigma_i$  é um  $k$ -simplexo. Denotamos por  $C_k$  o conjunto de todas as  $k$ -cadeias.*

**Definition 5.7.** *Dado um simplexo  $\sigma = \langle v^0, v^1, \dots, v^n \rangle$ , o operador bordo  $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$  é definido por:*

$$\partial_k \sigma = \sum_{i=1}^k (-1)^i \langle v^0, \dots, \hat{v}^i, \dots, v^n \rangle.$$

**Theorem 5.8.**  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ .

Demonstração Exercício.

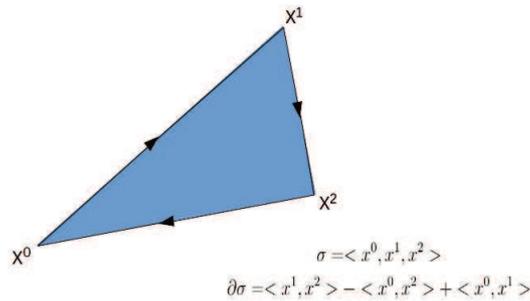


Figure 9: Exemplo de um 2-simplexo

**Definition 5.9. Ciclos:**  $Z_k = \ker \partial_k$ , **Bordos :**  $B_k = \text{im } \partial_{k+1}$ .  
 Dado um complexo simplicial  $S$ , o  $k$ -ésimo grupo de homologia de  $S$  é

$$H_k(S) = Z_k(S) / B_k(S).$$

### 6. Grupo fundamental

**Definition 6.1.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $p \in X$ . Diremos que  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  é um **laço** com base em  $p$  se  $\alpha$  é contínua e  $\alpha(0) = \alpha(1) = p$ . Denotaremos por  $\Omega(X, p)$  o conjunto de todos os laços em  $X$  com base em  $p$ .

**Definition 6.2.** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  um caminho entre  $a$  e  $b$ , e  $\beta: [0, 1] \rightarrow X$  um caminho entre  $b$  e  $c$ . A **concatenação** entre os caminhos  $\alpha$  e  $\beta$ , denotada por  $\alpha * \beta: [0, 1] \rightarrow X$ , é o caminho entre  $a$  e  $c$  definido por

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

**Theorem 6.3.** O conjunto de classes de homotopias de laços em  $p$ ,  $\pi_1(X, p)$ , com a operação de concatenação de caminhos forma um grupo.

**Definition 6.4.** O conjunto  $\pi_1(X, p)$  com a operação de concatenação de caminhos é chamado **grupo fundamental** de  $X$  com base em  $p$ .

**Example 6.5.**  $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ .

**Example 6.6.**  $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \{0\}$  para  $n \geq 2$ .

## 7. Representação de grupos

Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ . Definimos  $GL(V)$  como o conjunto dos isomorfismos de  $V$  em si mesmo, isto é,

$$GL(V) = \{\rho: V \rightarrow V | \rho \text{ é isomorfismo}\}.$$

**Definition 7.1.** *Seja  $G$  um grupo, com elemento unidade  $1$  e composição  $(g, h) \mapsto gh$ . Uma **representação** de  $G$  em  $V$  é um homomorfismo de grupos  $\rho: G \rightarrow GL(V)$ .*

Em outras palavras, a cada elemento  $g \in G$  associamos um elemento  $\rho(g) \in GL(V)$  tal que

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$$

com  $g, h \in G$ . Neste caso, dizemos que  $V$  é um espaço de representação de  $G$ .

De forma mais geral, podemos definir uma representação como sendo um homomorfismo  $\rho: G \rightarrow Iso(X)$ , onde  $X$  é uma variedade e  $Iso(X)$  é o conjunto dos isomorfismos de  $X$  em  $X$ .

