



Controle Ótimo em Equações de Ondas via Equilíbrios de Nash e Pareto *

Pitágoras P. de Carvalho  e Gilcenio R. de Sousa Neto 

ABSTRACT: The objective of this work is to conduct a theoretical and numerical study on bi-objective optimal control for linear and semilinear wave equations, using Nash and Pareto equilibrium strategies in three-dimensional domains. Due to its connection with an optimization process, we will employ cost functional minimization, which is formulated in combination with strategies related to Nash and Pareto Equilibria. We will use the *FreeFem++* software to translate the theoretical problems into C++ programming code, describing the spatial discretization through the Finite Element Method (FEM) and the temporal evolution discretization using the Finite Difference Method.

Key Words: Wave equations, Optimal control, Nash equilibrium, Pareto equilibrium, *FreeFem++*

Contents

1	Introdução	1
2	Formulação dos Problemas	2
3	Equação da Onda - Caso Linear	3
3.1	Propriedades	3
3.2	Os sistemas de otimalidade de Nash e Pareto	6
3.2.1	Sistema de otimalidade de Nash	6
3.2.2	Sistema de otimalidade de Pareto	6
3.3	Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash e Pareto	7
4	Equação da Onda - Caso Semilinear	9
4.1	O Sistema de otimalidade e a Existência do Equilíbrio de Nash	10
4.2	O Sistema de otimalidade e a Existência do Equilíbrio de Pareto	11
5	Aspectos Numéricos	12
5.1	Algoritmos iterativos	12
6	Simulações Numéricas	17
6.1	Experimentos do caso Nash Linear	19
6.2	Experimentos do caso Pareto Linear	19
6.3	Experimentos do caso Nash Não-Linear	21
6.4	Experimentos do caso Pareto Não-Linear	21
6.5	E o problema sem controles?	23
7	Conclusões	24

1. Introdução

Este estudo apresenta uma análise do controle ótimo para equações de ondas lineares e semilineares, utilizando estratégias de teoria de jogos cooperativos e não cooperativos. A teoria de controle é um campo com diversas aplicações em áreas como física, engenharias, biologia, medicina e economia e tem como objetivo manipular variáveis de um sistema para alcançar comportamentos desejados. Dentro

* The first author is partially supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq, grant No. 306541/2022-0 (Brazil).

Submitted May 21, 2023. Published February 21, 2025
 2020 *Mathematics Subject Classification*: 34K35, 35Q93, 49J20, 90C29

dessa teoria, existem diferentes tipos de controle. Além do controle ótimo, podemos citar o controle exato, controle aproximado e controle nulo. O controle ótimo busca minimizar custos ou maximizar benefícios. Quando há mais de um objetivo a ser atingido, é natural inserir mais de um controle, cada um responsável por cumprir uma tarefa de minimização. Nesse tipo de situação, acaba sendo necessária a adoção de uma estratégia que equilibre a eficiência dos diversos controles envolvidos. Existem vários conceitos de equilíbrio para problemas desse tipo.

Neste trabalho, utilizaremos a estratégia de otimização não cooperativa proposta por Nash [31], e a estratégia cooperativa de Pareto [34]. Estas duas estratégias vêm recebendo, recentemente, na teoria de controle, muita atenção devido aos trabalhos de Lions em [27,28,29]. Esses trabalhos viabilizaram a aplicação de estratégias multi-objetivas a problemas de controlabilidade de sistemas baseados em Equações Diferenciais. Em seguida, diversos autores contribuíram para o desenvolvimento da teoria.

Nos últimos 10 anos, diversos estudos relevantes foram realizados utilizando as estratégias de Nash e Pareto. Em 2015, Araruna et al. [4] combinaram o conceito hierárquico de Stackelberg [36] com a estratégia de Equilíbrio de Nash para resolver um problema de controle nulo multi-objetivo para equação do calor. Tais resultados foram estendidos nos anos seguintes, em [2], para domínios de atuação mais gerais, em [3], para equação da onda, e em [19], para domínios ilimitados. Em 2016 [17] e 2018 [18], de Jesus et al. estudaram um problema de controlabilidade aproximada multi-objetivo em um domínio com fronteira móvel, segundo a estratégia de Nash.

A partir de 2018, uma série de análises numérico-computacionais foi desenvolvida sobre problemas de controle mono-objetivos e multi-objetivos envolvendo as estratégias de Nash e Pareto. Carvalho et al. estenderam em 2018 [13] e 2020 [14], com análise numérica incluída, os resultados de controle ótimo para um sistema distribuído da equação do calor e da onda, linear e semilineares, por meio de controle bi-objetivo, via Equilíbrio de Nash e Pareto. Em 2021, foram apresentadas em [10] análises numéricas e simulações para o controle ótimo da equação do calor em domínios tridimensionais, comparando a eficiência de métodos numéricos e qualificando os desempenhos computacionais. Em 2022, foram apresentados em [11] resultados de controle hierárquico para problemas de controle ótimo, agora, com fronteira móvel, ampliando o alcance teórico e numérico dessa abordagem. Diversos outros avanços recentes sobre a construção de métodos numéricos aplicados à controlabilidade são encontrados em [12,15,16,26,30,32]. No que segue, apresentaremos efetivamente os resultados do nosso trabalho.

2. Formulação dos Problemas

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um aberto conexo com fronteira $\partial\Omega$ regular, $T > 0$ e $Q = \Omega \times (0, T)$ o cilindro com fronteira lateral $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Neste artigo, realizaremos uma análise de sistemas de equações da onda, dividindo-os em dois casos, conforme descritos a seguir.

Caso Linear:

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = f + v_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + v_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Caso Semilinear:

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + F(y) = f + v_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + v_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Nos sistemas acima, $y(x, t)$ representa o estado y na posição espacial x e no instante de tempo t . Os conjuntos $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2 \subset \Omega$ são os subdomínios de atuação dos controles v_1 e v_2 , respectivamente, satisfazendo a condição $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Usaremos $\mathcal{O}_{i,d}$ para denotar os domínios de observação dos controles, sendo $i = 1, 2$. Denotamos por $\mathbb{1}_{\mathcal{O}_i}$ a função característica associada ao subdomínio $\mathcal{O}_i$. No caso semilinear, assumiremos que $F(y)$ é uma função lipschitziana.

Consideramos os espaços para os controles v_1 e v_2 , respectivamente por

$$V_1 := L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T)), \quad V_2 := L^2(\mathcal{O}_2 \times (0, T)), \quad V := V_1 \times V_2,$$

com produto interno $\langle (v_1, v_2), (u_1, u_2) \rangle_V = \langle v_1, u_1 \rangle_{V_1} + \langle v_2, u_2 \rangle_{V_2}$, e os funcionais

$$\mathcal{J}_i : L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T)) \times L^2(\mathcal{O}_2 \times (0, T)) \rightarrow \mathbb{R},$$

definidos por

$$\mathcal{J}_i(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)} |y - y_{i,d}|^2 dx dt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} |v_i|^2 dx dt, \quad (2.3)$$

onde μ_i é uma constante positiva e $y_{i,d} = y_{i,d}(x, t) \in L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))$ é uma função dada, para $i = 1, 2$.

