

## Minimización del valor en riesgo condicionado en la generación de portafolios de energía: un caso real colombiano

Luis Felipe Castañeda-Gallego, Juan Carlos Rivera\*, María Eugenia Puerta-Yepes and Luis Jaime Salazar Ramírez

**ABSTRACT:** En este artículo se presenta un modelo de programación lineal entera mixta para la optimización de un portafolio para la generación de energía eléctrica, el cual tiene en cuenta la minimización del riesgo financiero, y restricciones sobre la utilidad mínima y las diferentes tecnologías para la generación de energía eléctrica. El modelo es estocástico en la demanda, las condiciones climáticas y los precios, y el riesgo es medido usando el CVaR (Conditional Value at Risk). Para validar el modelo, se han diseñado diferentes escenarios basados en información real y supuestos acerca de los precios, la demanda y el clima. Los resultados muestran que el modelo es sensible a los cambios en la demanda, entre otros factores.

**Key Words:** CVaR, programación lineal entera mixta, optimización de portafolios, valoración de riesgo, generación de energía.

### Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Metodología</b>  | <b>4</b>  |
| 2.1      | Descripción del problema  | 4         |
| 2.2      | Modelo de optimización propuesto  | 5         |
| 2.3      | Función objetivo: minimización del riesgo   | 5         |
| 2.4      | Restricciones   | 6         |
| <b>3</b> | <b>Aplicación del modelo a un caso real de un agente generador de energía en Colombia</b> | <b>8</b>  |
| <b>4</b> | <b>Ánalisis de resultados computacionales</b>   | <b>9</b>  |
| 4.1      | Ajuste de la demanda  | 9         |
| 4.2      | Tratamiento de los precios  | 9         |
| 4.3      | Tratamiento de los costos   | 9         |
| 4.4      | Análisis de escenarios  | 10        |
| <b>5</b> | <b>Conclusiones</b>   | <b>12</b> |

### 1. Introducción

En Colombia, el Mercado Eléctrico Mayorista (MEM) se compone de cuatro eslabones de la cadena de abastecimiento de energía eléctrica: generación, transmisión, distribución y comercialización. Este artículo está enfocado a la modelación relativa a la generación de energía. En ésta los precios se determinan mediante subasta de los generadores. Los intercambios comerciales se definen en un mercado de corto plazo o spot para cada hora. Los generadores participantes presentan ofertas de precio en la bolsa, las cuales deben reflejar los costos de generación más la componente de riesgo. La competencia entre generadores es promovida por medio de la participación de agentes públicos y privados. Mayor información sobre esta subasta puede ser consultada en [6]. La desregulación de la industria energética iniciada a finales del siglo pasado y la introducción de la competencia en los mercados energéticos ha sido exitosa en términos de liquidez, eficiencia y transparencia. No obstante, la desregulación del mercado energético tiene como consecuencia un incremento de la incertidumbre. Los procesos de evolución de los precios de la energía presentan características especiales como volatilidades de un orden de magnitud mucho mayor que cualquier volatilidad en las tasas de cambio, tasas de interés o precios de acciones,

\* Corresponding author

Submitted April 28, 2022. Published August 24, 2025  
2010 *Mathematics Subject Classification*: 65K05, 90C05, 90C11, 90C90.

muestran permanentemente picos de gran magnitud, y otras propiedades que hacen de la descripción de la evolución de los precios de la energía, un proceso muy diferente a sus contrapartes financieras más estandarizadas [7].

Las metodologías de evaluación de los productos financieros implican cálculos computacionales de las funciones de los precios con respecto a alguna función de probabilidad. Por su parte, los flujos de efectivo asociados a sistemas energéticos, como plantas de generación, son comúnmente determinados como soluciones de modelos de optimización, y están sujetos a un gran número de restricciones operacionales y ambientales, lo que hace de la valoración y particularmente de la cobertura del riesgo tareas excepcionalmente complicadas y no estandarizadas. El éxito de los modelos cuantitativos en los mercados financieros ha llevado a los investigadores a adaptar dichos modelos a las necesidades de los mercados energéticos. Sin embargo, estos últimos demandan el desarrollo de herramientas analíticas nuevas y eficientes hechas a la medida. Estas metodologías de modelado deben ser capaces de combinar las mejores características de los modelos financieros con las de los modelos usados en la industria energética con el objetivo de administrar el riesgo de forma eficiente [7].

Por ejemplo, en Awerbuch y Berger (2003) [2] se presenta un estudio basado en la teoría de portafolios de tipo media-varianza y se evalúa su potencial aplicación para el diseño de portafolios óptimos de generación de energía en la Unión Europea, considerando objetivos relativos a la seguridad y diversificación energética. Además, se consideran los riesgos de generación relativos al combustible, la operación y el mantenimiento, y costos de construcción. Igualmente muestra los efectos de combinar los métodos tradicionales de generación con nuevas tecnologías renovables.

Awerbuch (2006) [3] estudia cómo se puede mejorar el uso de diferentes tecnologías de generación de energía eléctrica al usar proporciones adicionales de energía eólica, geotérmica y otras renovables. Al ser comparadas con las tradicionales (tecnologías basadas en energía fósil), los portafolios óptimos reducen los costos de generación a medida que se incrementan los porcentajes de generación de energías renovables.

En Kienzle *et al.* (2007) [13] analizan la eficiencia de los portafolios de generación de energía de BKW, empresa de servicios públicos suiza. En dicho estudio se aplica la teoría de portafolios de media-varianza a las entonces actuales y posibles futuras proporciones de generación de energía. El estudio se basa en cambios relativos de los costos de generación complementado con un análisis de los entonces actuales costos de generación.

Carrión *et al.* (2007) [5] ofrecen una técnica basada en programación estocástica para resolver el problema de optimización de la adquisición de energía eléctrica por parte de un gran consumidor.

En Muñoz-Hernández *et al.* (2009) [19] se presenta un modelo de inversión en una cartera de energías renovables dentro del mercado de electricidad español con el fin de minimizar el riesgo del inversionista y maximizar su retorno.

Otros autores han utilizado medidas de riesgo como el VaR (Value at Risk) y el CVaR (Conditional Value at Risk) de manera alternativa a los modelos media-varianza. Heredia *et al.* (2018) [9] investigan los efectos de un plan de reducción de emisiones y la incorporación de objetivos de mediano plazo en la generación óptima de estrategias de oferta diaria para un mercado eléctrico. Se tuvieron en cuenta dos tecnologías de generación: una de alta emisión a carbón y otra de baja emisión a gas. Para abordar las restricciones de emisiones medioambientales, se usaron las metodologías de manejo del riesgo de los mercados financieros, valor en riesgo (VaR) y valor en riesgo condicionado (CVaR), creando el denominado riesgo de emisión condicionado (Conditional Emission at Risk – CEaR). El objetivo del estudio es crear un programa de generación y de oferta, que maximice los beneficios esperados teniendo en cuenta los costos de arranque, de parada y de generación de energía termoeléctrica.

Munoz *et al.* (2017) [20] investigan los efectos de la aversión al riesgo sobre la planeación de la transmisión y la generación de energía en un mercado energético. Para ello se formula un modelo estocástico que minimiza el promedio ponderado de la transmisión esperada y los costos de generación, y CVaR asociado. Son comparados los planes de generación y transmisión identificados por el modelo propuesto bajo supuestos de neutralidad en el riesgo y aversión al mismo, para analizar cuando la aversión al riesgo hace alguna diferencia.

La operación óptima en una planta virtual de generación de energía considerando la aversión al riesgo es abordada por Lima *et al.* (2018) [16]. Una planta virtual de generación es un grupo de unidades dispersas pero coordinadas dentro del grupo, para interactuar con el exterior como una sola unidad. La

planta virtual consiste de una unidad de generación térmica, una unidad de generación eólica y una unidad de generación hidroeléctrica. La coordinación de la planta virtual involucra la programación integrada de las unidades y su interacción con el mercado de electricidad, como una sola entidad. Además, se presentan resultados en relación al desempeño computacional de planteamientos con aversión al riesgo, entre ellos el CVaR, en función al número de escenarios y a los parámetros de riesgo.

Yildiran y Kayahan (2018) [30] también utilizan el concepto de aversión al riesgo en una estrategia para la oferta diaria de electricidad por medio de un modelo estocástico. La metodología es aplicada a un sistema real compuesto por granjas eólicas y una planta de almacenamiento hídrica. El problema considerado tiene dos objetivos: la maximización de la utilidad y la minimización del riesgo basada en la medida del CVaR.

Tan *et al.* (2017) [28] utilizan un modelo de programación de generación de energía para coordinar una planta virtual de generación de energía compuesta por una planta de generación eólica, generadores fotovoltaicos, una turbina de generación, sistemas de almacenamiento de energía y un sistema de respuesta basado en la demanda. El modelo busca minimizar el CVaR y maximizar la utilidad.

El problema de la coordinación entre fuentes eólicas, térmicas e hidroeléctricas de energía en un mercado diario de electricidad es tratado por Al-Swaiti *et al.* (2017) [1]. La estrategia es modelada como un problema de programación estocástica lineal entera mixta que toma en cuenta parámetros como la generación de energía y los precios de la misma. La actitud del comercializador hacia el riesgo es modelada usando el CVaR.

Garcia *et al.* (2017) [8] proponen dos modelos basados en la teoría moderna de portafolios y se aplican a una compañía de generación de energía eléctrica. Uno aplica el criterio de media-varianza y el otro el de CVaR. Ambos modelos son combinados con técnicas de predicción para optimizar la diversificación en la producción de energía de la compañía. Por medio de lo anterior se aborda el problema de maximizar los beneficios del generador y la minimización del riesgo.

