Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) v. 2025 (43) : 1–7.
©SPM – E-ISSN-2175-1188 ISSN-0037-8712
SPM: www.spm.uem.br/bspm doi:10.5269/bspm.66149

Vitesse de convergence de l'estimateur des moindres carrés dans les ARCH(p) périodiques

Abdelouahab Bibi

ABSTRACT: On étudie l'estimateur des moindres carrés d'un modèle $ARCH(p)$ périodique ($PARCH(p)$). Cet estimateur est construit à partir de la représentation AR périodique (PAR) du modèle $PARCH$. Nous montrons que cet estimateur est asymptotiquement stable, fortement consistent et nous déterminons sa vitesse de convergence presque sûre ($p.s.$).

Key Words: ARCH périodiques, Stationnarité périodique, LSE, Consistance forte, Normalité Asymptotique, Vitesse de convergence.

Contents

1. Introduction

Les modèles $GARCH$ périodiques ($PGARCH$) introduits par Bollerslev et Ghysels [5] ont été étudiés par Aknouche et Bibi [1] and Bibi et Aknouche [4] Ces auteurs ont étudie les propriétés probabilistes et statistiques des modèles $PGARCH$ et des modèles $ARMA$ périodiques à erreur $PGARCH$. Dans cette Note, nous nous intéressons à la stabilité asymptotique de l'estimateur des moindres carrés (LSE) d'un modèle $PARCH\,(p)$. Nous montrons que sous des hypothèses voisines de celles utilisées par Voffal [18], l'estimateur LSE est asymptotiquement stable, fortement consistant et nous déterminons sa vitesse de convergence. Rappelons ici qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ du second ordre défini sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$ est appelé $ARCH(p)$ périodique de période connue $s>0$, s'il vérifie les équations

$$\begin{cases} X_n = e_n\sqrt{h_n} \\ h_n := a_0(s_n)+\sum\limits_{i=1}^{p} a_i(s_n)X_{n-i}^2, \forall n\in\mathbb{Z}:=\{0,\pm1,\pm2,...\} \end{cases} \tag{1.1}$$

où $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires $i.i.d.$ centrées, réduites, admettant des moments jusqu'à l'order quatre et définie sur le même espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$. La suite $(s_n)_n$ est une suite périodique à valeurs dans $\mathbb{S}=\{1,...,s\}$, définie pas : $s_n=\sum\limits_{v=1}^{s} v\mathbb{I}_{\Delta(v)}(n)$ où $\Delta(v)=\{st+v|t\in\mathbb{Z}\}$, $v\in\mathbb{S}$. Les suites $(a_0(s_n))_n$, $(a_i(s_n))_n$ sont telles que $a_0(s_n)>0$, $a_i(s_n)\geq 0$, $1\leq i\leq p$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. En posant $n=st+v$, nous obtiendrons la représentation "saisonnière" équivalente à (1.1)

$$\begin{cases} X_{st+v} = e_{st+v}\sqrt{h_{st+v}} \\ h_{st+v} = a_0(v)+\sum\limits_{i=1}^{p} a_i(v)X_{st+v-i}^2 \end{cases}. \tag{1.2}$$

Dans (1.2), X_{st+v} (resp. e_{st+v}, h_{st+v}) désigne le processus X_t (resp. e_t, h_t) durant la $v-$ième "saison" $v\in\mathbb{S}$ de "l'année" t. Dans la suite, on convient de poser $X_{st+v}=X_{s(t-1)+v+s}$ (resp. $e_{st+v}=e_{s(t-1)+v+s}$,

Submitted December 04, 2022. Published December 29, 2024
2010 *Mathematics Subject Classification:* 62M10-62M09, 62M05.

$h_{st+v} = h_{s(t-1)+v+s}$) lorsque $st+v \leq 0$. Outre la représentation (1.2), on a une représentation $PAR(p)$ sur le carré du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ i.e.,

$$X^2_{st+v} = a_0(v) + \sum_{i=1}^{p} a_i(v) X^2_{st+v-i} + \eta_{st+v},\ v \in \mathbb{S} \tag{1.3}$$

où $\eta_t = X^2_t - h_t = h_t\left(e^2_t - 1\right)$. Lorsque le processus $\left(X^2_t\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ est intégrable (par conséquent $(h_t)_{t\in\mathbb{Z}}$), les innovations $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont des différences de martingales adaptées à une filtration $\Im := (\Im_t)_t$. Cependant, et Grace à Gladyshev [10], le processus $\left(X^2_t\right)_{t\in\mathbb{Z}}$ (1.3) admet une représentation autorégressive vectorielle, i.e.,