Os problemas de controle abordados neste trabalho seguem duas linhas de estratégias de equilíbrio:

- (1) **Equilíbrio de Nash.** Um par $(v_1, v_2) \in V$ é um Equilíbrio de Nash para os funcionais $\mathcal{J}_i$ se satisfaz

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1(v_1, v_2) \leq \mathcal{J}_1(\hat{v}_1, v_2) & \forall \hat{v}_1 \in V_1, \\ \mathcal{J}_2(v_1, v_2) \leq \mathcal{J}_2(v_1, \hat{v}_2) & \forall \hat{v}_2 \in V_2. \end{cases}$$

- (2) **Equilíbrio de Pareto.** Um par $(v_1, v_2) \in V$ é um Equilíbrio de Pareto para os funcionais $\mathcal{J}_i$ se

$$\nexists (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in V \setminus \{(v_1, v_2)\} \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} \mathcal{J}_1(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \leq \mathcal{J}_1(v_1, v_2) \text{ e } \mathcal{J}_2(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \leq \mathcal{J}_2(v_1, v_2), \\ \text{com desigualdade estrita para pelo menos um } \mathcal{J}_i. \end{cases}$$

Conforme exposto, este trabalho tem como objetivo o estudo teórico e a análise numérica dos problemas associados às equações (2.1) e (2.2), respectivamente. A estrutura do texto é a seguinte: na Seção 3, analisamos o sistema linear (2.1), demonstrando a existência dos equilíbrios de Nash e Pareto e derivando o sistema de otimalidade correspondente a cada problema de minimização. Em seguida, na Seção 4, repetiremos para o sistema semilinear (2.2) resultados semelhantes aos obtidos no caso linear, isto é, existência e sistema de otimalidade. Na Seção 5, destacamos os algoritmos iterativos que constituem a base para as simulações numéricas dos problemas estudados. Por fim, apresentamos simulações na Seção 6, indicando o ponto culminante deste trabalho, que evidencia a conexão entre os resultados teóricos e os métodos numéricos discutidos.

3. Equação da Onda - Caso Linear

Como iniciaremos analisando os problemas de controle ótimo baseados no sistema (2.1), que trata de problemas de minimização, será necessário lidar com pontos críticos e, conseqüentemente, da derivação dos funcionais associados. No resultado a seguir, reunimos propriedades de regularidade e derivação satisfeitas pelos funcionais $\mathcal{J}_i$ ($i = 1, 2$).

3.1. Propriedades

Proposição 3.1 *Os funcionais*

$$v_1 \mapsto \mathcal{J}_1(v_1, v_2) \quad \text{e} \quad v_2 \mapsto \mathcal{J}_2(v_1, v_2),$$

associados ao sistema (2.1), são de classe C^1 . Em particular, $\mathcal{J}_i$ é de classe C^1 .

Demonstração: Considere os operadores $L_i : V_i \rightarrow L^2(Q)$ ($i = 1, 2$), onde $L(\hat{v}^i) = z^i$ é a solução de

$$\begin{cases} z_{tt}^i - \Delta z^i = \hat{v}_i \mathbb{1}_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q, \\ z^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z^i(x, 0) = 0, \quad z_t^i(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Pela unicidade de solução e linearidade do sistema (3.1), os operadores L_i estão bem definidos e são lineares, e portanto, são contínuos. Além disso, uma vez que $f \in L^2(Q)$, sabemos que existe uma única solução $u \in L^2(Q)$ para

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x, 0) = u^0, \quad u_t(x, 0) = u^1 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Dessa forma, podemos escrever $y = L_1 v_1 + L_2 v_2 + u$ e, por conseguinte, temos uma reformulação dos funcionais (2.3) dada por

$$\mathcal{J}_i(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |L_1 v_1 + L_2 v_2 + u - y_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v_i|^2 dxdt, \quad i = 1, 2.$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{J}_1(v_1 + s\hat{v}_1, v_2) - \mathcal{J}_1(v_1, v_2)}{s} &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} (s|L_1 \hat{v}_1|^2 + 2L_1 \hat{v}_1 (L_1 v_1 + L_2 v_2 + u - y_{1,d})) dxdt \\ &\quad + \frac{\mu_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} (s|\hat{v}_1|^2 + 2v_1 \hat{v}_1) dxdt, \end{aligned}$$

e tomando o limite na expressão acima quando $s \rightarrow 0$, obtemos a derivada de Gateaux da função $v_1 \mapsto \mathcal{J}_1(v_1, v_2)$ no ponto v_1 na direção $\hat{v}_1$, descrita como

$$\mathcal{J}'_1(v_1, v_2) \cdot (\hat{v}_1, 0) = \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} L_1 \hat{v}_1 (y - y_{1,d}) dxdt + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} v_1 \hat{v}_1 dxdt. \quad (3.2)$$

Mostremos agora que $v_1 \mapsto \mathcal{J}_1(v_1, v_2)$ é uma aplicação de classe C^1 (possui derivada de Gateaux contínua).

Para isso, observemos que dada uma sequência $\hat{v}_1^n \rightarrow \hat{v}_1$ em V_1 , resulta que

$$H_n := \mathcal{J}'_1(v_1, v_2) \cdot (\hat{v}_1^n, 0) - \mathcal{J}'_1(v_1, v_2) \cdot (\hat{v}_1, 0) \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

De fato, como

$$\begin{aligned} |H_n| &\leq \iint_{\Omega \times (0,T)} |L_1(\hat{v}_1^n - \hat{v}_1)| |L_1 v_1| dxdt + \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} |v_1| |\hat{v}_1^n - \hat{v}_1| dxdt \\ &\leq \left(\|L_1\|_{\mathcal{L}(V_1; L^2(Q))}^2 + 1 \right) \|v_1\|_{V_1} \|\hat{v}_1^n - \hat{v}_1\|_{V_1}, \end{aligned}$$

temos (3.3) ocorre quando $v_1^n \rightarrow v_1$ em V_1 .

Procedendo de forma análoga para $i = 2$, calculamos

$$\mathcal{J}'_2(v_1, v_2) \cdot (0, \hat{v}_2) = \iint_{\mathcal{O}_{2,d} \times (0,T)} L_2 \hat{v}_2 (y - y_{2,d}) dxdt + \mu_2 \iint_{\mathcal{O}_2 \times (0,T)} v_2 \hat{v}_2 dxdt, \quad (3.4)$$

e obtemos que a aplicação $v_2 \mapsto \mathcal{J}_2(v_1, v_2)$ é de classe C^1 . Além disso, podemos calcular também

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'_i(v_1, v_2) \cdot (\hat{v}_1, \hat{v}_2) &= \mathcal{J}'_i(v_1, v_2)(\hat{v}_1, 0) + \mathcal{J}'_i(v_1, v_2)(0, \hat{v}_2) \\ &= \sum_{i,k=1}^2 \left(\iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} L_k \hat{v}_k (y - y_{i,d}) dxdt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} \delta_{i,k} v_k \hat{v}_i dxdt \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

deduzindo que a aplicação $(v_1, v_2) \mapsto \mathcal{J}_i(v_1, v_2)$ tem derivada de Gateaux contínua, isto é, que os funcionais $\mathcal{J}_i$ também são de classe C^1 , para $(i = 1, 2)$. $\square$

A seguir, apresentamos resultados que estabelecem equivalências entre diferentes conceitos de equilíbrio. Essas equivalências serão fundamentais para a construção do sistema de otimalidade, o qual servirá como base para o desenvolvimento dos algoritmos iterativos.