En Li *et al.* (2016) [15] se desarrolla un modelo de optimización para investigar el comportamiento de un sistema de generación eléctrica comunitario y las consecuencias de las políticas sobre el uso de instalaciones bajo el objetivo de reducir los costos. En este modelo existen cuatro recursos energéticos: cogeneración de energía eléctrica y térmica, turbinas eólicas, redes eléctricas y almacenamiento eléctrico.

Miguel y Ramos (2017) [18] tienen como objetivo evaluar si las reglas contractuales del Programa de Incentivos para Fuentes Alternativas de Energía Eléctrica en Brasil traen como consecuencia la optimización de los portafolios de generación usando la teoría de portafolios de Markowitz para el mercado de valores.

Un modelo de optimización de portafolios con el objetivo de definir la asignación óptima de recursos financieros, dados un presupuesto de inversión y un criterio de aversión al riesgo, es presentado en Steinle-Camargo *et al.* (2016) [27]. Dicho modelo se soporta en algoritmos genéticos y una medida de riesgo basada en el CVaR. El portafolio de generación puede estar conformado por tecnologías eólica, hidroeléctrica y biomasa.

En Martín *et al.* (2015) [17] se propone un modelo de equilibrio de un mercado a corto plazo para investigar el impacto de la generación de energía eólica bajo diferentes supuestos. El modelo se formula teniendo en cuenta varias firmas en competencia, los precios y la aversión al riesgo. Igualmente se considera la incertidumbre en la generación eólica de energía. El consumidor se modela por medio de una función de demanda lineal inversa. Además, el modelo es formulado como un problema de equilibrio estocástico donde las condiciones Karush-Kuhn-Tucker de cada problema de optimización de cada firma se resuelve simultáneamente. Para cada firma el problema resultante es de optimización estocástica de dos etapas, con una función de recursos basada en el CVaR como medida de riesgo.

Jadidbonab *et al.* (2019) [10] implementan la metodología CVaR para modelar y manejar el riesgo potencial de la variación de los costos de operación en el problema de planificación de un centro eólico de multitransmisión inteligente y evalúan su operación en combinación con un sistema de almacenamiento de energía de aire comprimido, un programa de respuesta de demanda eléctrica, y un programa de respuesta de demanda térmica.

Ju *et al.* (2019) [11] realizan un agregado de una planta eléctrica eólica, generación fotovoltaica de electricidad, generación eléctrica por biomasa, un sistema de almacenamiento de electricidad, turbinas de gas convencionales y carga flexible, en una planta virtual de electricidad; con el fin de realizar una

distribución completa de recursos energéticos y disminuir la energía no utilizada de fuentes de energía limpias. Proponen un modelo de optimización multiobjetivo con tres funciones objetivo: maximización de los ingresos de operación, minimización del riesgo de operación y minimización de las emisiones de carbono. Además, aplican la teoría de optimización robusta para crear un modelo de aversión al riesgo convirtiendo las restricciones estocásticas con factores de incertidumbre.

En Karkhaneh *et al.* (2020) [12] se propone un modelo para la programación óptima de la operación de una central de energía reduciendo los costos de emisión, considerando un programa de respuestas en la demanda eléctrica y térmica en un ambiente probabilístico. Tienen en cuenta la incertidumbre de los precios en tiempo real de los mercados de energía eléctrica y térmica, la demanda de energía de los clientes, y la producción de energía por medio de fuentes renovables. Se generan varios escenarios por medio de simulación Monte Carlo. Igualmente, utilizan un método eficiente para reducir el número de escenarios y hacer que el problema de optimización sea computable y rápido. Además, usan la técnica CVaR para manejar el riesgo asociado a encontrarse con altos costos de operación.

Para el mercado colombiano, Lemos-Cano y Botero-Botero (2012) [14] hacen un análisis de las fronteras eficientes para dos portafolios de generación de energía eléctrica. En Sánchez *et al.* (2013) [26] se hace una valoración del riesgo financiero en la venta de energía eléctrica por medio de contratos a largo plazo desde la perspectiva de un agente productor de energía eléctrica.

En este artículo se presenta un modelo de programación lineal entera mixta para optimizar el portafolio de generación de energía, considerando la minimización del riesgo, la incertidumbre en la demanda, el clima y los precios, así como restricciones relativas a la utilidad esperada y las diferentes tecnologías de generación de energía. En las siguientes secciones se presenta una descripción cualitativa y matemática del modelo de optimización propuesto (Sección 2); seguida de la descripción de un caso de aplicación real (Sección 3); luego los resultados y discusión (Sección 4), en donde se expone la aplicación del modelo con datos reales y el análisis de resultados; y se cierra con las conclusiones del estudio (Sección 5).

## 2. Metodología

### 2.1. Descripción del problema

El problema de optimización en estudio considera la minimización del riesgo sujeto a restricciones operativas relativas a cada tipo de tecnología de generación de energía y una utilidad esperada mínima. El modelo considera tres tecnologías para generación de energía (hídrica, térmica y eólica) y un conjunto de plantas de generación para cada tipo de tecnología.

La función objetivo es la minimización del riesgo, el cual es definido como la posibilidad de obtener pérdidas económicas debido a las operaciones de generación de energía eléctrica.

Por otro lado, el retorno o rentabilidad de la operación, es modelada como una restricción la cual evita obtener rentabilidades esperadas bajas. Nótese que esta restricción es a menudo usada como función objetivo.

Las restricciones operativas del modelo se pueden clasificar en cuatro grandes grupos. Los tres primeros se refieren a las restricciones impuestas por cada tipo de tecnología de generación de energía, mientras que el último corresponde a las restricciones de demanda.

Se asume que el agente generador posee un conjunto  $J$  de centrales termoeléctricas. Cuando una central termoeléctrica  $j \in J$  está en funcionamiento su producción debe estar entre  $P_{min,jt}$  y  $P_{max,jt}$  en cada período de tiempo  $t \in T$ . Adicionalmente, la producción en dicha central está limitada por el máximo aumento en la generación de energía entre dos períodos consecutivos o máxima rampa de subida  $W_j$  y la máxima disminución en la generación de energía entre dos períodos consecutivos o máxima rampa de bajada  $X_j$ . Los costos de dicha central están representados por los costos fijos  $A_j$  (en millones de pesos, MCOP), los costos variables  $B_j$  (en MCOP por Gigavatio-hora o GWh). Además, durante el arranque y parada de cada central termoeléctrica se incurre en costos  $C_j$  y  $E_j$ , respectivamente.

El agente generador opera también un conjunto  $I$  de centrales hidroeléctricas. La producción de una central hidroeléctrica  $i \in I$  debe estar entre  $Q_{min,it}$  y  $Q_{max,it}$ . La cantidad de energía que se puede generar en una central hidroeléctrica  $i$  está limitada por el volumen de agua en su respectivo embalse, el cual debe estar entre los límites inferior  $V_{min,it}$  y superior  $V_{max,it}$  en el período de tiempo  $t \in T$ . Este volumen es afectado por la cantidad de energía generada y las aportaciones externas  $r_{it}$ . La operación

de la central hidroeléctrica  $i$  implica costos fijos  $H_i$  (en MCOP) y costos variables  $Hv_i$  (en MCOP por GWh).

En cuanto al conjunto  $L$  de centrales eólicas, cada central  $l \in L$  solo está limitada por su capacidad, así su generación de energía está entre el límite inferior  $O_{min,it}$  y el límite superior  $O_{max,it}$  en cada periodo de tiempo  $t \in T$ . Los costos fijos son  $Ef_l$  (en MCOP) y los costos variables son  $Ev_l$  (en MCOP por GWh).

Además, la cantidad de energía generada debe ser suficiente para abastecer la demanda total  $D_t$  en cada periodo  $t \in T$ . Dado que la demanda es una variable aleatoria, esta restricción se modela como una restricción probabilística.

## 2.2. Modelo de optimización propuesto

En el modelo propuesto, el riesgo se modela por medio del CVaR, calculado según Rockafellar y Uryasev (2000) [25] y Uryasev (2000) [29], utilizando datos históricos. La utilidad se obtiene de forma tradicional: Ingresos – Costos, donde los ingresos se calculan con los precios spot de mercado de la energía eléctrica, y los costos corresponden a los de operación y mantenimiento; se excluyen los costos de montaje y puesta en marcha y demás costos provenientes de la inversión inicial en la construcción de presas, turbinas, aspas, rotores, etc., de cada una de las tecnologías de generación.

Como variables de decisión se consideran la cantidad de energía eléctrica (GWh) a producir  $p_{jt}$  en la central termoeléctrica  $j \in J$  en el periodo  $t \in T$ , la cantidad de energía eléctrica a producir  $q_{it}$  en la central hidroeléctrica  $i \in I$  en el periodo  $t \in T$ , y la cantidad de energía eléctrica a producir  $w_{lt}$  en la central eólica  $l \in L$  en el periodo  $t \in T$ . Las variables de decisión binarias  $v_{jt}$ ,  $h_{it}$  y  $e_{lt}$  indican, cuando son iguales a 1, que una central termoeléctrica  $i$ , hidroeléctrica  $j$  o eólica  $l$ , respectivamente, está en funcionamiento durante el periodo  $t$ . Debido a las condiciones de funcionamiento de las centrales termoeléctricas, se requieren variables binarias  $y_{jt}$  y  $z_{jt}$  indicando, cuando son iguales a 1, que la central  $j$  arranca o se detiene, respectivamente, en el periodo  $t$ . Adicionalmente, para cada central hidroeléctrica  $i$ , las variables de decisión  $V_{it}$ ,  $k_{it}$  y  $S_{it}$ , representan respectivamente, el volumen del embalse ( $\text{Hm}^3$ ), el caudal utilizado para la generación de energía y el volumen de agua vertido (no aprovechado para la generación de energía), en el periodo  $t$ . Se puede notar que la cantidad de energía a generar  $q_{it}$  en una central hidroeléctrica  $i$  está directamente relacionada con el caudal de agua utilizado en generación  $k_{it}$  por medio de un factor denominado  $f_i$ .