**Definition 7.2.** *Seja  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  uma representação. Se a dimensão de  $V$  é finita igual a  $n$ , dizemos que o **grau** da representação  $\rho$  é  $n$ .*

**Example 7.3.** *Se considerarmos  $\rho: G \rightarrow \mathbb{C}^*$  dada por  $\rho(g) = 1$  para todo  $g \in G$ , obtemos uma representação de  $G$  que é chamada de representação trivial. Neste caso, o grau da representação é  $1$ .*

**Example 7.4.** *Suponha que  $G$  age em um conjunto finito  $X$ . Temos que, para cada  $g \in G$ , existe uma permutação  $x \mapsto gx$ , satisfazendo*

$$1x = x \quad e \quad g(hx) = (gh)x$$

para  $g, h \in G$  e  $x \in X$ .

Seja  $V$  um espaço vetorial com base  $(e_x)_{x \in X}$  indexada pelos elementos de  $X$ . Para cada  $g \in G$  seja  $\rho_g$  a aplicação linear de  $V$  em  $V$  que envia  $e_x$  em  $e_{gx}$ . Dessa forma,  $\rho_g$  é uma representação linear, chamada representação de permutação associada a  $X$ .

## 8. Representação de monodromia

Agora vamos ver como conceitos de teorias de homotopia e de homologia combinam de modo elegante para descrever a representação de monodromia em uma fibração de Lefschetz.

Começaremos com as noções de monodromia geométrica e monodromia algébrica. Suponha que temos uma fibração  $p: A \rightarrow B$  localmente trivial sobre  $B^*$ ,  $B^* \subset B$ , com fibras  $E = p^{-1}(B^*)$ . Seja  $\gamma: [0, 1] \rightarrow B^*$  um caminho de  $a$  para  $b$ . Como  $[0, 1]$  é contrátil, o fibrado  $\gamma^*E$  é trivial, portanto, existe uma aplicação

$$\Gamma: F_a \times [0, 1] \rightarrow E \hookrightarrow A$$

que levanta  $\gamma$ . Em detalhes,  $p \circ \Gamma = \gamma$ ,  $\Gamma(x, 0) = x$  para todo  $x \in F_a$ , e  $x \mapsto \Gamma(x, t)$  é um homeomorfismo  $F_a \cong F_{\gamma(t)}$  para todo  $t$ . Mais ainda, como  $\Gamma_1 := \Gamma(-, 1)$  nos dá um homeomorfismo  $F_a \cong F_b$ , ele induz um isomorfismo  $(\Gamma_1)_* : H_*(F_a) \rightarrow H_*(F_b)$ . Essa aplicação depende apenas da classe de homotopia de  $\gamma$ , assim denotamos por  $\gamma_* = (\Gamma_1)_*$ . Se  $\gamma$  é um caminho fechado, então  $\Gamma$  é chamada **monodromia geométrica** e  $\gamma_*$  é chamada **monodromia algébrica**.

Um caso particular é quando temos  $p: E \rightarrow B$  uma aplicação de recobrimento. Seja  $b \in B$ , temos que o grupo  $\pi_1(B, b)$  age sobre a fibra  $p^{-1}(b)$ . Ou seja, para cada  $\alpha \in \pi_1(B, b)$  existe um homeomorfismo  $\bar{\alpha}: p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(b)$ . Essa correspondência satisfaz:

$$\overline{\alpha * \beta} = \bar{\alpha} \circ \bar{\beta} \quad \text{e} \quad \bar{c} = id,$$

com  $\alpha, \beta, c \in \pi_1(B, b)$ , onde  $c$  representa o caminho constante em  $B$ . Portanto, temos um homomorfismo  $\rho: \pi_1(B, b) \rightarrow Iso(p^{-1}(b))$ . Esse homomorfismo é chamado de **representação de monodromia** de  $p$  em torno de  $b$ .

Agora, ao invés de considerarmos uma aplicação de recobrimento assim como foi feito acima, iremos considerar fibrações de Lefschetz. Para o que segue, fixaremos algumas notações.