Proposição 3.2 (Equilíbrio de Nash) *As afirmações abaixo são equivalentes:*

- (i) O par (v_1, v_2) é um Equilíbrio de Nash para $\mathcal{J}_i$;
- (ii) As derivadas parciais dos funcionais $\mathcal{J}_i$ no ponto (v_1, v_2) se anulam, i.e.

$$\mathcal{J}'_1(v_1, v_2) \cdot (\hat{v}_1, 0) = 0, \forall \hat{v}_1 \in V_1, \quad \mathcal{J}'_2(v_1, v_2) \cdot (0, \hat{v}_2) = 0, \forall \hat{v}_2 \in V_2; \quad (3.6)$$

(iii) Vale a expressão

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} L_i \hat{v}_i(y - y_{i,d}) dxdt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} v_i \hat{v}_i dxdt = 0, \quad \forall v_i \in V_i.$$

Demonstração: Assumindo que o item (i) vale, isto é, que o par (v_1, v_2) seja um Equilíbrio de Nash para os funcionais $\mathcal{J}_i$, temos que

$$\mathcal{J}_1(v_1, v_2) \leq \mathcal{J}_1(\hat{v}_1, v_2) \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_2(v_1, v_2) \leq \mathcal{J}_2(v_1, \hat{v}_2). \quad (3.7)$$

Isso implica que v_1 é um mínimo (e ponto crítico) de $\hat{v}_1 \mapsto \mathcal{J}_1(v_1, v_2)$ e que v_2 é um mínimo (e ponto crítico) de $\hat{v}_2 \mapsto \mathcal{J}_2(v_1, v_2)$. Daí segue o item (ii).

Assumindo agora que o item (ii) vale, temos que v_i é um ponto crítico de $\hat{v}_i \mapsto \mathcal{J}_i(v_1, v_2)$, para $i = 1, 2$. Uma vez que os funcionais $\hat{v}_i \mapsto \mathcal{J}_i(v_1, v_2)$ são estritamente convexos e limitados inferiormente, pois os funcionais $\mathcal{J}_i$ também são, segue que v_i é o único ponto de mínimo de $\hat{v}_i \mapsto \mathcal{J}_i(v_1, v_2)$, isto é, que ocorre (3.7). Daí, temos que o par (v_1, v_2) é um Equilíbrio de Nash, provando o item (i). Finalmente, podemos observar que os itens (ii) e (iii) são equivalentes graças às expressões (3.2) e (3.4). $\square$

Proposição 3.3 (Equilíbrio de Pareto) *As afirmações abaixo são verdadeiras:*

(i) Se (v_1, v_2) é um Equilíbrio de Pareto para $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$, então existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$\lambda \mathcal{J}'_1(v_1, v_2) + (1 - \lambda) \mathcal{J}'_2(v_1, v_2) = 0. \quad (3.8)$$

(ii) A identidade (3.8) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega \times (0,T)} [\lambda(y - y_{1,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda)(y - y_{2,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}] (L_1 \hat{v}_1 + L_2 \hat{v}_2) dxdt \\ & + \iint_{\Omega \times (0,T)} (\lambda \mu_1 v_1 \hat{v}_1 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + (1 - \lambda) \mu_2 v_2 \hat{v}_2 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_2}) dxdt = 0, \quad \forall (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in V. \end{aligned} \quad (3.9)$$

(iii) Dado $\lambda \in (0, 1)$, a identidade (3.8) é verdadeira se, e somente se,

$$\mathcal{J}_\lambda := \lambda \mathcal{J}_1 + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2$$

possui um mínimo em (v_1, v_2) .

(iv) Se (3.8) é válida, para algum $\lambda \in (0, 1)$, então (v_1, v_2) é um Equilíbrio de Pareto.

Demonstração: Para provar (i), suponhamos que (v_1, v_2) é um Equilíbrio de Pareto. Logo, o par $(v_1, v_2) \in V$ é solução para o problema extremal restrito

$$\begin{cases} \text{minimizar } \mathcal{J}_1(\hat{v}_1, \hat{v}_2), \\ \text{sujeito a } \mathcal{J}_2(\hat{v}_1, \hat{v}_2) < \mathcal{J}_2(v_1, v_2), \end{cases}$$

e, consequentemente, podemos utilizar o critério de Kuhn-Tucker, para obter a existência de uma constante $\bar{\lambda} \geq 0$ tal que

$$\mathcal{J}_1(v_1, v_2) + \bar{\lambda} \mathcal{J}_2(v_1, v_2) = 0.$$

Dessa forma, a expressão (3.8) vale para $\lambda = 1/(1 + \bar{\lambda})$.

Para chegar a (3.9), basta substituir (3.5) em (3.8). Isto prova o item (ii). Já o item (iii), é uma consequência imediata do item (i), pois $\lambda \mathcal{J}_1 + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2$ é convexa. Em seguida, a fim de provar o item (iv), suponhamos que $v = (v_1, v_2)$ satisfaz (3.8) para $\lambda \in (0, 1)$. Pelo item (ii), temos que

$$\lambda \mathcal{J}_1(v) + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2(v) \leq \lambda \mathcal{J}_1(\hat{v}) + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2(\hat{v}), \quad \forall \hat{v} \in V, \quad (3.10)$$

o que, por sua vez, implica que (v_1, v_2) é um Equilíbrio de Pareto. De fato, se (v_1, v_2) não fosse um Equilíbrio de Pareto, teríamos que existe $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in V$ tal que, digamos, $\mathcal{J}_1(\bar{v}_1, \bar{v}_2) < \mathcal{J}_1(v_1, v_2)$ e $\mathcal{J}_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \leq \mathcal{J}_2(v_1, v_2)$. Como λ e $1 - \lambda$ são positivos, concluiríamos que

$$\lambda \mathcal{J}_1(\bar{v}) + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2(\bar{v}) < \lambda \mathcal{J}_1(v) + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2(v),$$

o que entraria em contradição com (3.10). $\square$

3.2. Os sistemas de otimalidade de Nash e Pareto

Deduzimos agora os sistemas de otimalidade para os casos Nash e Pareto lineares.

3.2.1. Sistema de otimalidade de Nash.

No item (iii) da Proposição 3.2 vimos que (v_1, v_2) é um Equilíbrio de Nash, se e somente se, vale a expressão

$$\iint_Q z_i(y - y_{i,d})\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} dxdt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} v_i \hat{v}_i dxdt = 0, \quad \forall \hat{v}_i \in V_i, \quad (3.11)$$

onde z_i é solução de

$$\begin{cases} z_{tt}^i - \Delta z^i = \hat{v}_i \mathbb{1}_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q, \\ z^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z^i(x, 0) = 0, \quad z_t^i(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira linha do sistema acima por uma função ϕ^i suficientemente regular, e integrando por partes, temos que

$$\iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} \hat{v}_i \phi^i = \int_{\Omega} (z_t(T) \phi^i(T) - z(T) \phi_t^i(T)) dx + \iint_Q z^i (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i) dxdt - \int_{\Sigma} \frac{\partial z^i}{\partial \eta} \phi^i d\Gamma. \quad (3.12)$$

A fim de viabilizar a comparação das igualdades (3.11) e (3.12), iremos impor que ϕ^i satisfaça as condições abaixo

$$\begin{cases} \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i = (y - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi^i(x, T) = 0, \quad \phi_t^i(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.13)$$

Dessa forma, (3.12) se torna

$$\iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} \hat{v}_i \phi^i dxdt = \iint_Q z^i (y - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} dxdt. \quad (3.14)$$