A continuación, se describen detalladamente la función objetivo y las restricciones del modelo de optimización.

## 2.3. Función objetivo: minimización del riesgo

En esta investigación se cuantifica el riesgo mediante la medida CVaR (Conditional Value at Risk) descrita en Pflug (2000) [22], la cual, a diferencia de otras medidas utilizadas con mayor frecuencia, cumple con las propiedades de dominancia estocástica de primer y segundo orden que la hacen más fácil de tratar matemáticamente. El CVaR está basado en la medida de riesgo denominada VaR (Value at Risk).

El VaR se define como el percentil superior  $\alpha$  de la distribución de probabilidad de la función de pérdidas al nivel de confianza  $\beta$ , que se denota como  $\text{VaR}_\beta(\chi)$  o  $\alpha_\beta(\chi)$ ,

$$\text{VaR}_\beta(\chi) = \alpha_\beta(\chi) = \inf \{ \chi \in R : P\{\chi \geq \alpha\} \geq \beta \} = F^{-1}(1 - \beta) \quad (2.1)$$

donde  $F$  es la función de distribución continua de la función de pérdidas  $\chi$  y  $F^{-1}$  es su inversa. El VaR carece de la propiedad de subaditividad, por lo que es difícil de optimizar y puede resultar con múltiples extremos locales [29,21].

Por otro lado, el CVaR se define como las pérdidas esperadas que exceden al VaR, y se denota como:

$$\text{CVaR}_\beta(\chi) = \alpha_\beta(\chi) + \frac{1}{1 - \beta} \cdot E \left\{ [\chi - \alpha_\beta(\chi)]^+ \right\} \quad (2.2)$$

donde  $[\chi - \alpha_\beta(\chi)]^+ = \max \{\chi - \alpha_\beta(\chi), 0\}$ . La expresión  $\frac{1}{1 - \beta} \cdot E \left\{ [\chi - \alpha_\beta(\chi)]^+ \right\}$  se denomina *exceso de pérdida media* [21]. Cuando se desconoce  $\alpha_\beta(\chi)$  se puede calcular  $\text{CVaR}_\beta(\chi)$  resolviendo un problema de optimización [29,22,21,24].

En el caso en que  $\chi$  es un portafolio de tecnologías de generación, se debe cumplir que  $\chi_k \geq 0 \forall k \in K$  y  $\sum_{k \in K} \chi_k = 1$ . Así, la minimización del CVaR se puede aproximar a partir de un conjunto  $N$  de muestras como [25,29]:

$$\min F = \alpha \cdot \frac{1}{|N| \cdot (1 - \beta)} \cdot \sum_{n \in N} u_n \quad (2.3)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k \in K} \chi_k \cdot r_k^n + \alpha + u_n \geq 0 \quad \forall n \in N \quad (2.4)$$

$$u_n \geq 0 \quad \forall n \in N \quad (2.5)$$

$$\sum_{k \in K} \chi_k \cdot \hat{\mu}_k \geq \mu^* \quad (2.6)$$

$$\sum_{k \in K} \chi_k \cdot \hat{\mu}_k = 1 \quad (2.7)$$

$$\chi_k \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (2.8)$$

donde  $K$  es el conjunto de tecnologías de generación,  $\hat{\mu}_k = |N|^{-1} \cdot \sum_{n \in N} r_k^n$  es la utilidad promedio de la tecnología  $k$ ,  $\mu^*$  corresponde a la utilidad mínima esperada,  $r_k^n$  es la  $n$ -ésima muestra del retorno de la tecnología  $k$ ,  $\alpha$  representa el valor del VaR y  $u_n$  es el exceso de pérdida para la muestra  $n$ . Note que en este problema, dado que el valor del VaR es desconocido,  $\alpha$  es una variable de decisión. Este problema se soluciona independientemente de la distribución de probabilidad que tengan los retornos  $r$ .

Así, se puede formular la función objetivo estocástica para minimizar el CVaR de un generador de energía eléctrica como:

$$\min F = \sum \left[ \alpha_t + \frac{1}{|N| \cdot (1 - \beta)} \cdot \sum_{n \in N} u_{nt} \right] \quad (2.9)$$

donde  $\text{CVaR}^t = \alpha_t + \frac{1}{|N| \cdot (1 - \beta)} \cdot \sum_{n \in N} u_{nt}$  es el CVaR en el periodo  $t$ ,  $\text{VaR}^t = \alpha_t$  es el VaR en el periodo  $t$  y  $u_{nt}$  es el exceso de pérdida para la muestra  $n$  en el periodo  $t$ .

Esta expresión para la función objetivo permite calcular el VaR y el CVaR globales correspondientes a los periodos de estudio a partir de los valores de  $\text{VaR}^t$  y  $\text{CVaR}^t$  de cada periodo  $t$ . Las restricciones del modelo de programación lineal (2.3)-(2.8) son retomadas en la siguiente sección.

## 2.4. Restricciones

Las ecuaciones y desigualdades (2.10) a (2.35) corresponden a las restricciones del problema de optimización propuesto.

Las desigualdades en (2.10) son las equivalentes deterministas de las restricciones de demanda en cada periodo  $t$ . La probabilidad de que la producción de energía eléctrica sea menor o igual a la demanda en el periodo  $t \in T$ , considerando las diferentes tecnologías, debe ser mayor o igual a la probabilidad descrita por el parámetro  $\gamma$ . Nótese que en este modelo esta restricción actúa como un elemento de control evitando tener producción en exceso (y sin retorno), contrario a los modelos de despacho en los cuales se debe garantizar la satisfacción total de la demanda.

$$P \left\{ \sum_{i \in I} q_{it} + \sum_{j \in J} p_{jt} + \sum_{l \in L} w_{lt} \leq D_t \right\} \geq \gamma \quad \forall t \in T \quad (2.10)$$

En (2.11), (2.12) y (2.13), se imponen límites inferiores y superiores para la producción de energía

eólica, térmica e hidrálica, respectivamente.

$$Omin_{lt} \cdot e_{lt} \leq w_{lt} \leq Omax_{lt} \cdot e_{lt} \quad \forall l \in L, t \in T \quad (2.11)$$

$$Pmin_{jt} \cdot v_{jt} \leq p_{jt} \leq Pmax_{jt} \cdot v_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.12)$$

$$Qmin_{it} \cdot h_{it} \leq q_{it} \leq Qmax_{it} \cdot h_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.13)$$

Es importante recordar que las variables de decisión binarias  $e_{lt}$ ,  $v_{jt}$  y  $h_{it}$  indican si la respectiva central eólica  $l \in L$ , térmica  $j \in J$  e hidrálica  $i \in I$ , funcionan o no en el periodo  $t \in T$ . Cuando dichas variables son iguales a cero, la producción de energía en la respectiva central es igual a cero.

Las rampas máximas de bajada y subida establecen respectivamente la disminución e incremento máximos en la producción de energía eléctrica de un periodo al siguiente para la central termoeléctrica  $j \in J$ , tal como lo describen las desigualdades (2.14) y (2.15).

$$p_{jt} - p_{j,t+1} \leq W_j \quad \forall j \in J, t \in T \setminus \{|T|\} \quad (2.14)$$

$$p_{j,t+1} - p_{jt} \leq X_j \quad \forall j \in J, t \in T \setminus \{|T|\} \quad (2.15)$$

Las restricciones (2.16) a (2.18) hacen referencia a las relaciones entre las variables binarias para la producción térmica teniendo en cuenta arranques y paradas.

$$y_{jt} - z_{jt} = v_{jt} - v_{j,t-1} \quad \forall j \in J, t \in T \setminus \{1\} \quad (2.16)$$

$$z_{jt} \leq v_{j,t-1} \quad \forall j \in J, t \in T \setminus \{1\} \quad (2.17)$$

$$y_{jt} \leq 1 - v_{j,t-1} \quad \forall j \in J, t \in T \setminus \{1\} \quad (2.18)$$

Las restricciones (2.19) limitan el volumen de agua almacenado en los embalses. Las restricciones (2.20) garantizan la continuidad hidrálica de las represas. Las desigualdades en (2.21) restringen el volumen de agua que es turbinado y utilizado para la generación de energía del generador  $i \in I$  durante el periodo  $t$ . La equivalencia entre el caudal turbinado y la generación de energía hidroeléctrica está representada por las Ecuaciones (2.22).

$$Vmin_{it} \leq V_{it} \leq Vmax_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.19)$$

$$V_{it} = V_{i,t-1} + g \cdot r_{it} - S_{it} - g \cdot k_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \setminus \{1\} \quad (2.20)$$

$$g \cdot k_{it} \leq V_{it} - Vmin_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.21)$$

$$q_{it} = f_i \cdot k_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \setminus \{1\} \quad (2.22)$$

Las restricciones (2.23) y (2.24) modelan el VaR y el CVaR, tomando en cuenta los ingresos de la generación de energía debidos a las tres tecnologías y los costos de producción de las mismas. Estas restricciones complementan la medida de riesgo CVaR de la función objetivo.

$$\begin{aligned} \lambda_{nt} \cdot \left( \sum_{i \in I} q_{it} + \sum_{j \in J} p_{jt} + \sum_{l \in L} w_{lt} \right) - \sum_{i \in I} (H_i \cdot h_{it} + Hv_i \cdot q_{it}) \\ - \sum_{i \in I} (A_j \cdot v_{jt} + B_j \cdot p_{jt} + C_j \cdot y_{jt} + E_j \cdot z_{jt}) \quad \forall t \in T, n \in N \\ - \sum_{i \in I} (Ef_i \cdot e_{lt} + Ev_i \cdot w_{lt}) + \alpha_t + u_{nt} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

En la restricción (2.24) se utilizan las muestras del precio *spot* de oferta nacional y se añade la exigencia mínima de la utilidad del inversionista,  $\mu^*$ , es decir, el nivel mínimo de beneficios que el inversionista requiere para el periodo de estudio.