Sejam  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  uma fibração de Lefschetz,  $X$  uma variedade complexa com  $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$ ,  $\{p_1, \dots, p_k\}$  o conjunto dos pontos críticos de  $f$  e denotemos por  $\mathcal{C} = \{q_1, \dots, q_k\}$  o conjunto dos valores críticos de  $f$  onde  $f(p_i) = q_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Seja  $G = \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C})$  e considere  $\lambda \in \mathbb{P}^1$  um valor regular de  $f$ . Denote por  $X_\lambda = f^{-1}(\lambda)$  fibra regular de  $f$ . Temos que existe uma ação de  $G$  sobre  $X_\lambda$ . O que faremos agora é descrever essa ação.

**Lemma 8.1.** *Considere  $\Gamma \subset \mathbb{P}^1$  um disco tal que  $\mathcal{C} \subset \Gamma$ . Para cada  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  considere  $\gamma_j$  um laço ao redor de  $q_j \in \mathcal{C}$  suficientemente pequeno, de modo que  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$  são disjuntos para  $i \neq j$ . Seja  $q \in \mathbb{P}^1$  valor regular de  $f$ . Considere  $l_j$  um caminho que conecta  $q$  e  $\gamma_j$ . Então*

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}) = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k : \prod_{i=1}^k \sigma_i = id \right\rangle,$$

onde  $\sigma_j := l_j * \gamma_j * l_j^{-1}$ .

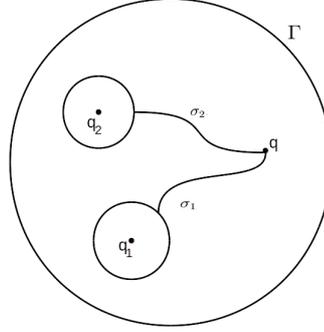


Figure 10: Construção do Lema 8.1

**Theorem 8.2. (Teorema de Picard-Lefschetz)** *Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  uma fibração de Lefschetz. Seja  $X_\lambda$  uma fibra regular de  $f$ . Temos que a ação de  $G = \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C})$  em  $H_j(X_\lambda)$  é trivial para  $j < n - 1$ . Para  $j = n - 1$  temos que a ação de  $G$  sobre  $H_{n-1}(X_\lambda)$  é determinada pelos ciclos evanescentes  $\Delta_j$ . Mais precisamente, para cada gerador  $\sigma_i$  existe um ciclo evanescente  $\Delta_i$  correspondente tal que  $\sigma_i$  age por*

$$(\sigma_i)_*(c) = c + (-1)^{n(n+1)/2} \langle c, \Delta_i \rangle \Delta_i,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o número de interseção.

**Definition 8.3.** *Seja  $X_\lambda$  uma fibra regular de uma fibração de Lefschetz  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ , onde  $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ . A **representação de monodromia** de  $f$  é o homomorfismo  $\rho: \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{C}, \lambda) \rightarrow \text{Iso}(X_\lambda)$  determinado pela ação*

$$(\sigma_i)_*(c) = c + (-1)^{n(n+1)/2} \langle c, \Delta_i \rangle \Delta_i$$

dada pelo Teorema de Picard-Lefschetz.

## 9. Cohomologias e diamantes de Hodge

Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Denote  $A^p(M, \mathbb{R})$  o espaço das formas diferenciais de grau  $p$  em  $M$ , e  $Z^p(M, \mathbb{R})$  o subespaço das  $p$ -formas fechadas. A derivação exterior  $d: A^p(M, \mathbb{R}) \rightarrow A^{p+1}(M, \mathbb{R})$  é uma transformação linear definida em  $A^p(M, \mathbb{R})$ . Como  $d^2 = 0$ , temos  $d(A^{p-1}(M, \mathbb{R})) \subset Z^p(M, \mathbb{R})$ .

**Definition 9.1.** *O grupo quociente*

$$H_{DR}^p(M, \mathbb{R}) = \frac{Z^p(M, \mathbb{R})}{dA^{p-1}(M, \mathbb{R})}$$

das formas fechadas módulo formas exatas é chamado **grupo de cohomologia de de Rham de  $M$** .