Notemos que a expressão em (3.14) é válida independentemente de (v_1, v_2) ser um Equilíbrio de Nash ou não. Porém, comparando (3.11) e (3.14), concluímos que, (v_1, v_2) é um Equilíbrio de Nash, se, e somente se,

$$v_i = -\frac{1}{\mu_i} \phi^i \mathbb{1}_{\mathcal{O}_i}, \quad i = 1, 2.$$

Assim, quando (v_1, v_2) for um Equilíbrio de Nash, poderemos reformular o o sistema (2.1) como segue:

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = f - \frac{1}{\mu_1} \phi^1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} - \frac{1}{\mu_2} \phi^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i = (y - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ y = 0, \quad \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi^i(x, T) = 0, \quad \phi_t^i(x, T) = 0, \quad y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.15)$$

3.2.2. Sistema de otimalidade de Pareto.

Seja (v_1, v_2) um Equilíbrio de Pareto. De acordo com os itens (i) e (ii) da Proposição 3.3, temos, para quaisquer $(\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in V$, que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \times (0,T)} [\lambda(y - y_{1,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda)(y - y_{2,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}] (L_1 \hat{v}_1 + L_2 \hat{v}_2) dxdt \\ + \iint_{\Omega \times (0,T)} (\lambda \mu_1 v_1 \hat{v}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + (1 - \lambda) \mu_2 v_2 \hat{v}_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}) dxdt = 0. \end{aligned}$$

Sendo ϕ^i solução do sistema 3.13, segue que

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega \times (0,T)} [\lambda(\phi_{tt}^1 - \Delta \phi^1) + (1-\lambda)(\phi_{tt}^2 - \Delta \phi^2)] (L_1 \hat{v}_1 + L_2 \hat{v}_2) dxdt \\ & + \iint_{\Omega \times (0,T)} (\lambda \mu_1 v_1 \hat{v}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + (1-\lambda) \mu_2 v_2 \hat{v}_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}) dxdt = 0. \end{aligned}$$

Usando integração por partes, chegamos em

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega \times (0,T)} [\lambda \phi^1 + (1-\lambda) \phi^2] (\hat{v}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + \hat{v}_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}) dxdt \\ & + \iint_{\Omega \times (0,T)} (\lambda \mu_1 v_1 \hat{v}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + (1-\lambda) \mu_2 v_2 \hat{v}_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}) dxdt = 0. \end{aligned}$$

Como $(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ é arbitrário, obtemos, como consequência do Lema de Du Bois-Raymond, que

$$v_1 = -\frac{1}{\mu_1} \left(\phi^1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \phi^2 \right) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} \quad \text{e} \quad v_2 = -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \phi^1 + \phi^2 \right) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}. \quad (3.16)$$

Assim, quando (v_1, v_2) for um Equilíbrio de Pareto, poderemos reformular o sistema (2.1) como segue:

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = f - \frac{1}{\mu_1} \left(\phi^1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \phi^2 \right) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} - \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \phi^1 + \phi^2 \right) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q \\ \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i = (y - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q \\ y = 0, \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \phi^i(x, T) = 0, \phi_t^i(x, T) = 0, y(x, 0) = y_0(x), y_t(x, 0) = y_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.17)$$

Os sistemas (3.15) e (3.17) são conhecidos na literatura como *Sistema de otimalidade de Nash* e *Sistema de otimalidade de Pareto*, respectivamente.

3.3. Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash e Pareto

Agora, iremos provar a existência e unicidade para os Equilíbrios de Nash e Pareto utilizando o teorema de Lax-Milgram.

Teorema 3.1 (*Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash*)

Suponhamos que

$$\|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} L_1\|_{(2)} < 4\mu_1 \quad \text{e} \quad \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} L_2\|_{(1)} < 4\mu_2, \quad (3.18)$$

onde $\|\cdot\|_{(i)}$ denota a norma no espaço $\mathcal{L}(\mathbf{V}_{3-i}; L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)))$. Então, para cada $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ existe um Equilíbrio de Nash $(v_1, v_2) \in \mathbf{V}$.

Demonstração: Pela Proposição 3.2, o par (v_1, v_2) ser um Equilíbrio de Nash equivale a satisfazer as equações integrais

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} L_i \hat{v}_i (y - y_{i,d}) dxdt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} v_i \hat{v}_i dxdt = 0, \quad \forall v_i \in \mathbf{V}_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.19)$$

Lembrando que $y = L_1 v_1 + L_2 v_2 + u$, podemos reescrever (3.19) como

$$\iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} [L_i^* (L_1 v_1 + L_2 v_2 + u - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} + \mu_i v_i] \hat{v}_i dxdt = 0, \quad \forall v_i \in \mathbf{V}_i, \quad i = 1, 2,$$

onde L_i^* é o operador adjunto a L_i . Dessa forma, utilizando a linearidade de L_i^* , temos que (v_1, v_2) é um Equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$L_i^* (L_1 v_1 + L_2 v_2) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} + \mu_i v_i = L_i^* (y_{i,d} - u) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}, \quad \text{em } \mathbf{V}_i \quad (i = 1, 2).$$

Logo, denotando

$$\mathbb{M}(v_1, v_2) := \langle L_1^*(L_1 v_1 + L_2 v_2) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + \mu_1 v_1, L_2^*(L_1 v_1 + L_2 v_2) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} + \mu_2 v_2 \rangle,$$

$$K := \langle L_1^*(y_{1,d} - u) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}, L_2^*(y_{2,d} - u) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} \rangle,$$

para garantir a existência e unicidade do Equilíbrio de Nash basta mostrar que a equação

$$\mathbb{M}(v_1, v_2) = K, \quad (v_1, v_2) \in V, \quad (3.20)$$

possui uma única solução. Para fazer isso, consideremos a forma bilinear contínua

$$\mathcal{B}((v_1, v_2), (\hat{v}_1, \hat{v}_2)) = \langle \mathbb{M}(v_1, v_2), (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \rangle_V.$$

Uma vez que mostrarmos que esta forma é coerciva, o teorema de Lax-Milgram garantirá a existência de solução para (3.20). Para justificar a coercividade de $\mathcal{B}$, calculemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}((v_1, v_2), (v_1, v_2)) &= \sum_{i=1}^2 \langle L_i^*((L_1 v_1 + L_2 v_2) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}) + \mu_i v_i, v_i \rangle_{V_i} \\ &= \sum_{i=1}^2 \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} (L_1 v_1 + L_2 v_2) L_i v_i dxdt + \sum_{i=1}^2 \mu_i \|v_i\|_{V_i}^2 dxdt \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\mu_i \|v_i\|_{V_i}^2 + \|L_i(v_i)\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}^2 + \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} L_1 v_1 L_2 v_2 dxdt \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

e, via desigualde de Young, observemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} L_1 v_1 L_2 v_2 dxdt &\geq -\frac{1}{4} \left(\|L_1(v_1)\|_{L^2(\mathcal{O}_{2,d} \times (0,T))}^2 + \|L_2(v_2)\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T))}^2 \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \|L_i(v_i)\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituindo (3.22) em (3.21), obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}((v_1, v_2), (v_1, v_2)) &\geq \sum_{i=1}^2 \mu_i \|v_i\|_{V_i}^2 - \frac{1}{4} \left(\|L_1(v_1)\|_{L^2(\mathcal{O}_{2,d} \times (0,T))}^2 + \|L_2(v_2)\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T))}^2 \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{V_i}^2 \left(\mu_i - \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{3-i,d}} L_i\|_{(3-i)}^2 \right), \end{aligned}$$

o que conclui a coercividade de $\mathcal{B}$, uma vez que, por hipótese, vale (3.18). $\square$

Teorema 3.2 (*Existência do Equilíbrio de Pareto*)

Suponha que

$$\begin{aligned} 2 \left(\|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} L_1\|_{(1,1)}^2 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} L_1\|_{(1,2)}^2 \right) &< \mu_1, \\ 2 \left(\|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} L_2\|_{(2,1)}^2 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} L_2\|_{(2,2)}^2 \right) &< \mu_2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $\|\cdot\|_{(i,j)}$ denota a norma no espaço $\mathcal{L}(V_i; L^2(\mathcal{O}_{j,d} \times (0,T)))$ para cada $i = 1, 2$. Então, para cada $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$ existe um Equilíbrio de Pareto $(v_1, v_2) \in V$.