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T} \left[ \bar{\lambda}_t \left( \sum_{i \in I} q_{it} + \sum_{j \in J} p_{jt} + \sum_{l \in L} w_{lt} \right) \right] - \sum_{i \in I} (H_i \cdot h_{it} + Hv_i \cdot q_{it}) \\ - \sum_{j \in J} (A_j \cdot v_{jt} + B_j \cdot p_{jt} + C_j \cdot y_{jt} + E_j \cdot z_{jt}) \left[ - \sum_{l \in L} (Ef_l \cdot e_{lt} + Ev_l \cdot w_{lt}) \right] \geq \mu^* \end{aligned} \quad (2.24)$$

en donde  $\bar{\lambda}_t = \frac{1}{|N|} \cdot \sum_{n \in N} \lambda_{nt}$ .

Finalmente, las restricciones (2.25) a (2.35) corresponden a las condiciones de no negatividad y de dominio de las variables de decisión.

$$p_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.25)$$

$$q_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.26)$$

$$w_{lt} \geq 0 \quad \forall l \in L, t \in T \quad (2.27)$$

$$u_n \geq 0 \quad \forall n \in N \quad (2.28)$$

$$V_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.29)$$

$$S_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.30)$$

$$e_{lt} \in \{0, 1\} \quad \forall l \in L, t \in T \quad (2.31)$$

$$h_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.32)$$

$$v_{jt} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.33)$$

$$y_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.34)$$

$$z_{jt} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.35)$$

### 3. Aplicación del modelo a un caso real de un agente generador de energía en Colombia

El modelo matemático descrito en la sección anterior fue validado usando datos públicos reales del Portal BI de XM ([www.xm.com.co](http://www.xm.com.co)), teniendo en cuenta tres configuraciones diferentes de generación de energía. La configuración uno (C1), corresponde a un generador eléctrico con centrales hidrálicas, térmicas y eólicas, con capacidades efectivas netas de 606 MW, 445 MW y 19.5 MW respectivamente. La configuración dos (C2), corresponde a un generador eléctrico con centrales hidrálicas, térmicas y eólicas, con capacidades efectivas netas de 490.9 MW, 560.7 MW y 19.5 MW. La configuración tres (C3) supone un agente generador eléctrico con centrales hidrálicas, térmicas y eólicas con capacidades efectivas netas 375.7 MW, 289.3 MW y 409.5 MW respectivamente. La selección de tales configuraciones se hace con propósitos de comparación.

Las tres configuraciones descritas son analizadas en situaciones climáticas particulares, las cuales son definidas de acuerdo a los datos históricos de los aportes en caudal de los ríos que abastecen los embalses de los generadores hidroeléctricos entre los años 2010 y 2015. De esta manera, el escenario “invierno” se relaciona con los períodos de lluvias y corresponde al cuatrimestre con mayores aportes en caudal a los embalses, y el escenario “verano” se relaciona con los períodos de mayor calor y corresponde al cuatrimestre con menores aportes de caudal. Debido a la crisis energética sucedida en Colombia durante 2015 y 2016, se creó un tercer escenario denominado “sequía” el cual corresponde al cuatrimestre comprendido por los dos últimos meses de 2015 y los dos primeros de 2016. Dicho escenario presenta menores aportes en caudal que los dos primeros.

El periodo de estudio corresponde a los 120 días de los meses de junio, julio, agosto y septiembre de 2015.

Además, para cada una de las tres configuraciones, C1, C2 y C3, con sus respectivas situaciones climáticas (invierno, verano y sequía), se analizan escenarios considerando valores de demanda multiplicados por factores de 0.8, 1.0 y 1.2. Asimismo, para cada uno de estos escenarios de la demanda, se consideran valores de los precios spot multiplicados por los mismos factores, 0.8, 1.0 y 1.2. Lo anterior con el fin de observar la respuesta del modelo ante estas variaciones. De esta forma se obtiene un total de 81 escenarios diferentes, los cuales se resumen en la Tabla II.

Para las centrales térmicas, las rampas máximas de bajada y subida se toman directamente de las establecidas y publicadas por el Consejo Nacional de Operación, CNO (2014). Igualmente, las aportaciones externas a los embalses de las centrales hidroeléctricas, y la demanda total de energía eléctrica, son tomados del Portal BI de XM. Los aportes en caudal a los embalses se consideran de acuerdo a los escenarios de sequía, verano e invierno descritos anteriormente. Los volúmenes mínimo y máximo de los embalses corresponden a los históricos de los escenarios climáticos descritos. El caudal turbinado utilizado para la generación de energía por las centrales hidroeléctricas está limitado por el

volumen útil del embalse, es decir, el volumen por encima del nivel mínimo, situación contemplada en CREG (2007) y las Resoluciones 079 de 2007 y 085 de 2007.

#### 4. Análisis de resultados computacionales

Esta sección describe el tratamiento de los datos relativos a la demanda (Sección 4.1), los precios (Sección 4.2) y los costos (Sección 4.3), así como el análisis de los escenarios propuestos (Sección 4.4).

Los experimentos computacionales se realizaron en un computador con procesador Intel Pentium CPU 3520 @ 2.16GHz  $\times$  4, con 4 GB de memoria RAM y sistema operativo openSUSE Leap 42.1 64-bit. El modelo fue codificado en el software GLPK Solver versión 4.52. Cada ejecución del modelo en cada escenario toma aproximadamente 16 segundos para encontrar una solución óptima.

El nivel de confianza utilizado para el cálculo del CVaR es  $\beta = 0.95$ . Dado que la función de pérdidas se toma como el negativo de la función de utilidad, los valores negativos en los resultados se interpretan como beneficios y viceversa [25].

##### 4.1. Ajuste de la demanda

La demanda tiene un comportamiento estocástico, por tanto, puede ser descrita mediante una distribución de probabilidad. En el periodo de estudio tuvo un comportamiento que se ajusta a una distribución normal con media  $\mu = 11.4$  MW y desviación estándar  $\sigma = 4.38$  MW. El valor máximo de la demanda es 20.26 MW y el mínimo es de 0.64 MW. Con fines de factibilidad se determina que el parámetro gamma tiene un valor  $\gamma = 0.9954$ , que resulta de excluir la probabilidad de los valores negativos. Así pues, la restricción de la demanda de energía se satisface con una probabilidad de 99.54%.

##### 4.2. Tratamiento de los precios

El valor del precio de la electricidad es el precio *spot* en la bolsa de energía, publicado en el Portal BI de XM durante el periodo de estudio. Puesto que en el cálculo del CVaR se requieren muestras para los precios de cada periodo, se toman los precios *spot* históricos de cada una de las 24 horas del día del periodo correspondiente.

En la Figura 1 se comparan los precios *spot* promedio diarios de la bolsa para los tres escenarios y el periodo de estudio. La comparación de estos precios evidencia que los precios se ven influenciados mayormente por los niveles hídricos de las presas. Reaccionan al alza cuando los niveles de las presas están bajos y viceversa.

##### 4.3. Tratamiento de los costos

Los costos de operación y mantenimiento, fijos y variables de generación hídrica, térmica y eólica son tomados de Awerbuch *et al.* (2004) [4]. Para convertir los valores a millones de pesos colombianos (MCOP), se usa la Tasa Representativa del Mercado (TRM) y el Índice de Precios al Consumidor (IPC), ambos en marzo de 2016. En cuanto a los costos de arranque y parada (CAP), según Poveda-Núñez (2012) [23], éstos son ofertados por los generadores termoeléctricos y no están sujetos a ninguna regulación de la CREG, pueden ser definidos libremente por cada agente. Además, como en el portal BI de XM se suministran los CAP sin definir qué porcentajes corresponden a arranque o a parada, en este trabajo se asume una proporción de 50-50. La Tabla 1 presenta los costos fijos de operación y mantenimiento utilizados.

Table 1: Costos fijos y variables de operación y mantenimiento.

| Costos                         | Combustible |        |       |
|--------------------------------|-------------|--------|-------|
|                                | Gas         | Viento | Agua  |
| Costos fijos (USDCent/kW)      | 15.51       | 24.44  | 15.25 |
| Costos variables (USDCent/kWh) | 0.12        | 0.10   | 0.05  |

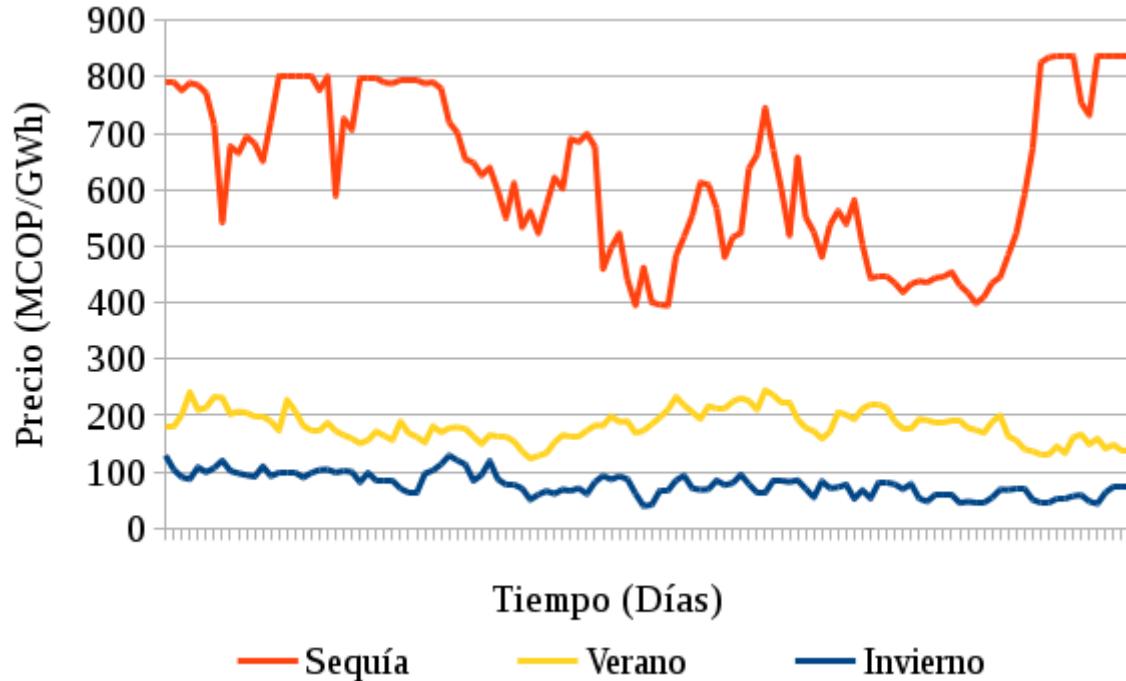


Figure 1: Precio *spot* en MCOP/GWh para los diferentes escenarios.