$$\left(\mathbf{I}_{(s)} - \mathbf{A}_0\right) \underline{X}^2_t = \underline{a}_0 + \sum_{i=1}^{p^*} \mathbf{A}_i \underline{X}^2_{t-i} + \underline{\eta}_t \tag{1.4}$$

où $\underline{X}^2_t = \left(X^2_{st+1}, ..., X^2_{st+s}\right)'$, $\underline{\eta}_t = (\eta_{st+1}, ..., \eta_{st+s})'$ et $\mathbf{I}_{(s)}$ est la matrice identité d'ordre $s\times s$. L'ordre du modèle (1.4) est donné par $p^* = \left[\frac{p}{s}\right]$ où $[x]$ est la partie entière de x (c'est le plus petit entier vérifiant $[x]-1 < x \leq [x]$). $\underline{a}_0 = (a_0(1), ..., a_0(s))'$ et les $s\times s$ matrices $(\mathbf{A}_i)_{0\leq i\leq p^*}$ sont uniquement déterminées pas (see Basawa and Lund [3]) $(\mathbf{A}_0)_{i,j} = a_{i-j}(i)$ si $i > j$ et 0 sinon, et $(\mathbf{A}_m)_{i,j} = a_{ms+i-j}(i)$ pour $1 \leq m \leq p^*$. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dit periodiquement stationnaire au second ordre (au sens périodique) si

H1 : $\det\left(\mathbf{I}_{(s)} - \sum\limits_{i=0}^{p^*} \mathbf{A}_i z^i\right) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$:tel que $|z| \leq 1$.

Notons que sous **H1**, le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet une solution périodiquement corrélée au sens que $E\left\{X^2_{l+s}\right\} = E\left\{X^2_l\right\}$ pour tout l. De plus le processus solution est unique, $\Im_t-$mesurable et périodiquement ergodique (cf. Bibi et Aknouche [4]).

2. Stabilité de l'estimateur des moindres carrés

Soient $\underline{\theta} = (\underline{\theta}'(1), ..., \underline{\theta}'(s))'$, $\mathbf{Z}'_t := diag\left\{\underline{Z}'_t(1), ..., \underline{Z}'_t(s)\right\}$ où $\underline{\theta}(v) = (a_0(v), a_1(v), ..., a_p(v))'$ et $\underline{Z}'_t(v) := (1, X^2_{st+v-1}, ..., X^2_{st+v-p})$, $v \in \mathbb{S}$,. Avec ces notations, le modèle (1.3) se transforme en un modèle de régression linéaire

$$\underline{X}^2_t = \mathbf{Z}'_t \underline{\theta} + \underline{\eta}_t. \tag{2.1}$$

Dans cette Note, nous nous intéressons à l'estimateur des moindres carrés du paramètre $\underline{\theta}$ en vue d'une réalisation $\{X_1, X_2, ..., X_{sn}\}$ (ou de $\{\underline{X}_1, \underline{X}_2, ..., \underline{X}_n\}$) du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par (1.2) (ou de sa version vectorièlle $(\underline{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ définie par (1.4)) vérifiant **H1**. Outre la représentation (1.3), la pramétrisation (2.1) englobe certaines extensions récapitulées dans le Tableau(1) suivant

Noms	$\underline{Z}'_t(\nu)\,\underline{\theta}(\nu)$
$\beta - PARCH$ (Guegan and Diebolt (1994) [13])	$a_0(v) + \sum\limits_{i=1}^{p}\left(a^-_i(v) + b^+_i(v)\right)\lvert X_{st+v-i}\rvert^{\beta}$
$\mu - PARCH$ (Engle and Bollerslev, (1986) [8])	$a_0(v) + \sum\limits_{i=1}^{p} a_i(v)\lvert X_{st+v-i}\rvert^{\mu}$
$GJR - PARCH$ (Glosten et al., (1993) [11])	$a_0(v) + \sum\limits_{i=1}^{p}\left(a^-_i(v) + b^+_i(v)\right) X^2_{st+v-i}$
$SD - PARCH$ (Schwert, (1990) [15])	$a_0(v) + \sum\limits_{i=1}^{p} a_i(v)\lvert X_{st+v-i}\rvert + \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=i}^{p} b_{ij}(v)\lvert X_{st+v-i}X_{st+v-j}\rvert$
$T - PARCH$ (Gourieroux and Monfort, (1992) [12])	$a_0(v) + \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p} b_{ij}(v) I_{A_j}(X_{st+v-i})$