Da mesma maneira, podemos considerar  $A^p(M)$  e  $Z^p(M)$  os espaços das  $p$ -formas de valores complexos e as  $p$ -formas fechadas de valores complexos em  $M$ , respectivamente, e assim

$$H_{DR}^p(M) = \frac{Z^p(M)}{dA^{p-1}(M)}$$

sendo o espaço quociente correspondente. Daí, segue que

$$H_{DR}^p(M) = H_{DR}^p(M, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}.$$

Sobre o espaço vetorial complexo  $V = \mathbb{C}^n$  com coordenadas  $z_j = x_j + iy_j$  definimos as 1-formas

$$dz_j = dx_j + idy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - iy_j,$$

e os operadores

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Uma  $(p, q)$ -forma  $\omega$  sobre  $V$  se escreve como

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

O operador  $\partial$  leva  $\omega$  à  $(p+1, q)$ -forma

$$\partial\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}}{\partial z_j} dz_j \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

O operador  $\bar{\partial}$  leva  $\omega$  à  $(p, q+1)$ -forma

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Denotamos por  $A^{p,q}(V)$  o espaço de todas as  $(p, q)$ -formas em  $V$ , assim

$$\partial: A^{p,q}(V) \rightarrow A^{p+1,q}(V), \quad \bar{\partial}: A^{p,q}(V) \rightarrow A^{p,q+1}(V).$$

Agora, consideremos  $M$  uma variedade complexa. Podemos escrever,

$$A^n(M) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(M)$$

onde

$$A^{p,q}(M) = \{\varphi \in A^n(M) : \varphi(z) \in A^{p,q}(T_z^*(M)) \forall z \in M\}.$$

Denotaremos  $\pi^{(p,q)}: A^*(M) \rightarrow A^{p,q}(M)$  a projeção. E definimos os operadores,

$$\bar{\partial}: A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p,q+1}(M)$$

$$\partial: A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p+1,q}(M)$$

por

$$\bar{\partial} = \pi^{(p,q+1)} \circ d, \quad \partial = \pi^{(p+1,q)} \circ d.$$

Portanto,

$$d = \partial + \bar{\partial}.$$

Temos que a decomposição  $A^* = \bigoplus A^{p,q}$  é preservada por funções holomorfas. Para  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação holomorfa de variedades complexas,

$$f^*(A^{p,q}(N)) \subset A^{p,q}(M)$$

e

$$\bar{\partial} \circ f^* = f^* \circ \bar{\partial}$$

em  $A^{p,q}(N)$ . Seja  $Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$  o espaço das  $\bar{\partial}$ -formas fechadas do tipo  $(p, q)$ . Como  $\partial^2/\partial z_i \partial \bar{z}_j = \partial^2/\partial \bar{z}_j \partial z_i$ , tem-se  $\bar{\partial}^2 = 0$  em  $A^{p,q}(M)$ , e temos que

$$\bar{\partial}(A^{p,q}(M)) \subset Z_{\bar{\partial}}^{p,q+1}(M)$$

**Definition 9.2.** *Definimos o grupo de cohomologia de Dolbeault como sendo*

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) = \frac{Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)}{\bar{\partial}(A^{p,q-1}(M))}.$$