#### 4.4. Análisis de escenarios

Para la validación y análisis de resultados se plantearon 81 escenarios, los cuales se describen en la Tabla 2. En dicha tabla, los escenarios escritos en negrita corresponden a los tres mejores escenarios en cada tipo de clima.

Utilizando los datos del Portal BI y los costos de generación de la Tabla 1, el modelo propuesto siempre obtiene valores del VaR y del CVaR negativos. Experimentalmente se ha encontrado que se pueden obtener valores positivos del CVaR y el VaR para escenarios que no son considerados en esta investigación. En consecuencia, con los datos y escenarios utilizados y descritos anteriormente no hay riesgo de pérdida incluso si se define como nivel de confianza para el VaR y el CVaR el 99%. Esto es debido a que la distribución de los beneficios tiene su cola inferior muy por encima de cero. Cabe decir que el VaR y el CVaR también son dependientes del parámetro puesto que se amplía la zona de riesgo al aumentarlo y la disminuye para valores menores; por su parte el portafolio sufre cambios muy pequeños que disminuyen la participación, dentro de cada tecnología, de las centrales con mayores costos. Es importante también recordar que en esta investigación no se incluyen los costos de adquisición y construcción de las centrales de generación de energía.

El portafolio global es poco sensible a la variación de los precios; sin embargo, tal variación afecta los ingresos, los beneficios y por ende el VaR y el CVaR, los cuales son decrecientes cuando se tiene un aumento en el factor de precio; cuando el factor de precio pasa de 0.8 a 1.0 el aumento en los ítems mencionados es de alrededor del 25%, cuando se realiza un cambio de 1.0 a 1.2 en el factor de precios el aumento es de alrededor del 20%. Este mismo patrón se encuentra en todas las configuraciones. Un patrón similar se encuentra observando las demandas en lo referente a los ingresos y las utilidades y por tanto en la medida de riesgo, es decir, se nota un incremento porcentual en éstos de alrededor del 24% en promedio cuando se aumenta la demanda desde el factor 0.8 a 1.0; por su parte cuando la demanda se incrementa modificando el factor de 1.0 a 1.2 tiene un incremento en los ingresos y las utilidades de alrededor del 17% en promedio. Sin embargo, la participación de las tecnologías en los portafolios se modifica significativamente en algunas de ellas en términos porcentuales.

Table 2: Resumen de los escenarios generados en el estudio.