Demonstração: De acordo com as informações contidas na Proposição 3.3, para garantir a existência de um Equilíbrio de Pareto, basta mostrar que, para algum $\lambda \in (0, 1)$, existe um par $(v_1, v_2) \in V$ satisfazendo

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega \times (0, T)} [\lambda(y - y_{1,d})\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda)(y - y_{2,d})\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}] (L_1 \hat{v}_1 + L_2 \hat{v}_2) dxdt \\ & + \iint_{\Omega \times (0, T)} (\lambda\mu_1 v_1 \hat{v}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + (1 - \lambda)\mu_2 v_2 \hat{v}_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}) dxdt = 0, \quad \forall (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in V. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Fixemos $\lambda \in (0, 1)$. Procedendo de forma similar à feita no cálculo do Equilíbrio de Nash, temos que (3.24) ocorre se o problema

$$\mathbb{M}_\lambda(v_1, v_2) = K_\lambda, \quad (v_1, v_2) \in V, \quad (3.25)$$

possui solução, onde

$$\begin{cases} \mathbb{M}_\lambda(v_1, v_2) &= (\alpha_{1,\lambda} + \lambda\mu_1 v_1, \alpha_{2,\lambda} + (1 - \lambda)\mu_2 v_2), \\ \alpha_{i,\lambda} &= L_i^* [(L_1 v_1 + L_2 v_2)(\lambda \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}})], \\ K_\lambda &= (L_1^*(\beta_\lambda), L_2^*(\beta_\lambda)), \\ \beta_\lambda &= \lambda(y_{1,d} - u)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda)(y_{2,d} - u)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}. \end{cases}$$

Para provar (3.25), tomaremos, assim como na seção anterior, a forma bilinear contínua

$$\mathcal{B}_\lambda((v_1, v_2), (\hat{v}_1, \hat{v}_2)) = \langle \mathbb{M}_\lambda(v_1, v_2), (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \rangle_V,$$

e mostraremos que ela é coerciva. O teorema de Lax-Milgram fornecerá a solução única para (3.25). Para mostrar a coercividade, observe que

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_\lambda((v_1, v_2), (v_1, v_2)) \\ &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \{L_1^* [(L_1 v_1 + L_2 v_2)(\lambda \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}})] + \lambda\mu_1 v_1\} v_1 dxdt \\ &+ \iint_{\mathcal{O}_2 \times (0, T)} \{L_2^* [(L_1 v_1 + L_2 v_2)(\lambda \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda)\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}})] + (1 - \lambda)\mu_2 v_2\} v_2 dxdt \\ &= \lambda \|L_1 v_1 + L_2 v_2\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))}^2 + (1 - \lambda) \|L_1 v_1 + L_2 v_2\|_{L^2(\mathcal{O}_{2,d} \times (0, T))}^2 \\ &+ \lambda\mu_1 \|v_1\|_{V_1}^2 + (1 - \lambda)\mu_2 \|v_2\|_{V_2}^2 \\ &\geq \left(-2\lambda \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} L_1\|_{(1,1)}^2 - 2(1 - \lambda) \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} L_1\|_{(1,2)}^2 + \lambda\mu_1\right) \|v_1\|_{V_1}^2 \\ &+ \left(-2\lambda \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} L_2\|_{(2,1)}^2 - 2(1 - \lambda) \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} L_2\|_{(2,2)}^2 + (1 - \lambda)\mu_2\right) \|v_2\|_{V_1}^2, \end{aligned}$$

donde segue que $\mathcal{B}_\lambda$ é coerciva, visto que estamos assumindo (3.23). $\square$

Observação 3.1 *A unicidade do Equilíbrio de Pareto, em geral, não ocorre. Como podemos ver na demonstração do Teorema 3.2, para cada $\lambda \in (0, 1)$, existe um (v_1, v_2) Equilíbrio de Pareto. Além disso, a unicidade obtida como consequência do teorema de Lax-Milgram não remete necessariamente à unicidade dos Equilíbrios de Pareto.*

4. Equação da Onda - Caso Semilinear

Agora, faremos um estudo dos Equilíbrios de Nash e Pareto direcionado aos casos semilineares. Nos casos lineares, vimos que os funcionais $\mathcal{J}_i$ são convexas. Isso possibilitou o par $(v_1, v_2) \in V$ ser um Equilíbrio de Nash se, e somente se, satisfaz (3.6). Além disso, provou-se a existência de uma relação entre ser um Equilíbrio de Pareto e satisfazer a equação (3.8). Entretanto, no caso semilinear, com F sendo uma função lipschitziana, não temos a convexidade de $\mathcal{J}_i$ garantida, motivando definições mais fracas, abaixo apresentadas.

Definição 4.1 (Quase-Equilíbrio de Nash) *Dada uma função $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$, o par (v_1, v_2) é um Quase-Equilíbrio de Nash para os funcionais $\mathcal{J}_i$ se satisfaz (3.6).*

Definição 4.2 (Quase-Equilíbrio Pareto) Dada uma função $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$, o par (v_1, v_2) é um Quase-Equilíbrio de Pareto para os funcionais $\mathcal{J}_i$ se satisfaz (3.8) para algum $\lambda \in (0, 1)$.

A seguir, revisitaremos de forma sucinta os passos do estudo dos sistemas lineares. Nosso objetivo será determinar os sistemas de otimalidade e demonstrar a existência dos Quase-Equilíbrios de Nash e Pareto. Vale ressaltar que a não-linearidade do sistema impõe distinções e dificuldades adicionais quando comparada ao caso linear.

4.1. O Sistema de otimalidade e a Existência do Equilíbrio de Nash

Vamos obter o sistema de otimalidade associado ao sistema

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + F(y) = f + v_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + v_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

assumindo que F é uma função lipschitziana. Ao contrário do caso linear, no caso semilinear não é mais possível escrever $y = L_1 + L_2 + u$, onde L_i são operadores lineares. Por esse motivo, vamos mudar a abordagem, em relação ao caso linear, para calcular as derivadas em (3.6). Vejamos que