**Theorem 9.3. (Dualidade de Poincaré)** *Se  $M$  é uma  $n$ -variedade compacta, sem bordo e orientada, então*

$$H^k(M) \cong H_{n-k}(M).$$

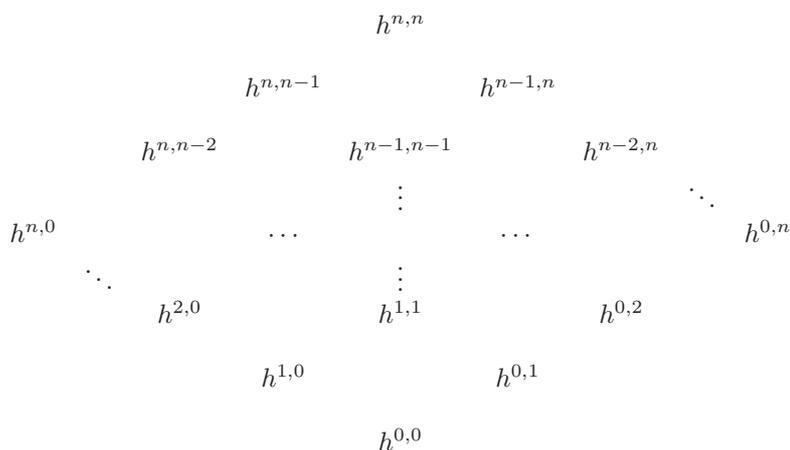
Uma variedade Hermitiana é uma variedade real com uma métrica Riemanniana que preserva estrutura complexa. Uma métrica hermitiana em uma  $n$ -variedade complexa  $M$  é dada por um produto interno hermitiano definido positivo

$$(\cdot, \cdot)_z: T_z(M) \otimes \overline{T_z(M)} \rightarrow \mathbb{C}$$

no espaço tangente holomórfico em  $z$  para cada  $z \in M$ , dependendo suavemente de  $z$ .

**Definition 9.4.** *Uma variedade Kähler é uma variedade Hermitiana cuja forma hermitiana associada é fechada. A forma hermitiana fechada é chamada métrica de Kähler.*

Seja  $M$  uma variedade Kähler compacta. Definimos os **números de Hodge** por  $h^{p,q}(M) = \dim H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ . Podemos colocar os grupos de cohomologia de  $M$  no seguinte diagrama:



denominado **diamante de Hodge**.

### 10. Cálculos de diamantes de Hodge

Apresentamos um algoritmo em Macaulay2, utilizado em [CG] e [CGGSM], que produz compactificação de órbitas adjuntas escritas como fibrações de Lefschetz simpléticas. Usamos as funções do Macaulay2 para calcular os diamantes de Hodge correspondentes, que nos dão informações topológicas sobre as fibrações de Lefschetz.

O pacote ProjAdjoint fornece algoritmos do Macaulay2 para definir compactificações de órbitas adjuntas e das fibras de suas fibrações de Lefschetz. A função hh do Macaulay2 pode ser usada para calcular os correspondentes diamantes de Hodge. Precisamos de informações topológicas dadas pelos diamantes de Hodge para estudar categorias de ciclos Lagrangianos em fibrações de Lefschetz simpléticas. Estes desempenham um papel essencial na conjectura da Simetria do Espelho Homológica, onde cada categoria aparece como a categoria de Fukaya de um modelo Landau-Ginzburg (LG). Um modelo Landau-Ginzburg é uma variedade Kähler  $X$  equipada com uma função holomorfa  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  chamada potencial. Fibrações de Lefschetz são bons exemplos de modelos LG. Na realidade, uma definição rigorosa da categoria Fukaya é conhecida somente para fibrações de Lefschetz simpléticas mas ainda não está desenvolvida em maior generalidade.

O teorema  $\star$  mostra a existência de fibrações de Lefschetz simpléticas em órbitas adjuntas de álgebras de Lie semissimples. Essas órbitas adjuntas são espaços não compactos. Especificamente, elas são isomorfas a fibrados cotangentes de variedades flag. Como o Macaulay2 calcula o diamante de Hodge para variedades compactas, precisamos compactificar essas órbitas adjuntas para fazer os cálculos. Expressando a órbita adjunta como uma variedade algébrica, homogeneizamos seu ideal para obter uma variedade projetiva que serve como nossa compactificação. Então obtemos dados topológicos para o espaço total  $X$ , assim como para as fibras de  $f$ .

**Remark 10.1.** Escolher uma compactificação é em geral uma tarefa delicada: uma escolha diferente de geradores para o ideal que define a órbita pode resultar em um diamante de Hodge completamente diferente da compactificação correspondente. Isto acontece pois a homogeneização de um ideal  $I$  pode mudar drasticamente se variarmos as escolhas dos geradores de  $I$ . Nosso pacote sempre escolhe o ideal gerado pelas entradas do polinômio minimal definindo as matrizes da órbita.