| Escenario | Clima    | Conf | F.P. | F.D.           | Ingr             | Costos         | Utilidad         | CVaR              | VaR               | %Hfdr.        | %Térn.        | %Eól.         |
|-----------|----------|------|------|----------------|------------------|----------------|------------------|-------------------|-------------------|---------------|---------------|---------------|
| 1         | Sequía   | C1   | 0.8  | 0.8            | 557 905          | 225            | 557 680          | -480 394          | -486 406          | 96.03%        | 2.32%         | 1.65%         |
| 2         |          |      |      | 1.0            | 695 056          | 227            | 694 828          | -598 221          | -605 736          | 85.08%        | 13.24%        | 1.68%         |
| 3         |          |      |      | 1.2            | 832 069          | 231            | 831 838          | -715 909          | -715 909          | 73.71%        | 24.53%        | 1.76%         |
| 4         |          |      | 1.0  | 0.8            | 697 381          | 225            | 697 156          | -600 548          | -608 064          | 95.99%        | 2.36%         | 1.65%         |
| 5         |          |      |      | 1.0            | 868 820          | 227            | 868 592          | -747 833          | -757 227          | 85.08%        | 13.27%        | 1.66%         |
| 6         |          |      |      | 1.2            | 1 040 086        | 231            | 1 039 856        | -894 944          | -906 217          | 73.65%        | 24.47%        | 1.88%         |
| 7         |          | C2   | 0.8  | 0.8            | 836 857          | 225            | 836 632          | -720 703          | -729 721          | 95.99%        | 2.36%         | 1.65%         |
| 8         |          |      |      | 1.0            | 1 042 584        | 227            | 1 042 356        | -897 445          | -908 718          | 84.84%        | 13.53%        | 1.63%         |
| 9         |          |      |      | 1.2            | <b>1 248 103</b> | <b>231</b>     | <b>1 247 873</b> | <b>-1 073 979</b> | <b>-1 087 507</b> | <b>73.71%</b> | <b>24.40%</b> | <b>1.89%</b>  |
| 10        |          |      | 1.0  | 0.8            | 556 178          | 225            | 555 953          | -478 667          | -484 679          | 92.26%        | 5.84%         | 1.90%         |
| 11        |          |      |      | 1.0            | 693 330          | 228            | 693 101          | -596 493          | -604 009          | 79.31%        | 18.96%        | 1.73%         |
| 12        |          |      |      | 1.2            | 829 247          | 232            | 829 015          | -713 086          | -722 104          | 68.00%        | 30.41%        | 1.59%         |
| 13        |          | C3   | 0.8  | 0.8            | 695 223          | 225            | 694 998          | -598 390          | -605 905          | 92.15%        | 5.99%         | 1.86%         |
| 14        |          |      |      | 1.0            | 866 662          | 228            | 866 434          | -745 674          | -755 068          | 79.24%        | 18.93%        | 1.83%         |
| 15        |          |      |      | 1.2            | 1 036 559        | 232            | 1 036 327        | -891 415          | -902 688          | 68.01%        | 30.40%        | 1.59%         |
| 16        |          |      | 1.0  | 0.8            | 834 268          | 225            | 834 042          | -718 113          | -727 131          | 92.24%        | 5.86%         | 1.90%         |
| 17        |          |      |      | 1.0            | 1 039 994        | 228            | 1 039 766        | -894 854          | -906 127          | 79.25%        | 18.92%        | 1.83%         |
| 18        |          |      |      | 1.2            | <b>1 243 870</b> | <b>232</b>     | <b>1 243 639</b> | <b>-1 069 745</b> | <b>-1 083 272</b> | <b>67.94%</b> | <b>30.47%</b> | <b>1.59%</b>  |
| 19        | Verano   | C1   | 0.8  | 0.8            | 558 111          | 273            | 557 838          | -480 552          | -486 564          | 83.34%        | 0.04%         | 16.62%        |
| 20        |          |      |      | 1.0            | 695 904          | 276            | 695 629          | -599 021          | -606 536          | 70.72%        | 3.18%         | 26.11%        |
| 21        |          |      |      | 1.2            | 828 658          | 279            | 828 380          | -716 757          | -725 775          | 60.67%        | 12.38%        | 26.95%        |
| 22        |          |      | 1.0  | 0.8            | 697 638          | 273            | 697 366          | -600 758          | -608 273          | 83.34%        | 0.04%         | 16.62%        |
| 23        |          |      |      | 1.0            | 869 880          | 276            | 869 605          | -748 845          | -758 239          | 70.72%        | 3.24%         | 26.04%        |
| 24        |          |      |      | 1.2            | 1 035 823        | 279            | 1 035 544        | -891 208          | -902 441          | 60.67%        | 12.43%        | 26.90%        |
| 25        |          | C2   | 0.8  | 0.8            | 837 166          | 273            | 836 893          | -720 964          | -729 982          | 83.34%        | 0.07%         | 16.59%        |
| 26        |          |      |      | 1.0            | 1 043 856        | 276            | 1 043 581        | -898 669          | -909 942          | 70.71%        | 3.27%         | 26.02%        |
| 27        |          |      |      | 1.2            | <b>1 242 987</b> | <b>279</b>     | <b>1 242 709</b> | <b>-1 069 506</b> | <b>-1 082 985</b> | <b>60.67%</b> | <b>12.45%</b> | <b>26.88%</b> |
| 28        |          |      | 1.0  | 0.8            | 157 064          | 225            | 156 839          | -132 027          | -135 806          | 99.29%        | 0.51%         | 0.20%         |
| 29        |          |      |      | 1.0            | 193 258          | 226            | 193 031          | -162 601          | -167 157          | 95.27%        | 3.67%         | 1.07%         |
| 30        |          |      |      | 1.2            | 220 153          | 228            | 219 925          | -185 287          | -190 474          | 91.02%        | 7.75%         | 1.23%         |
| 31        |          | C3   | 0.8  | 0.8            | 196 330          | 225            | 196 105          | -165 090          | -169 814          | 99.29%        | 0.51%         | 0.20%         |
| 32        |          |      |      | 1.0            | 241 572          | 226            | 241 346          | -203 308          | -209 003          | 95.29%        | 3.66%         | 1.05%         |
| 33        |          |      |      | 1.2            | 275 192          | 228            | 274 964          | -231 666          | -238 149          | 91.02%        | 7.75%         | 1.23%         |
| 34        |          |      | 1.0  | 0.8            | 235 596          | 225            | 235 371          | -198 152          | -203 822          | 99.29%        | 0.51%         | 0.20%         |
| 35        |          |      |      | 1.0            | 289 887          | 226            | 289 660          | -244 015          | -250 849          | 95.29%        | 3.66%         | 1.05%         |
| 36        |          |      |      | 1.2            | <b>330 230</b>   | <b>228</b>     | <b>330 002</b>   | <b>-278 045</b>   | <b>-285 824</b>   | <b>91.02%</b> | <b>7.75%</b>  | <b>1.23%</b>  |
| 37        | Invierno | C1   | 0.8  | 0.8            | 155 991          | 225            | 155 766          | -131 185          | -134 839          | 95.34%        | 3.81%         | 0.84%         |
| 38        |          |      |      | 1.0            | 186 626          | 227            | 186 399          | -156 997          | -161 395          | 90.17%        | 8.66%         | 1.17%         |
| 39        |          |      |      | 1.2            | 207 245          | 228            | 207 017          | -174 488          | -179 188          | 87.13%        | 11.08%        | 1.79%         |
| 40        |          |      | 1.0  | 0.8            | 194 989          | 225            | 194 763          | -164 037          | -168 605          | 95.34%        | 3.81%         | 0.84%         |
| 41        |          |      |      | 1.0            | 233 282          | 227            | 233 055          | -196 302          | -201 800          | 90.17%        | 8.66%         | 1.17%         |
| 42        |          |      |      | 1.2            | 259 056          | 228            | 258 828          | -218 167          | -224 042          | 87.13%        | 11.08%        | 1.79%         |
| 43        |          | C2   | 1.0  | 0.8            | 233 987          | 225            | 233 761          | -196 890          | -202 372          | 95.34%        | 3.81%         | 0.84%         |
| 44        |          |      |      | 1.0            | 279 939          | 227            | 279 712          | -235 608          | -242 206          | 90.17%        | 8.66%         | 1.17%         |
| 45        |          |      |      | 1.2            | <b>310 867</b>   | <b>228</b>     | <b>310 639</b>   | <b>-261 845</b>   | <b>-268 896</b>   | <b>87.13%</b> | <b>11.08%</b> | <b>1.79%</b>  |
| 46        |          |      | 1.0  | 0.8            | 157 107          | 273            | 156 834          | -132 008          | -135 801          | 83.52%        | 0.16%         | 16.33%        |
| 47        |          |      |      | 1.0            | 193 253          | 275            | 192 977          | -162 531          | -167 119          | 73.10%        | 2.03%         | 24.87%        |
| 48        |          |      |      | 1.2            | 220 061          | 277            | 219 783          | -185 126          | -190 334          | 66.29%        | 3.86%         | 29.85%        |
| 49        |          | C3   | 0.8  | 0.8            | 196 384          | 273            | 196 111          | -165 078          | -169 820          | 83.52%        | 0.16%         | 16.33%        |
| 50        |          |      |      | 1.0            | 241 566          | 275            | 241 290          | -203 233          | -208 967          | 73.10%        | 2.03%         | 24.87%        |
| 51        |          |      |      | 1.2            | 275 076          | 277            | 274 799          | -231 477          | -237 987          | 66.29%        | 3.86%         | 29.85%        |
| 52        |          |      | 1.0  | 0.8            | 235 661          | 273            | 235 388          | -198 149          | -203 839          | 83.52%        | 0.16%         | 16.33%        |
| 53        |          |      |      | 1.0            | 289 879          | 275            | 289 603          | -243 934          | -250 816          | 73.10%        | 2.03%         | 24.87%        |
| 54        |          |      |      | 1.2            | <b>330 091</b>   | <b>277</b>     | <b>329 814</b>   | <b>-277 828</b>   | <b>-285 640</b>   | <b>6.29%</b>  | <b>3.86%</b>  | <b>29.85%</b> |
| 55        | Invierno | C1   | 0.8  | 0.8            | 92 269           | 225            | 92 044           | -59 649           | -59 702           | 99.27%        | 0.60%         | 0.14%         |
| 56        |          |      |      | 1.0            | 114 824          | 227            | 114 597          | -74 260           | -74 327           | 93.57%        | 5.90%         | 0.53%         |
| 57        |          |      |      | 1.2            | 136 439          | 229            | 136 210          | -88 257           | -88 329           | 83.97%        | 15.49%        | 0.54%         |
| 58        |          |      | 1.0  | 0.8            | 115 336          | 225            | 115 112          | -74 617           | -74 684           | 99.27%        | 0.60%         | 0.14%         |
| 59        |          |      |      | 1.0            | 143 530          | 227            | 143 303          | -92 881           | -92 965           | 93.59%        | 5.89%         | 0.51%         |
| 60        |          |      |      | 1.2            | 170 549          | 229            | 170 320          | -110 379          | -110 469          | 83.96%        | 15.49%        | 0.54%         |
| 61        |          | C2   | 0.8  | 0.8            | 138 404          | 225            | 138 179          | -89 586           | -89 666           | 99.27%        | 0.60%         | 0.14%         |
| 62        |          |      |      | 1.0            | 172 236          | 227            | 172 009          | -111 503          | -111 603          | 93.59%        | 5.89%         | 0.51%         |
| 63        |          |      |      | 1.2            | <b>204 659</b>   | <b>229</b>     | <b>204 430</b>   | <b>-132 500</b>   | <b>-132 609</b>   | <b>83.96%</b> | <b>15.49%</b> | <b>0.54%</b>  |
| 64        |          |      | 1.0  | 0.8            | 91 885           | 226            | 91 659           | -59 382           | -59 435           | 94.75%        | 4.65%         | 0.60%         |
| 65        |          |      |      | 1.0            | 114 440          | 228            | 114 211          | -73 992           | -74 059           | 83.50%        | 15.81%        | 0.69%         |
| 66        |          |      |      | 1.2            | 135 240          | 231            | 135 008          | -87 483           | -87 552           | 73.44%        | 25.84%        | 0.72%         |
| 67        |          | C3   | 0.8  | 0.8            | 114 856          | 226            | 114 631          | -74 284           | -74 350           | 94.75%        | 4.65%         | 0.60%         |
| 68        |          |      |      | 1.0            | 143 049          | 228            | 142 821          | -92 547           | -92 631           | 83.50%        | 15.81%        | 0.69%         |
| 69        |          |      |      | 1.2            | 169 050          | 231            | 168 818          | -109 412          | -109 498          | 73.44%        | 25.84%        | 0.72%         |
| 70        |          |      | 1.0  | 0.8            | 137 827          | 226            | 137 602          | -89 185           | -89 266           | 94.75%        | 4.65%         | 0.60%         |
| 71        |          |      |      | 1.0            | 171 659          | 228            | 171 431          | -111 102          | -111 202          | 83.50%        | 15.81%        | 0.69%         |
| 72        |          |      |      | 1.2            | <b>202 860</b>   | <b>231</b>     | <b>202 628</b>   | <b>-131 340</b>   | <b>-131 444</b>   | <b>73.44%</b> | <b>25.84%</b> | <b>0.72%</b>  |
| 73        | C3       | 0.8  | 0.8  | 92 076         | 273              | 91 803         | -59 467          | -59 520           | 83.47%            | 1.99%         | 14.54%        |               |
| 74        |          |      | 1.0  | 113 747        | 276              | 113 471        | -73 499          | -73 558           | 71.58%            | 11.26%        | 17.16%        |               |
| 75        |          |      | 1.2  | 130 811        | 278              | 130 533        | -84 658          | -84 718           | 64.48%            | 16.58%        | 18.94%        |               |
| 76        |          |      | 0.8  | 115 096        | 273              | 114 822        | -74 402          | -74 469           | 83.47%            | 1.99%         | 14.54%        |               |
| 77        |          | 1.0  | 1.0  | 142 184        | 276              | 141 908        | -91 942          | -91 942           | 71.58%            | 11.26%        | 17.16%        |               |
| 78        |          |      | 1.2  | 163 514        | 278              | 163 514        | -105 893         | -105 967          | 64.48%            | 16.58%        | 18.94%        |               |
| 79        |          |      | 0.8  | 138 115        | 273              | 137 842        | -89 337          | -89 417           | 83.47%            | 1.99%         | 14.54%        |               |
| 80        |          |      | 1.0  | 170 621        | 276              | 170 345        | -110 386         | -110 475          | 71.58%            | 11.26%        | 17.16%        |               |
| 81        |          |      | 1.2  | <b>196 217</b> | <b>278</b>       | <b>195 939</b> | <b>-127 127</b>  | <b>-127 217</b>   | <b>64.48%</b>     | <b>16.58%</b> | <b>18.94%</b> |               |

La interpretación de cada escenario en la Tabla 2 es similar. A modo de ejemplo, en el escenario 1, para un decremento en los precios y la demanda del 20%, los ingresos son de 557 905 MCOP, los costos de 225 MCOP, la utilidad de 557 680 MCOP, el valor en riesgo condicionado o CVaR es de -480 394 MCOP y el valor en riesgo o VaR es de -486 406 MCOP. Lo anterior indica que si no se obtiene una utilidad de \$ 486 406 MCOP, entonces se obtendría en promedio una utilidad de \$ 480 394 MCOP con un nivel de confianza del 95%.

En sequía para la configuración C1 cuando el factor de precio es 1.0 y el de demanda es 0.8, el modelo ajusta el portafolio asignando a la tecnología hídrica en un 95.99%, el cual aumenta cuando la disponibilidad hídrica aumenta, situación muy similar para los factores de demanda 1.0 y 1.2, aunque con menor participación de dicha tecnología, lo que se explica por sus limitaciones de capacidad efectiva neta (CEN), la cual se suple con las tecnologías térmica y eólica, ver la Figura 2.

Para la configuración C2 el modelo presenta mayor participación de la tecnología térmica en el portafolio situación que es congruente con su mayor CEN térmica y menor CEN hídrica, ver la Figura 3.