Tableau(1): Exemples de paramétrisation de (2.1), $\mathbb{I}_A$ designe la fonction indicatrice de l'ensemble A et β, μ sont des paramètres d'intérêts

where $a^-_i(v) = a_i(v) I_{\{X_{st+v-i}<0\}}$ et $b^+_i(v) = b_i(v) I_{\{X_{st+v-i}\geq 0\}}$. Posons $\mathbf{S}_n = \sum\limits_{t=1}^{n} \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}'_t = diag\left\{\mathbf{S}_n(1), ..., \mathbf{S}_n(s)\right\}$, $\underline{S}_n = \sum\limits_{t=1}^{n} \mathbf{Z}_t \underline{\eta}_t = \left(\underline{S}'_n(1), ..., \underline{S}'_n(s)\right)'$ où $\mathbf{S}_n(v) = \sum\limits_{t=1}^{n} \underline{Z}_t(v) \underline{Z}'_t(v)$, $\underline{S}_n(v) =$

$\sum_{t=1}^{n} \underline{Z}_t(v)\eta_{st+v}$, et désignons par $\lambda_{\max}^{(v)}(n)$ (resp. $\lambda_{\min}^{(v)}(n)$) la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de $\mathbf{S}_n(v)$ pour tout $v \in \mathbb{S}$. Afin d'établir les propriétés asymptotiques, faisons les hypothèses suivantes:

$\mathbf{H}(\varepsilon)$: $E\left\{\|\underline{X}_t\|^{4+2\varepsilon}\right\} < +\infty$, où ε est un réel positif. Lorsque $\varepsilon = 0$, cette hypothèse est notée **H0**.

H2 : $\lambda_{\min}^{(v)}(n) \to \infty$, *p.s.* et $\log \lambda_{\max}^{(v)}(n) = o_p(\lambda_{\min}^{(v)}(n))$ pour tout $v \in \mathbb{S}$.

L'hypothèse $\mathbf{H}(\varepsilon)$ peut être traduite par des conditions simples sur les paramètres $(a_i(v),\, v \in \mathbb{S})_{0\le i\le p}$ (voir [1]). L'hypothèse **H2** constitue les "meilleurs" conditions pour lesquelles $\widehat{\underline{\theta}}_n \to \underline{\theta}$, *p.s.* quand $n \to \infty$ (cf. [14]). Notons que les propriétés asymptotiques de l'estimateur des moindres carrés sont liées étroitement à celles du processus $(\underline{S}_n)_{n\ge1}$ et des matrices aléatoires $\mathbf{S}_n$. Lorsque $E\left\{\underline{\eta}_t\underline{\eta}_t'|\Im_{t-1}\right\} = \Sigma < \infty$ et $E\{\mathbf{Z}_n\mathbf{Z}_n'\} < \infty$ pour tout n, la matrice aléatoire $\mathbf{S}_n$ (à une matrice constante près) n'est autre que la covarianve conditionnelle de $\underline{S}_n$, i.e., $\sum_{t=1}^{n} E\left\{\left(\mathbf{Z}_t\underline{\eta}_t\right)\left(\mathbf{Z}_t\underline{\eta}_t\right)'|\Im_{t-1}\right\} = \left(\Sigma\otimes\mathbf{I}_{(p+1)}\right)\mathbf{S}_n$. Les principaux résultats de la Note sont les suivants:

Theorem 2.1 *Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus $PARCH(p)$ et $(\underline{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sa version vectorielle. Sous* **H0** − **H1** *l'estimateur des moindres carrés $\widehat{\underline{\theta}}_n$ défini par $\widehat{\underline{\theta}}_n = \mathbf{S}_n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathbf{Z}_t\underline{X}_t^2 = \underline{\theta} + \mathbf{S}_n^{-1}\underline{S}_n$ existe et $\widehat{\underline{\theta}}_n \to \underline{\theta}$, p.s. quand $n \to \infty$.*

Theorem 2.2 *Sous* **H0** − **H2** *on a* $\left\|\widehat{\underline{\theta}}_n(v) - \underline{\theta}(v)\right\| = O_p\left(\left(\frac{\log \lambda_{\max}^{(v)}(n)}{\lambda_{\min}^{(v)}(n)}\right)^{1/2}\right)$ *pour tout $v \in \mathbb{S}$.*