**Example 10.2.** Caso de  $H_0 = \text{Diag}(2, -1, -1) \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ .

Em  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ , considere a órbita  $\mathcal{O}(H_0)$  de

$$H_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sob a ação adjunta. Usamos o Macaulay2 para calcular o diamante de Hodge da compactificação da órbita adjunta  $\mathcal{O}(H_0)$ . Fixamos o elemento

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A função `compactOrbit` de `ProjAdjoint` leva uma entrada: uma lista de números correspondendo às entradas da diagonal da matriz  $H_0 \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . Em seguida, emite uma variedade projetiva que é uma compactificação da órbita adjunta de  $H_0$  em  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ .

A função `compactFibre` leva três entradas: duas listas de números correspondentes às entradas da diagonal das matrizes  $H$  e  $H_0$  em  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , e um número complexo  $\lambda$ . A matriz  $H$  deve ser regular. A saída é uma variedade projetiva que é uma compactificação da fibra sobre  $\lambda$ .

ÓRBITA Primeiramente, definimos nosso corpo base  $\mathbb{K}$  e nosso anel de polinômios  $R$ . Observe que o número primo 32749 é o maior primo com que o Macaulay2 pode trabalhar.

```
i1 : k = ZZ/32749;
```

```
i2 : R = k[x_1, x_2, y_1..y_3, z_1..z_3, t];
```

A variável  $t$  será usada para projetivização. Um elemento geral  $A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  tem a forma

```
i3 : A = matrix{
      {x_1, y_1, y_2},
      {z_1, x_2, y_3},
      {z_2, z_3, -x_1 - x_2}
    };
```

```
o3 : Matrix R <--- R
```

e também faremos uso da matriz identidade

```
i4 : Id = id_(k^3);
```

```
o4 : Matrix k  $\begin{matrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & k \end{matrix}$ 
```

Em nosso exemplo, a órbita adjunta  $\mathcal{O}(H_0)$  consiste de todas as matrizes com polinômio mínimo  $(A + id)(A - 2id)$ , assim estamos interessados na variedade cortada pela equação minPoly:

```
i6 : minPoly = (A + Id)*(A - 2*Id);
```

```
o6 : Matrix R  $\begin{matrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & R \end{matrix}$ 
```

```
i7 : I = ideal minPoly;
```

```
o7 : Ideal of R
```

Para obter uma projetivização de  $X$ , primeiro homogeneizamos seu ideal  $I$ , então tomamos a variedade projetiva correspondente. Saturar o ideal não altera a variedade projetiva que ele define, mas pode alterar a velocidade com que os cálculos são feitos.

```
i8 : Ihom = saturate homogenize(I,t);
```

```
o8 : Ideal of R
```

```
i9 : Xproj = Proj(R/Ihom);
```

Pode-se checar com o comando `dim Xproj` que  $\dim \overline{X} = 4$ . Para verificar que  $\overline{X}$  é não singular, usamos:

```
i10 : codim singularLocus Ihom
```

```
o10 = 9
```

Temos que a codimensão das singularidades é 9, mas a dimensão do espaço projetivo ambiente é 8, deduzimos daí que nossa variedade projetiva  $\overline{X}$  é não singular.

Agora, calculemos o diamante de Hodge de  $\overline{X}$ . Os números de Hodge  $h^{i,j}$ , para  $i + j \leq 4$ ,  $i \geq j$ , são calculados com o comando `hh^(i,j) Xproj`. Como  $\overline{X}$  é não singular, as outras entradas do diamante de Hodge são dadas pela simetria clássica,

como é mostrado abaixo.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 2 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 2 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & & & 1
 \end{array}$$

FIBRAS REGULARES Para definir as fibras regulares e críticas, precisamos do potencial, que em nosso caso é dado por:

```
i20 : potential = x_1 - x_2;
```