El portafolio de la configuración C3 mostrado en la Figura 4 presenta similares características que las anteriores configuraciones dando más participación a la tecnología eólica, que tiene una CEN más amplia disponible, y menor participación a la hídrica que posee menor CEN.

## 5. Conclusiones

En esta investigación se logra incorporar el CVaR, una medida de riesgo coherente, a un modelo de optimización estocástica que tiene en cuenta elementos de incertidumbre en la demanda, el clima y en los precios, para la determinación de portafolios óptimos de generación de energía eléctrica. Además, el modelo permite la inclusión de diferentes tecnologías de generación y diferentes tipos de plantas para cada tecnología con sus respectivas restricciones técnicas.

El modelo es novedoso en cuanto a que incluye el CVaR para la valoración de los portafolios de generación de energía eléctrica, y se aplica a un caso real del mercado energético colombiano. En este trabajo se quiere motivar el uso de medidas de riesgo en modelos matemáticos para la toma de decisiones en sistemas estratégicos para la ciudad y el país.

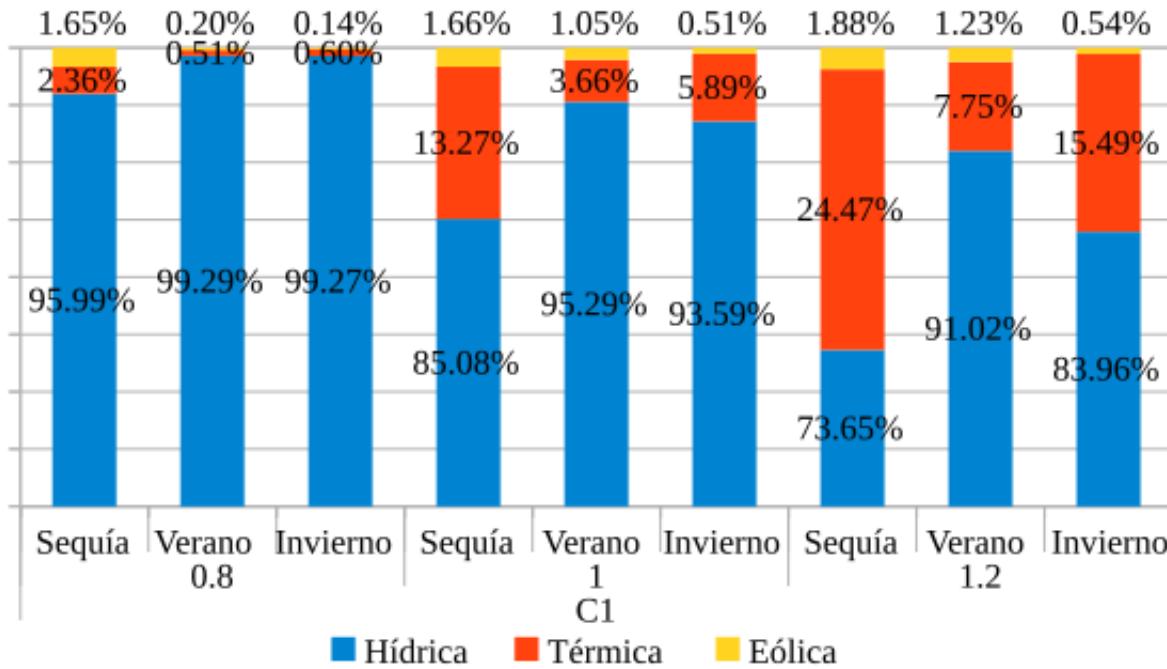


Figure 2: Portafolios óptimos factor de precio 1 (configuración C1).

El modelo responde satisfactoriamente a los cambios debidos a las diferentes condiciones climáticas asociadas a los aportes en caudal de los ríos que abastecen los embalses de las centrales hidroeléctricas, y que determinan sus niveles, modificando en consecuencia los portafolios de generación totales según las diferentes tecnologías.

Además, el modelo es sensible a los cambios en los costos de generación de energía eléctrica de las diferentes tecnologías, priorizando la generación de aquellas plantas y tecnologías con menores costos de generación. Igualmente, el modelo es sensible a cambios en la demanda y los precios de energía eléctrica.

Desde la perspectiva de los portafolios, en este trabajo el modelo considera tres tecnologías de generación eléctrica (hídrica, térmica y eólica), y cada una se toma como componente de un portafolio óptimo de generación energética. El modelo de optimización propuesto indica que los portafolios óptimos de generación no cambian significativamente cuando hay cambios en los precios, pero sí lo hacen en presencia de cambios en la demanda. Esto es debido a que la utilidad es siempre positiva, por lo tanto, si la demanda aumenta la producción de energía también lo hace y los resultados indican que un aumento en la demanda genera un aumento en la utilidad total. Además, de acuerdo al supuesto sobre los costos, en verano hay mayor utilidad que en invierno, debido a que, en el primero, los precios de la energía eléctrica en la bolsa tienden a aumentar. Sin embargo, este comportamiento depende fuertemente de dichos supuestos.

El modelo también muestra que en condiciones climáticas de sequía hay una disminución porcentual de la generación hidroeléctrica en favor de la generación térmica, situación congruente con el hecho de que en verano hay menos disponibilidad hídrica.

Por otro lado, se puede ver que al aumentar el factor de la demanda la participación de las hidroeléctricas frente a las otras tecnologías disminuye en razón de que para poder abastecer la demanda se requiere mayor generación de energía por parte de las otras dos tecnologías.

En cuanto a aquellos escenarios en los que se consideraron situaciones climáticas en la que el recurso hídrico es escaso (verano y sequía), el modelo indica que en algunos casos se debe aumentar considerablemente el porcentaje de producción de energías térmica o eólica para contrarrestar la escasez del recurso hídrico.

Para las tres condiciones climáticas, los resultados indican que el mayor riesgo se encuentra cuando

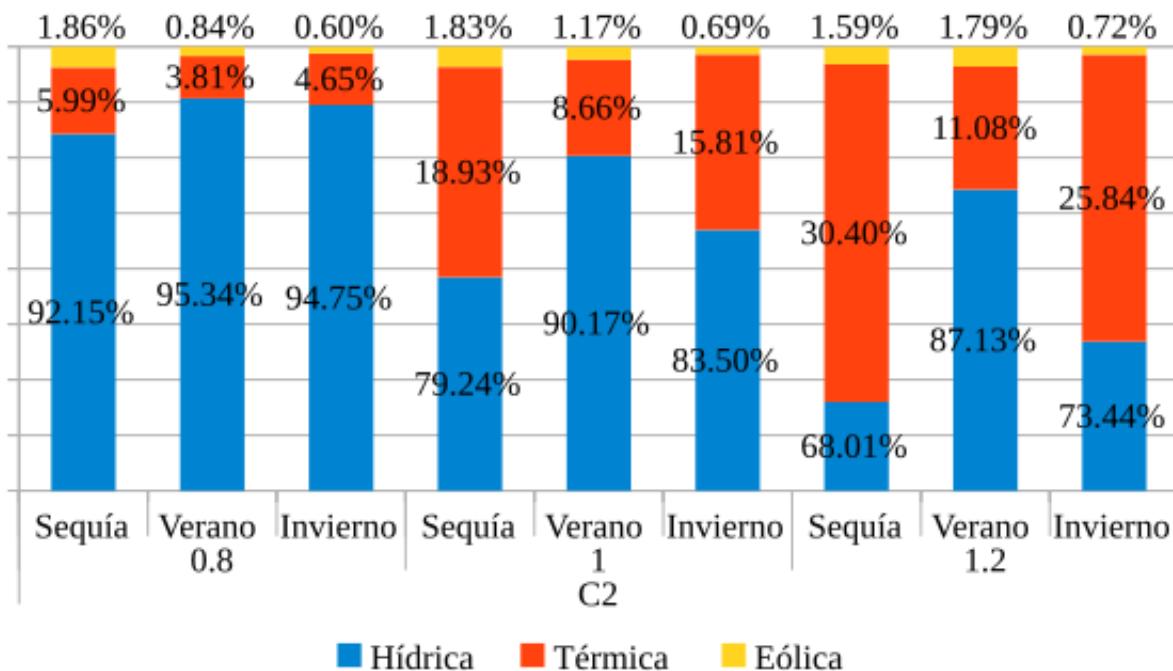


Figure 3: Portafolios óptimos factor de precio 1 (configuración C2).

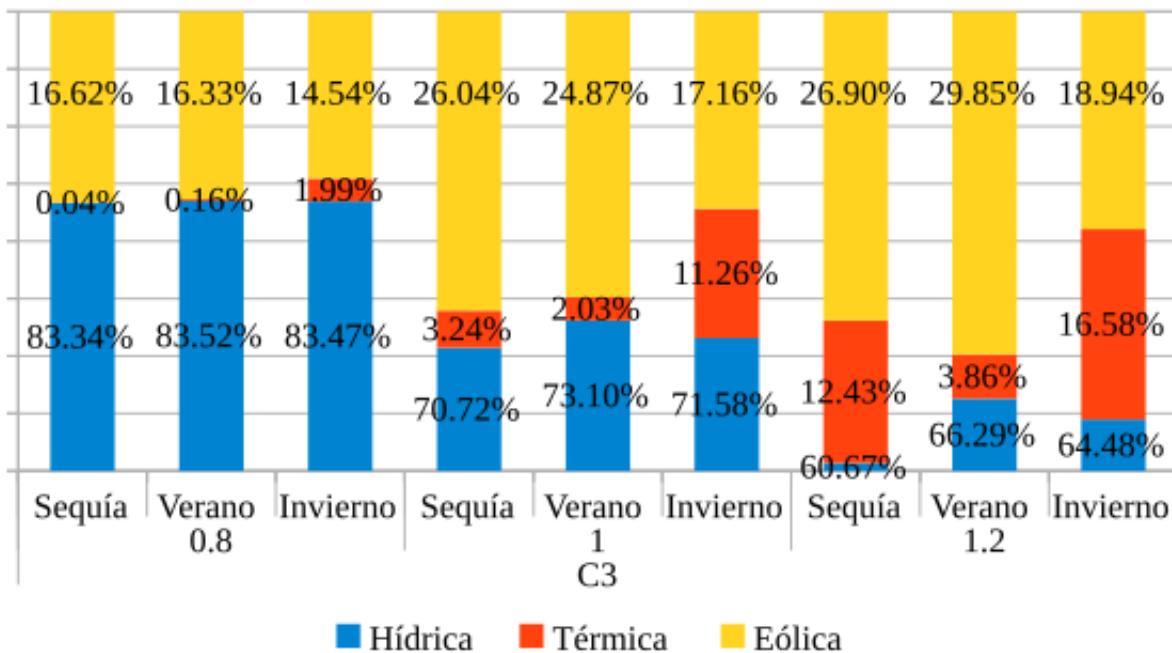


Figure 4: Portafolios óptimos factor de precio 1 (configuración C3).

hay disminuciones en la demanda y en los precios. Esto es debido a que ambas reducciones implican una disminución en las utilidades.