Theorem 2.3 *Sous* **H0** − **H2***, on a $\sqrt{n}\left(\widehat{\underline{\theta}}_n - \underline{\theta}\right)$ converge en distribution vers une loi normale centrée de matrice de varaiance-covariance $S^{-1}IS^{-1}$ où I est la matrice de variance-covariance asymptotique du vecteur $\underline{S}_n$ et où $S = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}E\{\mathbf{S}_n\}$.*

3. Lemmes et démonstrations

Proof: du théorème **2.1**. Comme sous **H1** le processus $(\underline{S}_n)_{n\ge1}$ est une différence de martingale par rapport à la filtration $\Im$, alors sous **H0**, $\underline{S}_n = o_p(n)$ et $\mathbf{S}_n = O_p(n)$. Par conséquent l'estimateur des moindres carrés $\widehat{\underline{\theta}}_n$ existe *p.s.* et on a $\widehat{\underline{\theta}}_n - \underline{\theta} = \mathbf{S}_n^{-1}\underline{S}_n \to 0$, *p.s.* Ceci implique aussi que $\widehat{\underline{\theta}}_n(v) = \mathbf{S}_n^{-1}(v)\sum_{t=1}^{n}\underline{Z}_t(v)X_{st+v}^2$ pour tout $v \in \mathbb{S}$ et $\widehat{\underline{\theta}}_n(v) - \underline{\theta}(v) = \mathbf{S}_n^{-1}(v)\underline{S}_n(v) \to 0$ *p.s.* Ceci nous permet d'étudier le comportement asymptotique de l'estimateur dans chaque régime v. □

La démonstration du théorème 2.2 découle classiquement des lemmes suivants.

Lemma 3.1 *Soit* $\mathbf{W}$ *une matrice $q\times q$ et $\underline{\varphi}$ un vecteur de $\mathbb{R}^q$. Si la matrice $\mathbf{V} = \mathbf{W} + \underline{\varphi}\underline{\varphi}'$ est inversible alors $\underline{\varphi}'\mathbf{V}^{-1}\underline{\varphi} = \det\left(\mathbf{V}^{-1}\right)(\det\mathbf{V} - \det\mathbf{W})$.*

Proof: Nous avons $\det\mathbf{W} = \det(\mathbf{V} - \underline{\varphi}\underline{\varphi}') = \det(\mathbf{V})\det\left(\mathbf{I}_{(q)} - \mathbf{V}^{-1}\underline{\varphi}\underline{\varphi}'\right) = \det(\mathbf{V})(1 - \underline{\varphi}'\mathbf{V}^{-1}\underline{\varphi})$. □

Lemma 3.2 *Pour tout $v \in \{1,...,s\}$, la suite $\left(\lambda_{\max}^{(v)}(n)\right)_{n\ge0}$ est croissante, et s'il existe n_0 tel que $\mathbf{S}_{n_0}(v)$ soit inversible, alors $\mathbf{S}_n(v)$ est inversible $\forall n \ge n_0$ et on a*

$$\sum_{k=n_0}^{n}\underline{Z}_k'(v)\mathbf{S}_k^{-1}(v)\underline{Z}_k(v) = \begin{cases} O_p\left(\log\lambda_{\max}^{(v)}(n)\right) & si \lim_{n\to\infty}\lambda_{\max}^{(v)}(n) = \infty. \\ O_p(1) & si \lim_{n\to\infty}\lambda_{\max}^{(v)}(n) < +\infty. \end{cases}$$

Proof: Remarquons tout d'abord que $\mathbf{S}_n(v)-\mathbf{S}_{n-1}(v) = \underline{Z}_n(v)\underline{Z}'_n(v) > 0$. Comme $\mathbf{S}_n(v)$ est symétrique, elle est donc définie positive et par conséquent $\lambda^{(v)}_{\max}(n) \geq \lambda^{(v)}_{\max}(n-1)$ et $\lambda^{(v)}_{\min}(n) \geq \lambda^{(v)}_{\min}(n-1)$ (cf. [16] assertion 9.8). D'après le lemme 3.1 on a

$$\sum_{k=n_0}^{n} \underline{Z}'_k(v)\mathbf{S}_k^{-1}(v)\underline{Z}_k(v) = \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\det \mathbf{S}_k(v) - \det \mathbf{S}_{k-1}(v)}{\det \mathbf{S}_k(v)}. \tag{3.1}$$