Os valores críticos deste potencial são  $\pm 3$  e 0. Visto que todas as fibras de uma fibração de Lefschetz simplética são isomorfas, é suficiente escolher o valor regular 1. Então definimos as fibras regulares  $X_1$  como a variedade em  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^8$  correspondente ao ideal  $J$ :

```
i21 : J = ideal(minPoly) + ideal(potential-1);
```

```
o21 : Ideal of R
```

Então homogeneizamos  $J$  para obter uma projetivização  $\overline{X}_1$  da fibra regular  $X_1$ :

```
i22 : Jhom = saturate homogenize(J,t);
```

```
o22 : Ideal of R
```

```
i23 : X1proj = Proj(R/Jhom);
```

Verificamos com o comando `dim X1proj` que  $\dim \overline{X}_1 = 3$ . Usamos o comando

```
i24 : codim singularLocus Jhom
```

```
o24 = 9
```

para testar as singularidades. Temos que a codimensão é 9, o que verifica que  $\overline{X}_1$  é não singular. Agora calculamos  $h^{i,j}$  para  $i + j \leq 3$  e  $i \geq j$  com o comando `hh^(i,j) X1proj`. Visto que  $\overline{X}_1$  é não singular, as outras entradas do diamante de Hodge são obtidas por simetrias clássicas. O diamante da fibra regular fica:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 2 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & 1
 \end{array}$$

**Remark 10.3.** *Usamos o mesmo método para calcular o diamante de Hodge para a fibra singular sobre o 0 e obtemos o mesmo diamante de Hodge das fibras regulares.*

GENERALIZAÇÃO: órbita adjunta de  $H_0 = \text{Diag}(n, -1, -1, \dots, -1)$ . Generalizamos nosso exemplo de  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  para  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ . Para obter o flag minimal, tomamos  $H_0 = \text{Diag}(n, -1, -1, \dots, -1)$  e  $H = \text{Diag}(1, -1, 0, \dots, 0)$ . Então o difeomorfismo da órbita adjunta é dado por  $\mathcal{O}(H_0) \simeq T^*\mathbb{P}^n$  (ver [GGS2]), e  $H$  dá o potencial  $x_1 - x_2$  assim como antes. Se compactificarmos esta órbita para  $\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*$ , então as classes de Hodge da compactificação são dadas por  $h^{p,p} = n+1 - |n-i|$  e os demais números de Hodge são 0. Uma aplicação do Teorema do hiperplano de Lefschetz determina todos os números de Hodge da linha central da compactificação da fibra regular.

### References

- [C] Callander, B.; *Lefschetz Fibrations*, Master's Thesis, Universidade Estadual de Campinas (2013).
- [CG] Callander, B.; Gasparim, E.; *Hodge diamonds and adjoint orbits*, arXiv:1311.1265.
- [CGGSM] Callander, B.; Gasparim, E.; Grama, L.; San Martin, L. A. B.; *Symplectic Lefschetz fibrations from a Lie theoretical viewpoint*, preprint.
- [Do] Donaldson, S. K.; *Lefschetz fibrations in symplectic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), Doc. Math. Extra Vol. II (1998), 309–314.
- [GGSM1] Gasparim, E.; Grama, L.; San Martin, L. A. B.; *Lefschetz fibrations on adjoint orbits*, arXiv:1309.4418.
- [GGSM2] Gasparim, E.; Grama, L.; San Martin, L. A. B.; *Adjoint orbits of semisimple Lie groups and Lagrangian submanifolds*, arXiv:1401.2418.
- [Sp] Spanier, E.; *Algebraic Topology*, Springer–Verlag, (1966).

*Elizabeth Terezinha Gasparim*  
 Departamento de Matemáticas,  
 Universidad Católica del Norte, Chile.  
 E-mail address: [etgasparim@gmail.com](mailto:etgasparim@gmail.com)

and

*Carlos Augusto Bassani Varea*,  
 Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica,  
 Universidade Estadual de Campinas, Brasil.  
 E-mail address: [carlosbassanivarea@gmail.com](mailto:carlosbassanivarea@gmail.com)