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{J}_1(v_1 + s\hat{v}_1, v_2) - \mathcal{J}_1(v_1, v_2)}{s} &= \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} \left[\frac{s}{2} \left| \frac{y^{1,s} - y}{s} \right|^2 + \left(\frac{y^{1,s} - y}{s} \right) (y - y_{1,d}) \right] dxdt \\ &\quad + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} \left(\frac{s}{2} |\hat{v}_1|^2 + v_1 \hat{v}_1 \right) dxdt, \end{aligned}$$

onde $y^{1,s}$ é a solução de

$$\begin{cases} y_{tt}^{1,s} - \Delta y^{1,s} + F(y^{1,s}) = f + (v_1 + s\hat{v}_1) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + v_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ y^{1,s} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y^{1,s}(x, 0) = y_0(x), \quad y_t^{1,s}(x, 0) = y_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Observando que $z_i = \lim_{s \rightarrow 0} (y^{i,s} - y)/s$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} z_{tt}^i - \Delta z^i + F'(y)z^i = \hat{v}_i \mathbb{1}_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q \\ z^i = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ z^i(x, 0) = 0, \quad z_t^i(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

e obtém-se

$$\mathcal{J}'_1(v_1, v_2) \cdot (\hat{v}_1, 0) = \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} z^1 (y - y_{1,d}) dxdt + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} v_1 \hat{v}_1 dxdt.$$

Analogamente,

$$\mathcal{J}'_2(v_1, v_2) \cdot (0, \hat{v}_2) = \iint_{\mathcal{O}_{2,d} \times (0,T)} z^2 (y - y_{2,d}) dxdt + \mu_2 \iint_{\mathcal{O}_2 \times (0,T)} v_2 \hat{v}_2 dxdt.$$

Multiplicando a primeira linha de (4.2) pela solução ϕ^i do sistema

$$\begin{cases} \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(y)\phi^i = (y - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi^i(x, T) = 0, \quad \phi_t^i(x, T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.3)$$

e usando integração por partes, chegamos, da mesma forma que no caso linear, à conclusão que (3.6) é equivalente a

$$v_i = -\frac{1}{\mu_i} \phi^i \mathbb{1}_{\mathcal{O}_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

Logo, (v_1, v_2) é um Quase-Equilíbrio de Nash se, e somente se, satisfaz (4.4). O sistema de otimalidade procurado é, portanto, dado por

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + F(y) = f - \frac{1}{\mu_1} \phi^1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} - \frac{1}{\mu_2} \phi^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(y) \phi^i = (y - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ y = 0, \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi^i(x, T) = 0, \phi_t^i(x, T) = 0, y(x, 0) = y_0(x), y_t(x, 0) = y_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

A prova da existência do Quase-Equilíbrio de Nash realizada no caso linear não pode ser repetida aqui, pois o operador L_i , e seu adjunto L_i^* , associados ao sistema (4.2) não são lineares. Para contornar esse problema, faremos uma prova via ponto fixo. No que segue, denota-se C_F como constante positiva de Lipschitz que satisfaz $\|F'\| \leq C_F$.

Teorema 4.1 (*Existência do Quase-Equilíbrio de Nash*) *Seja $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$. Existe uma constante positiva $\mu_0 = \mu_0(\Omega, T, C_F, \|f\|_{L^2(Q)})$ tal que, se $\mu_1, \mu_2 > \mu_0$, então existe um Quase-Equilíbrio de Nash para os funcionais $\mathcal{J}_i$.*

Demonstração: Definimos a aplicação $\Lambda : V \rightarrow V$ dada por

$$\Lambda(v_1, v_2) = \left(-\frac{1}{\mu_1} \phi^1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1}, -\frac{1}{\mu_2} \phi^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} \right).$$

Logo, utilizando desigualdades de energia, podemos calcular

$$\begin{aligned} \|\Lambda(v_1, v_2) - \Lambda(\hat{v}_1, \hat{v}_2)\|_V^2 &\leq \frac{C(\Omega, T)}{\min\{\mu_1, \mu_2\}} \|(\phi^1, \phi^2) - (\hat{\phi}^1, \hat{\phi}^2)\|_{L^2(Q) \times L^2(Q)}^2 \\ &\leq \frac{C(\Omega, T, C_F)}{\min\{\mu_1, \mu_2\}} \|y - \hat{y}\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\leq \frac{C(\Omega, T, C_F, \|f\|_{L^2(Q)})}{\min\{\mu_1, \mu_2\}} \|(v_1, v_2) - (\hat{v}_1, \hat{v}_2)\|_V^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Tomando μ_1, μ_2 suficientemente grandes, Λ se torna uma contração e, consequentemente, possui um ponto fixo $v = (v_1, v_2)$ satisfazendo (4.4). Esse ponto fixo é, portanto, um Quase-Equilíbrio de Nash. $\square$

4.2. O Sistema de otimalidade e a Existência do Equilíbrio de Pareto

O sistema de otimalidade de Pareto para o (4.1) é obtido de forma semelhante ao sistema de otimalidade de Nash no caso semilinear. Sendo ϕ^i solução do sistema (4.3), tem-se:

(i) Se (v_1, v_2) é um Quase-Equilíbrio de Pareto, então existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$v_1 = -\frac{1}{\mu_1} \left(\phi^1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \phi^2 \right) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} \quad v_2 = -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \phi^1 + \phi^2 \right) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}. \quad (4.6)$$

(ii) Se existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que (v_1, v_2) satisfaz (4.6), então (v_1, v_2) é um Quase-Equilíbrio de Pareto.

Logo, o sistema de otimalidade procurado será dado por meio do sistema

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + F(y) = f - \frac{1}{\mu_1} \left(\phi^1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \phi^2 \right) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} - \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \phi^1 + \phi^2 \right) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(y) \phi^i = (y - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ y = 0, \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi^i(x, T) = 0, \phi_t^i(x, T) = 0, y(x, 0) = y_0(x), y_t(x, 0) = y_1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Assim como foi feito para o Quase-Equilíbrio de Nash, faremos a prova da existência do Quase-Equilíbrio de Pareto via ponto fixo.

Teorema 4.2 (*Existência do Quase-Equilíbrio de Pareto*) *Seja $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ e $\lambda \in (0, 1)$. Existe uma constante positiva $\mu_0 = \mu_0(\Omega, T, C_F, \|f\|_{L^2(Q)}, \lambda)$ tal que, se $\mu_1, \mu_2 > \mu_0$, então existe um Quase-Equilíbrio de Pareto para os funcionais $\mathcal{J}_i$.*

Demonstração: Para $\lambda \in (0, 1)$ fixo, definimos a aplicação $\Lambda : V \rightarrow V$ dada por

$$\Lambda(v_1, v_2) = \left(-\frac{1}{\mu_1} \left(\phi^1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \phi^2 \right), -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \phi^1 + \phi^2 \right) \right)$$

e mostramos que (4.5) vale para uma constante $C(\Omega, T, C_F, \|f\|_{L^2(Q)}, \lambda)$. Em seguida, escolhemos μ_1, μ_2 grandes o suficiente para Λ se tornar uma contração com um ponto fixo satisfazendo (4.6). Tal ponto fixo é um Quase-Equilíbrio de Pareto. $\square$

5. Aspectos Numéricos

Serão apresentados, a seguir, algoritmos iterativos desenvolvidos para a resolução dos problemas de equilíbrio, tanto lineares quanto semilineares. Para os problemas lineares, será empregado o Método do Ponto Fixo, enquanto os problemas semilineares serão abordados utilizando o Método de Newton-Raphson. Antes da descrição detalhada desses algoritmos, será exposto o processo completo de discretização dos problemas, o qual abrange a discretização espacial por meio do Método dos Elementos Finitos e a discretização temporal via Método das Diferenças Finitas.