Alors, comme $\forall k \geq n_0$

$$\left(\lambda^{(v)}_{\max}(k)\right)^q \geq \det \mathbf{S}_k(v) \geq \left(\lambda^{(v)}_{\min}(k)\right)^{q-1} \lambda^{(v)}_{\max}(k) \geq \left(\lambda^{(v)}_{\min}(n_0)\right)^{q-1} \lambda^{(v)}_{\max}(k) > 0,$$

et donc $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda^{(v)}_{\max}(k) = +\infty$, implique que: $\lim\limits_{n\to\infty} \det \mathbf{S}_n(v) = +\infty$, $\log\det \mathbf{S}_n(v) = O_p\left(\log \lambda^{(v)}_{\max}(n)\right)$ et

$$\sum_{k=n_0}^{n} \underline{Z}'_k(v)\mathbf{S}_k^{-1}(v)\underline{Z}_k(v) = O_p\left(\log\det \mathbf{S}_n(v)\right) = O_p\left(\log \lambda^{(v)}_{\max}(n)\right).$$

D'autre part, si $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^{(v)}_{\max}(n) < +\infty$, alors d'après (3.1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n} \underline{Z}'_k(v)\mathbf{S}_k^{-1}(v)\underline{Z}_k(v) &\leq \left(\lambda^{(v)}_{\min}(n_0)\right)^q \sum_{k=n_0}^{n} \left(\det \mathbf{S}_k(v) - \det \mathbf{S}_{k-1}(v)\right) \\ &\leq \left(\lambda^{(v)}_{\min}(n_0)\right)^q \left(\left(\lambda^{(v)}_{\max}(n)\right)^q - \det \mathbf{S}_{n_0}(v)\right).\end{aligned}$$

□

Le lemme suivant établit l'ordre de convergence de la suite $(\underline{S}_n)_{n\geq 1}$.

Lemma 3.3 *Sous* **H0** − **H1** *on a pour tout* $l \in \{1, ..., p\}$

Assertion1 : $\sum\limits_{t=1}^{n} X^2_{t-l}\eta_t$ *converge p.s. sur* $\{\sum\limits_{t=1}^{\infty} X^4_{t-l} < +\infty\}$ *et*

$$\left(\left(\sum_{t=1}^{n} X^4_{t-l}\right)^{1/2} \left[\log\left(\sum_{t=1}^{n} X^4_{t-l}\right)\right]^{\alpha}\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} X^2_{t-l}\eta_t \to 0 \text{ p.s.}$$

sur $\{\sum\limits_{t=1}^{\infty} X^4_{t-l} = \infty\}$ *pour tout* $\alpha > 1/2$. *Par conséquent* $\underline{S}_n(v) = o_p(\sum\limits_{t=1}^{n} X^4_{t-l}) + O_p(1)$ *pour tout* $v \in \mathbb{S}$.

Assertion2 : $\sum\limits_{t=1}^{n} X^2_{t-l}\eta^2_t$ *converge p.s. sur* $\{\sum\limits_{t=1}^{\infty} X^2_{t-l} < +\infty\}$ *et* $\sum\limits_{t=1}^{n} X^2_{t-l}\eta^2_t = o_p\left(\left(\sum\limits_{t=1}^{n} X^2_{t-l}\right)^r\right)$ *sur* $\{\sum\limits_{t=1}^{\infty} X^2_{t-l} = \infty\}$ *pour tout* $r > 1$

Proof: Pour tout $l \geq 1$, et sous **H1** le processus $X^2_{t-l}\eta_t$ est une différence de martingale adaptée à la filtration $\Im$, donc sous **H0** l'assertion 1 et 2 sont des conséquences immédiates du théorème de la convergence locale pour les martingales (cf. [6] théorème 20, p. 802).