Análogamente, se tiene que los escenarios menos riesgosos para las tres condiciones climáticas se presentan cuando hay incrementos en la demanda y en los precios, ya que hay un aumento en la utilidad; por su parte el modelo es mucho más sensible a la variación en la demanda.

En relación a los supuestos sobre los precios, la estructura del modelo permite considerar una estructura funcional de los precios spot que podría hacer más predictivo el portafolio.

Finalmente, la aplicación del modelo indica que, siempre hay ganancias considerando la información que se tiene sobre los precios, la demanda y el clima, pero que en caso de un cambio abrupto en alguno de ellos o en todos, el modelo permite considerar y simular este tipo de situaciones para una mejor planificación y propuesta de portafolio. De hecho, puede simular posibilidades con otro tipo tecnologías sobre las cuales se pueda tener información, considerando siempre el riesgo, que podría no ser nulo.

Algunas futuras investigaciones pueden estar dirigidas a la inclusión de otras tecnologías de generación. Particularmente, las fuentes renovables de energía son de gran interés debido a la actual preocupación por la conservación del medio ambiente. Adicionalmente, se puede explorar la inclusión de variables técnicas y de diseño propias de cada fuente de generación de energía con el fin de identificar la configuración que presente la mejor eficiencia energética.

## References

1. Mustafa S. Al-Swaiti, Ali T. Al-Awami, and Mohammad Waqas Khalid. Co-optimized trading of wind-thermal-pumped storage system in energy and regulation markets. *Energy*, 138:991–1005, 2017.
2. S. Awerbuch and Martin Berger. Applying portfolio theory to eu electricity planning and policy making. techreport IAEA/EET No. 03, International Energy Agency, Paris, France, February 2003.
3. Shimon Awerbuch. Portfolio-based electricity generation planning: Policy implications for renewables and energy security. *Mitigation and Adaptation Strategies for Global Change*, 11(3):693–710, 2006.
4. Shimon Awerbuch, J.C. Jansen, and L.W. Beurskens. Building capacity for portfolio based energy planning in developing countries Shifting the Grounds for Debate. Technical Report 1, United Nations Environment Programme, 2004.
5. Miguel Carrión, Andy B. Philpott, Antonio J. Conejo, and José M. Arroyo. A stochastic programming approach to electric energy procurement for large consumers. *IEEE Transactions on Power Systems*, 22(2):744–754, 2007.

6. CREG. Medidas para la promoción de la competencia en el mercado de electricidad mayorista, 2010.
7. Alexander Eydeland and Krzysztof Wolyneic. *Energy and Power Risk Management*. Wiley Finance, 2003.
8. Reinaldo C. Garcia, Virginia González, Javier Contreras, and Janiele E.S.C. Custodio. Applying modern portfolio theory for a dynamic energy portfolio allocation in electricity markets. *Electric Power Systems Research*, 150:11–23, 2017.
9. F. Javier Heredia, Julián Cifuentes-Rubiano, and Cristina Corchero. Stochastic optimal generation bid to electricity markets with emissions risk constraints. *Journal of Environmental Management*, 207:432–443, 2018.
10. Mohammad Jadidbonab, Ebrahim Babaei, and Behnam Mohammadi-ivatloo. CVaR-constrained scheduling strategy for smart multi carrier energy hub considering demand response and compressed air energy storage. *Energy*, 174:1238–1250, 2019.
11. Liwei Ju, Qinliang Tan, Yan Lu, Zhongfu Tan, Yuxie Zhang, and Qingkun Tan. A CVaR-robust-based multi-objective optimization model and three-stage solution algorithm for a virtual power plant considering uncertainties and carbon emission allowances. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 107:628–643, 2019.
12. Javad Karkhaneh, Yousef Allahvirdizadeh, Heidarali Shayanfar, and Sadjad Galvani. Risk-constrained probabilistic optimal scheduling of FCPP-CHP based energy hub considering demand-side resources. *International Journal of Hydrogen Energy*, 45(33):16751–16772, 2020.
13. Florian Kienzle, Gaudenz Koeppel, Pascal Stricker, and Göran Andersson. Efficient electricity production portfolios taking into account physical boundaries. *Methods*, pages 1–17, 2007.
14. Santiago Lemos Cano and Sergio Botero Botero. Optimización del portafolio de generación hidro-térmico en el mercado eléctrico Colombiano. *DYNA (Colombia)*, 79(175):62–71, 2012.
15. Chen Li, Fajie Wei, Shan Lu, and Junwei Zeng. Dynamic energy portfolio optimization model for electricity system and heating system. In *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, volume 2016–December, pages 1677–1682. IEEE Computer Society, 2016.
16. Ricardo M. Lima, Antonio J. Conejo, Sabique Langodan, Ibrahim Hoteit, and Omar M. Knio. Risk-averse formulations and methods for a virtual power plant. *Computers and Operations Research*, 96:350–373, 2018.
17. Sebastian Martin, Yves Smeers, and Jose Antonio Aguado. A stochastic two settlement equilibrium model for electricity markets with wind generation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 30(1):233–245, 2015.
18. Franklin Kelly Miguel and Dorel Soares Ramos. Analysis of PROINFA Power Plants Portfolio from the Perspective of Markowitz. *IEEE Latin America Transactions*, 15(9):1650–1656, 2017.
19. J.I Muñoz Hernandez, A.A Sánchez de la Nieta, J Contreras, and J.L Bernal Agustín. Optimización De Una Cartera De Inversión En Energías Renovables: El Caso Español. In *XII Congreso Internacional de Ingeniería de proyectos*, pages 8–10, 2009.
20. Francisco D. Munoz, Adriaan Hendrik van der Weijde, Benjamin F. Hobbs, and Jean Paul Watson. Does risk aversion affect transmission and generation planning? A Western North America case study. techreport USAEE Working Paper No. 17-305, United States Association for Energy Economics, 2017.
21. Harry H. Panjer. *Operational risk: Modeling analytics*. Wiley, 2006.
22. Georg Ch. Pflug. Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk. In Stanislav Uryasev, editor, *Probabilistic Constrained Optimization*, pages 272–281. 2000.
23. Manuel Alejandro Poveda. Modelamiento del precio de bolsa incluyendo costos de arranque y parada en el mercado eléctrico colombiano. Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2012.
24. Svetlozar T. Rachev, Stoyan V. Stoyanov, and Frank J. Fabozzi. *A Probability Metrics Approach to Financial Risk Measures*. Wiley, 2011.
25. R. Tyrrell Rockafellar and Stanislav Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk. *The Journal of Risk*, 2(3):21–41, 2000.
26. Mónica Sánchez, Carlos Arturo Lozano Moncada, and Diego Manotas. Modelo de valoración de riesgo financiero en la gestión de contratos de suministro de energía eléctrica. *Revista Tecnura*, 18(39):110, 2013.
27. Luiz Armando Steinle Camargo, Dorel Soares Ramos, Ewerton Guarnier, Sergio Ishida, and Eduardo Matsudo. Alternative Generation Sources Portfolio: Optimal Resources Allocation and Risk Analysis Supported by Genetics Algorithms. *IEEE Latin America Transactions*, 14(7):3232–3241, 2016.
28. Zhongfu Tan, Guan Wang, Liwei Ju, Qingkun Tan, and Wenhui Yang. Application of CVaR risk aversion approach in the dynamical scheduling optimization model for virtual power plant connected with wind-photovoltaic-energy storage system with uncertainties and demand response. *Energy*, 124:198–213, 2017.
29. Stanislav Uryasev. Conditional Value-at-Risk: optimization algorithms and applications. In *IEEE/IAFE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering, Proceedings (CIFEr)*, pages 49–57, New York, NY, USA, 2000. IEEE, Piscataway, NJ, United States.
30. Ugur Yildiran and Ismail Kayahan. Risk-averse stochastic model predictive control-based real-time operation method for a wind energy generation system supported by a pumped hydro storage unit. *Applied Energy*, 226:631–643, 2018.

*Luis Felipe Castañeda Gallego,  
MSc. Matemáticas Aplicadas,  
Universidad EAFIT,  
Medellín, Colombia.  
E-mail address: lcastaneda@umanizales.edu.co*

*and*

*Juan Carlos Rivera,  
Analytics and supply chain research group,  
Universidad EAFIT,  
Medellín, Colombia.  
E-mail address: jrivera6@eafit.edu.co*

*and*

*Maria Eugenia Puerta Yepes,  
Mathematical applications in science and engineering research group,  
Universidad EAFIT,  
Medellín, Colombia.  
E-mail address: mpuerta@eafit.edu.co*

*and*

*Luis Jaime Salazar Ramírez,  
MSc. Matemáticas Aplicadas,  
Universidad EAFIT,  
Medellín, Colombia.  
E-mail address: luis.salazar.ramirez@gmail.com*