5.1. Algoritmos iterativos

Existe uma ampla variedade de métodos iterativos para estruturar algoritmos que realizem simulações numéricas de EDP's (lineares e não lineares). No entanto, neste trabalho, optamos pela utilização do Método do Ponto Fixo para os casos lineares e do Método de Newton para os problemas não lineares. Algumas abordagens iterativas podem ser adaptadas aos problemas de controle ótimo, como ilustrado em [5, 10, 11, 13, 14, 32], nos quais foram empregados métodos de alta eficiência em termos de convergência. Em particular, no trabalho de [10], são apresentados diversos algoritmos acompanhados de análises comparativas de eficiência para problemas lineares e não lineares. Contudo, os resultados apresentados no estudo [10], restringem-se à equação do calor e ao caso específico do Equilíbrio de Nash. Para os nossos problemas, iniciaremos agora o processo de discretização após ter empregado as noções de controle ótimo.

• Discretização do Tempo

Consideramos inicialmente uma discretização com passo de tempo Δt . Seja m um inteiro positivo, definimos $\Delta t = \frac{T}{m}$ e temos $t^0 = 0$ e $t^m = m\Delta t$. Vejamos que,

$$0 = t^0 < t^1 < \dots < t^m = T.$$

Logo, para cada passo dado podemos aproximar o espaço de tempo, i.e.

$$V_i^m = L^2(\mathcal{O}_i)^m \approx V_i = L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T)), \quad i = 1, 2.$$

Assim, podemos interpretar os elementos de V_i^m como controle em V_i que são por partes constantes no tempo. Em suma, podemos aproximar os controles $v_i^{n+1} \approx v_i$.

• Discretização do Espaço

A partir de agora, assumiremos que Ω é um domínio poligonal de $\mathbb{R}^3$. Também assumiremos que $\mathcal{O}_{i,d}$ e $\mathcal{O}_i$ são poligonais. Consideremos a triangulação $\mathcal{T}_h$ de Ω , onde h é o maior comprimento das arestas dos triângulos de $\mathcal{T}_h$. Consideremos

$$\mathbb{P}_h^1 = \left\{ z \in H^1(\Omega) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad z \in \mathbb{P}_1(K) \right\},$$

sendo $\mathbb{P}_1(K)$ o espaço das funções polinomiais em K de grau ≤ 1 ; assim, $\dim(\mathbb{P}_1(K)) = 3$ e $\dim(W_h) = N_h$, onde N_h é o número de vértices de $\mathcal{T}_h$.

Agora, aproximaremos o espaço, para $i \in \{1, 2\}$, V_i por $V_{i,h}^{\Delta t}$, definido por $V_{i,h}^{\Delta t} = (V_{i,h})^N$, onde

$$V_{i,h} = \{z : z \in \mathcal{C}^0(\bar{\mathcal{O}}_i), z|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{O}_i\}.$$

Assim, temos a aproximação para $V_h^m = V_{1,h}^m \times V_{2,h}^m$. Por fim, aproximamos o espaço

$$\{z \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) : z(t)|_{\Gamma_1} = 0\},$$

por $W_{h,0}^m$ definido por $W_{h,0}^m = (W_{h,0})^N$, onde

$$W_{h,0} = \{z \in W_h : z|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

A equação de estado em (2.1) e os sistemas adjuntos em (3.13) podem ser aproximados no tempo e no espaço incorporando técnicas de elementos finitos para a discretização espacial do problema, e diferenças finitas para a discretização temporal. Com efeito, denotando para cada função g uma aproximação $g_h(x, m\Delta t) = g_h^m(x, t)$, construímos uma aproximação para y e f dadas como $y(x, t)_h \approx y_h^m(x, t)$, $f(x, t)_h \approx f_h^m(x, t)$. Além disso, dados $y_h^{m+1}(x, t)$ e $y_h^m(x, t)$, tem-se, via diferenças finitas no tempo, que

$$y_{h,t}^{m+1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y_h^{m+1} - y_h^m}{\Delta t}.$$

De modo análogo,

$$y_{h,tt}^{m+1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(y_h^{m+1})_t - (y_h^m)_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y_h^{m+1} - 2y_h^m + y_h^{m-1}}{(\Delta t)^2}.$$

Vale destacar que usando os dados iniciais em (2.1) e (2.2), segue que

$$y_{h,t}^m \approx \frac{y_h^m - y_h^{m-1}}{\Delta t} \Rightarrow y_h^m = y_h^{m-1} + (\Delta t)y_{h,t}^m.$$

Ainda, $y_h^0 \approx y_0(x, 0) = y_0$, pois y_0 é um valor dado. O mesmo ocorrerá com $y_{h,t}^0 \approx y_1(x, 0) = y_1$. Logo, para $m = 1$ teremos $y_h^1 = y_h^0 + (\Delta t)y_{h,t}^0 = y_0 + (\Delta t)y_1$. Ou seja, conhecendo os dados iniciais, podemos computar os valores das funções para cada passo de tempo em função do passo anterior.

Considerando a aproximação acima de maneira adequada, podemos rescrever os sistemas (2.1) e (2.2) como segue abaixo:

$$\begin{cases} y_{h,tt}^{m+1} - \Delta y_h^{m+1} = f^{m+1} + v_1^{m+1}\mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + v_2^{m+1}\mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ y_h^{m+1} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_h^{m+1}(x, 0) = y_{h,0}^{m+1}(x), y_{h,t}^{m+1}(x, 0) = y_{h,1}^{m+1}(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y_{h,tt}^{m+1} - \Delta y_h^{m+1} + F(y_h^{m+1}) = f^{m+1} + v_1^{m+1}\mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + v_2^{m+1}\mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ y_h^{m+1} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_h^{m+1}(x, 0) = y_{h,0}^{m+1}(x), y_{h,t}^{m+1}(x, 0) = y_{h,1}^{m+1}(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

Para cada $m = T-1, \dots, 0$, uma vez que o estado y_h^m está explícito, somos capazes de deduzir analogamente os estados adjuntos $\phi_{i,h}^m$ para cada par de controle $v = (v_1^{m+1}, v_2^{m+1}) \in V_h^m$ usando os sistemas

$$\begin{cases} \phi_{h,tt}^{i,m} - \Delta \phi_h^{i,m} = (y_h^m - y_{i,d})\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi_h^{i,m} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi_m^{i,m}(x, T) = 0, \phi_{h,t}^{i,m}(x, T) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \phi_{h,tt}^{i,m} - \Delta \phi_h^{i,m} + F'(y_h^m) \phi_h^{i,m} = (y_h^m - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi_h^{i,m} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi_m^{i,m}(x, T) = 0, \phi_{h,t}^{i,m}(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Portanto, é natural aproximar (2.3) introduzindo uma abordagem em função dos elementos finitos, definindo $\mathcal{J}_{i,h}^m(v_1, v_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{J}_{i,h}^m(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |y_h^{m+1} - y_{i,d}|^2 dx dt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v_i|^2 dx dt.$$

Além disso, para o problema não linear, devemos realizar a linearização utilizando

$$F(y_h^{m+1}) = F'(y_h^m)(y_h^{m+1} - y_h^m) + F(y_h^m). \quad (5.2)$$

Logo, o termo $F(y_h^{m+1})$ será obtido durante o processo iterativo de y_h^{m+1} . Assim, podemos usar (5.2) para reescrever o sistema (5.1) como

$$\begin{cases} y_{h,tt}^{m+1} - \Delta y_h^{m+1} + F'(y_h^m) y_h^{m+1} = f^{m+1} + A(y_h^m) + v_1^{m+1} \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + v_2^{m+1} \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ y_h^{m+1} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y_h^{m+1}(x, 0) = y_{h,0}^{m+1}(x), y_{h,t}^{m+1}(x, 0) = y_{h,1}^{m+1}(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde $A(y_h^{m+1}) = y_h^m F'(y_h^m) - F(y_h^m)$.