□

Lemma 3.4 *Sous la condition* $\mathbf{H}(\varepsilon)$ *alors l'assertion* 2 *du lemme* 3.3 *peut être formulée comme suit*

Assertion3 : $\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{t=1}^{n}X_{t-l}^{2}\right)^{-1}\sum_{t=1}^{n}X_{t-l}^{2}\eta_t^2<+\infty$ *sur* $\{\sup_t X_{t-l}^2<+\infty$ *et* $\sum_{t=1}^{\infty}X_{t-l}^{2}=\infty\}$

Proof: L'assertion 3 résulte du théorème de Freedman [9], le lemme de Kronecker et l'assertion1 du Lemme 3.3 car $\sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{t}X_{k-l}^{2}\right)^{-r}X_{t-l}^{2}<+\infty$, $p.s.$ pour tout $r>1$. Enfin si $\sup_t E\left\{\eta_t^{\alpha}|\Im_{t-1}\right\}<+\infty$ pour $\alpha>2$, alors $\sup_t E\left\{\left|\eta_t^2-\sup_t E\left\{\eta_t^2|\Im_{t-1}\right\}\right|^r|\Im_{t-1}\right\}<+\infty$ $p.s$ pour $r\in]1,2]$. Par conséquent

$$\sum_{t=1}^{n}X_{t-l}^{2}\left(\eta_t^2-\sup_t E\left\{\eta_t^2|\Im_{t-1}\right\}\right)=o_p\left(\sum_{t=1}^{n}X_{t-l}^{2r}\right)=o_p\left(\sum_{t=1}^{n}X_{t-l}^{2}\right)$$

sur $\left\{w:\sup_t X_t^2<+\infty \text{ et } \sum_{t=1}^{n}X_{t-l}^{2}=+\infty\right\}$ (cf. [6] théorème 21, p. 802). D'autre part, la partie 2 de l'assertion2 du Lemme 3.3 résulte du fait que $\sum_{t=1}^{n}X_{t-l}^{2}E\left\{\eta_t^2|\Im_{t-1}\right\}=O_p\left(\sum_{t=1}^{n}X_{t-l}^{2}\right)$. □

Lemma 3.5 *Soit* $N=\inf\left\{n:\mathbf{S}_n(v)\text{ soit inversible}\right\}$ *et supposons que* $N<+\infty$ *p.s. Pour tout* $v\in\mathbb{S}$ *et* $n\geq N+1$, *soit la forme quadratique* $Q_n(v)=\underline{S}_n'(v)\mathbf{S}_n^{-1}(v)\underline{S}_n(v)$. *Alors*

1. $Q_n(v)=O_p(1)$ *sur* $\left\{w:\lim_{n\to\infty}\lambda_{\max}^{(v)}(n)<+\infty\right\}$
2. $Q_n(v)=o_p(\left(\log\lambda_{\max}^{(v)}(n)\right)^{1+\delta})$ *sur* $\left\{w:\lim_{n\to\infty}\lambda_{\max}^{(v)}(n)=\infty\right\}$ *pour tout* $\delta>0$.
3. *Sous la condition* $\mathbf{H}(\varepsilon)$ $Q_n(v)=O_p(\log\lambda_{\max}^{(v)}(n))$ *sur* $\left\{w:\lim_{n\to\infty}\lambda_{\max}^{(v)}(n)=+\infty\right\}$

Proof: En utilisant l'identité $P_n(v)\mathbf{S}_n^{-1}(v)\underline{Z}_n(v)=\mathbf{S}_{n+1}^{-1}(v)\underline{Z}_n(v)$ où $P_n(v):=\left(1+\underline{Z}_n'(v)\mathbf{S}_n^{-1}(v)\underline{Z}_n(v)\right)^{-1}$, nous obtiendrons la récurrence suivante. Pour tout $n\geq N+1$

$$\begin{aligned}Q_n(v)&=\underline{S}_{n-1}'(v)\mathbf{S}_n^{-1}(v)\underline{S}_{n-1}(v)+2\eta_n(v)\underline{Z}_n'(v)\mathbf{S}_n^{-1}(v)\underline{S}_{n-1}(v)+\eta_n^2(v)\underline{Z}_n'(v)\mathbf{S}_n^{-1}(v)\underline{Z}_n(v)\\&=Q_{n-1}(v)-P_{n-1}(v)\underline{S}_{n-1}'(v)\mathbf{S}_{n-1}^{-1}(v)\underline{Z}_n(v)\underline{Z}_n'(v)\mathbf{S}_{n-1}^{-1}(v)\underline{S}_{n-1}(v)\\&+2P_{n-1}(v)\underline{Z}_n'(v)\mathbf{S}_{n-1}^{-1}(v)\underline{S}_{n-1}(v)\eta_n(v)+\eta_n^2(v)\underline{Z}_n'(v)\mathbf{S}_n^{-1}(v)\underline{Z}_n(v).\end{aligned}$$

En sommant la récurrence précédente

$$\begin{aligned}&Q_n(v)-Q_N(v)+\sum_{j=N+1}^{n}P_{j-1}(v)\underline{S}_{j-1}'(v)\mathbf{S}_{j-1}^{-1}(v)\underline{Z}_j(v)\underline{Z}_j'(v)\mathbf{S}_{j-1}^{-1}(v)\underline{S}_{j-1}(v)\\&=2\sum_{j=N+1}^{n}P_{j-1}(v)\underline{Z}_j'(v)\mathbf{S}_{j-1}^{-1}(v)\underline{S}_{j-1}(v)\eta_j(v)+\sum_{j=N+1}^{n}\eta_j^2(v)\underline{Z}_j'(v)\mathbf{S}_j^{-1}(v)\underline{Z}_j(v).\end{aligned}$$

Posons $v_k(v)=P_{k-1}(v)\underline{Z}_k'(v)\mathbf{S}_{k-1}^{-1}(v)\underline{S}_{k-1}(v)$ if $k\geq N+1$ et 0 sinon. D'après le lemme 3.3, 2 on a

$$\sum_{j=N+1}^{n}P_{j-1}(v)\underline{Z}_j'(v)\mathbf{S}_{j-1}^{-1}(v)\underline{S}_{j-1}(v)\eta_j(v)=\sum_{j=N+1}^{n}v_j(v)\eta_j(v)=o_p\left(\sum_{j=N+1}^{n}v_j^2(v)\right)+O_p(1).$$

Sur $\left\{w \in \Omega : \lim_{N\to\infty} \lambda_{\max}^{(v)}(N) < \infty\right\}$ et d'après le lemme 3.3, 2 que on a $\sum_{j=N+1}^{n} \underline{Z}_j'(v)\mathbf{S}_j^{-1}(v)\underline{Z}_j(v) < +\infty$ $p.s$, et par conséquent $\sum_{j=N+1}^{\infty} \eta_j^2(v)\underline{Z}_j'(v)\mathbf{S}_j^{-1}(v)\underline{Z}_j(v) < +\infty$. D'où

$$Q_n(v) = O_p(1) \text{ et } \sum_{j=N+1}^{n} P_{j-1}(v)\underline{S}_{j-1}'(v)\mathbf{S}_{j-1}^{-1}(v)\underline{Z}_j(v)\underline{Z}_j'(v)\mathbf{S}_{j-1}^{-1}(v)\underline{S}_{j-1}(v) < +\infty.$$

D'où le résultat de l'assertion 1. Sur $\left\{w \in \Omega : \lim_{N\to\infty} \lambda_{\max}^{(v)}(N) = \infty\right\}$, alors d'après le 3.3, (2) et (3) on a

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \eta_j^2(v)\underline{Z}_j'(v)\mathbf{S}_j^{-1}(v)\underline{Z}_j(v) = O_p\left(\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \underline{Z}_j'(v)\mathbf{S}_j^{-1}(v)\underline{Z}_j(v)\right)^{1+\delta}\right) = O_p\left(\left(\log \lambda_{\max}^{(v)}(N)\right)^{1+\delta}\right) \tag{2.3}$$

et par conséquent $Q_n(v) = O_p\left(\left(\log \lambda_{\max}^{(v)}(n)\right)^{1+\delta}\right)$ $p.s$ et

$$\sum_{j=N+1}^{n} P_{j-1}(v)\underline{S}_{j-1}'(v)\mathbf{S}_{j-1}^{-1}(v)\underline{Z}_j(v)\underline{Z}_j'(v)\mathbf{S}_{j-1}^{-1}(v)\underline{S}_{j-1}(v) = O_p\left(\left(\log \lambda_{\max}^{(v)}(n)\right)^{1+\delta}\right)$$

ceci montre l'assertion 2. Enfin sous $\mathbf{H}(\alpha)$ alors comme $\underline{Z}_t'(v)\mathbf{S}_t^{-1}(v)\underline{Z}_t(v) < 1$, $p.s$ en utilisant le lemme 3.3 et (2.3) avec $\delta = 0$ pour obtenir $Q_n(v) = O_p\left(\log \lambda_{\max}^{(v)}(n)\right)$ sur l'ensemble $\left\{w\in\Omega : \lim_{n\to\infty} \lambda_{\max}^{(v)}(n) = \infty\right\}$. □

Outre la supposition $\mathbf{H}(\alpha)$ nous considérons la supposition suivante

Proof: du théorème **2.2** Comme $\lambda_{\min}^{(v)}(n) \to \infty$ $p.s$ pour tout $v \in \mathbb{S}$, alors $\mathbf{S}_n(v)$ est inversible $p.s$ pour n suffisamment grand. En utilisant la norme matricielle $\|M\|^2 = \lambda_{\max}(M'M)$ nous obtiendrons

$$\left\|\underline{\widehat{\theta}}_n(v) - \underline{\theta}(v)\right\|^2 = \left\|\mathbf{S}_n^{-1}(v)\,\underline{S}_n(v)\right\|^2 \leq \left\|\mathbf{S}_n^{-1/2}(v)\right\|^2 \left\|\mathbf{S}_n^{-1/2}(v)\,\underline{S}_n(v)\right\|^2 = \left(\lambda_{\min}^{(v)}(n)\right)^{-1} Q_n(v)$$

et le résultat découle du lemme 3.3, (3) et la supposition **H1**. □

4. Conclusion

Nous avons étudié le comportement asymptotique de l'estimateur des moindres carrés pour une classe de modèles $ARCH(p)$ à coefficients périodiques et sous des conditions relativement faibles. Cette étude peut être appliquée à plusieurs versions de type $ARCH(p)$ périodique.

Remerciements

L'auteur souhaite exprimer sa gratitude reconnaissance au rédacteur en chef de la revue et au référée pour ses commentaires et suggestions qui ont considérablement contribué à améliorer la présentation de cet article.

References

1. A. Aknouche, A. Bibi, *Quasi maximum likelihood estimation of periodic GARCH processes.* J. Time Ser. Anal, 29(1), 19-45, (2009).
2. A. Aknouche, *Causality conditions and autocovariance calculations in PVAR models.* Journal of Statistical Computation and Simulation, 77, 769-780, (2007).
3. I. V. Basawa, R. Lund, *Large sample properties of parameters estimates for periodic ARMA models.* Journal of Time Series Analysis, 22, 1-13, (2001).

4. A. Bibi, A. Aknouche, *On periodic GARCH processes: Stationarity, Existence of moments and geometric ergodicity.* Math. methods of Statistics, 17(4), 305-316, (2008).

5. T. Bollerslev, E. Ghysels, *Periodic autoregressive conditional heteroscedasticity.* J. of Business & Economic Statistics, 14, 139-151, (1996).

6. P.E. Caines, *Stochastic linear systems.* Wiley & Sons, (1988).

7. G. Ciolek, P. Potorski, *Bootstrapping periodically autoregressive models* . ESAIM. Probability and Statistics, 21, 2157-2178, (2017).

8. R. F. Engle, T. Bollerslev, *Modelling the persistence of conditional variances.* Econometric Review, 5, 1-50, (1986).

9. D. Freedman, *Another note on the Borel-Cantilli lemma and the strong law with the Poisson approximation as a by-product.* Ann. Prob. 1, 910-925, (1973).

10. E.G. Gladyshev, *Periodically correlated random sequences.* Soviet Mathematics, 2, 385-388, (1961).

11. L. Glosten, R. Jegannathan, D. Runke, *Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks.* Journal of Finance, 48, 1779-1801, (1993).

12. C. Gourieroux, A. Monfort, *Qualitative threshold ARCH models.* Journal of Econometrics, 52, 159-200, (1992).

13. D. Guegan, J. Diebolt, *Probabilistic properties of the $\beta - ARCH$ model.* Statistica Sinica, 4, 71-87, (1994).

14. T.L. Lai, C.Z. Wei, *Least squares estimates in stochastic regression models with applications to identification and control of dynamic systems.* Ann. Statist, 10(1), 154-166, (1982).

15. G.W. Schwert, *Stock volatility and the crash of 87.* Review of Financial Studies, 3, 77-102, (1990).

16. G. A. F. Seber, *A matrix handbook for statisticians. Wiley & Sons*, (2008).

17. T.A. Ula, A.A. Smadi, *Periodic stationary conditions for periodic autoregressive moving average processes as eigenvalues problems.* Water Resources Research, 33, 1929-1934, (1997).

18. S.O.A. Voffal, *L'estimateur des moindres carrés dans les modèles ARCH.* C.R. Acad. Sci. Paris. t. 322, série I, 971-974, (1996).

Abdelouahab Bibi,

Département de Mathématiques,

Université Mentouri, Constantine (1)*,*

Algeria.

E-mail address: `a.bibi@umc.edu.dz`