No que segue, apresentamos a formulação variacional para os problemas aproximados, bem como os passos para computação dos dados e uma versão resumida e compacta dos seus algoritmos. A apresentação das formulações variacionais está diretamente direcionada para a programação dos dados e posterior simulação, com auxílio do software *FreeFem++*. Usaremos a notação $V_h^{\Delta t} = V_{1,h}^{\Delta t} \times V_{2,h}^{\Delta t}$ para indicar o espaços totalmente discretizados para os controles.

Inicialmente, apresentaremos a formulação variacional do Equilíbrio de Nash, no caso linear.

FORMULAÇÃO OTIMIZADA 1 - NASH LINEAR

Passo 1 - Escolhemos $v^0 = (v_1^0, v_2^0) \in V_h^{\Delta t}$ e consideramos uma aproximação $(y_{0,h}, y_{1,h}) \in W_{h,0} \times W_{h,0}$ para (y_0, y_1) .

Passo 2 - Dado $n \geq 0$ e $v^n = (v_1^n, v_2^n) \in V_h^{\Delta t}$, calculamos a aproximação $y_h^{n,0}, y_h^{n,1}, \dots$ do estado, solucionando

$$\begin{cases} y_h^{n,0} = y_{h,0}, y_h^{n,1} = y_h^{n,0} + (\Delta t) y_{h,1}, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{y_h^{n,m+1} - 2y_h^{n,m} + y_h^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) z + \nabla y_h^{n,m+1} \nabla z \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (f(x, t^{m+1}) + v_1^n(x, t^{m+1}) + v_2^n(x, t^{m+1})) z dx, \end{cases}$$

para todo $z, y_h^{n,m+1} \in W_{h,0}$ e $m = 1, \dots, T-1$.

Computamos o adjunto de

$$\begin{cases} \phi_{i,h}^{n,M} = 0, \phi_{i,h}^{n,T-1} = 0, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\phi_{i,h}^{n,m+1} - 2\phi_{i,h}^{n,m} + \phi_{i,h}^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) z + \nabla \phi_{i,h}^{n,m+1} \nabla z \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (y_h^{n,m-1} - y_{i,d}(x, t^{m-1})) z dx, \end{cases}$$

para todo $z, \phi_{i,h}^{n,m} \in W_{h,0}$ e $m = T-1, T-2, \dots, 1$.

Passo 3 - Finalmente, calculamos

$$v_i^{n+1} = -\frac{1}{\mu_i} \phi_{i,h}^{n,m}, \quad i = 1, 2.$$

Apresentaremos a seguir, uma formulação para o problema linear com Equilíbrio de Pareto, semelhante à abordagem anterior.

FORMULAÇÃO OTIMIZADA 2 - PARETO LINEAR

Passo 1 - Escolhemos $v^0 = (v_1^0, v_2^0)$ e consideramos uma aproximação $(y_{0,h}, y_{1,h}) \in W_{h,0} \times W_{h,0}$ para (y_0, y_1) .

Passo 2 - Dado $n \geq 0$ e $v^n = (v_1^n, v_2^n) \in V_h^{\Delta t}$, calculamos a aproximação $y_h^{n,0}, y_h^{n,1}, \dots$ para o estado, através do problema

$$\begin{cases} y_h^{n,0} = y_{h,0}, y_h^{n,1} = y_h^{n,0} + (\Delta t)y_{h,1}, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{y_h^{n,m+1} - 2y_h^{n,m} + y_h^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) z + \nabla y_h^{n,m+1} \nabla z \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (f(x, t^{m+1}) + v_1^n(x, t^{m+1}) + v_2^n(x, t^{m+1})) z dx, \end{cases}$$

com $z, y_h^{n,m+1} \in W_{h,0}$ e $m = 1, \dots, T-1$.

Para cada $i = 1, 2$, computamos o estado adjunto, através do sistema

$$\begin{cases} \phi_{i,h}^{n,M} = 0, \phi_{i,h}^{n,T-1} = 0, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\phi_{i,h}^{n,m+1} - 2\phi_{i,h}^{n,m} + \phi_{i,h}^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) z + \nabla \phi_{i,h}^{n,m+1} \nabla z \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (y_h^{n,m-1} - y_{i,d}(x, t^{m-1})) z dx, \end{cases}$$

com $z, \phi_{i,h}^{n,m} \in W_{h,0}$ e $m = T-1, T-2, \dots, 1$.

Passo 3 - Por fim, sendo $\lambda \in (0, 1)$, calculamos v_1^{n+1} e v_2^{n+1} , como em (3.16), i.e

$$v_1^{n+1} = -\frac{1}{\mu_1} \left(\phi_{1,h}^{n,m} + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \phi_{2,h}^{n,m} \right)$$

e

$$v_2^{n+1} = -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{(1-\lambda)} \phi_{1,h}^{n,m} + \phi_{2,h}^{n,m} \right).$$

A seguir, apresentaremos os algoritmos que modelam os problemas não-lineares, iniciando com a formulação do problema de Nash e sua respectiva versão discretizada.

FORMULAÇÃO OTIMIZADA 3 - NASH SEMILINEAR

Passo 1 - Escolhemos $v^0 = (v_1^0, v_2^0)$ e consideramos $(y_{0,h}, y_{1,h}) \in W_{h,0} \times W_{h,0}$, uma aproximação para (y_0, y_1) .

Passo 2 - Dado $n \geq 0$ e $v^n = (v_1^n, v_2^n) \in V_h^{\Delta t}$, calculamos a aproximação do estado $y_h^{n,0}, y_h^{n,1}, \dots$ usando

$$\begin{cases} y_h^{n,0} = y_{h,0}, y_h^{n,1} = y_h^{n,0} + (\Delta t)y_{h,1}, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{y_h^{n,m+1} - 2y_h^{n,m} + y_h^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) z + \nabla y_h^{n,m+1} \nabla z + F'(y_m^{n,l-1}) y_m^{n,l} z \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (f(x, t^{m+1}) + v_1^n(x, t^{m+1}) + v_2^n(x, t^{m+1}) + A(y_m^n)) z dx, \end{cases}$$

para todo $z, y_h^{n,m+1} \in W_{h,0}$ e $m = 1, \dots, T-1$.

Computamos, em seguida, os estados adjuntos $(\phi_{i,h}^{n,m})$ por meio de

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i,h}^{n,M} = 0, \phi_{i,h}^{n,T-1} = 0, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\phi_{i,h}^{n,m+1} - 2\phi_{i,h}^{n,m} + \phi_{i,h}^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) z + F'(y_m^{n,l-1}) \phi_{i,h}^{n,l} z + \nabla \phi_{i,h}^{n,m+1} \nabla z \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} \left(y_h^{n,m-1} - y_{i,d}(x, t^{m-1}) \right) z dx, \end{array} \right.$$

para todo $z, \phi_{i,h}^{n,m} \in W_{h,0}$ e $m = T-1, T-2, \dots, 1$.

Passo 3 - Por fim, computamos

$$v_i^{n+1} = -\frac{1}{\mu_i} \phi_{i,h}^{n,m}, \quad i = 1, 2.$$

Apresentaremos abaixo a formulação otimizada final, incluindo a discretização completa do sistema não-linear e sua adaptação para o Equilíbrio de Pareto.

FORMULAÇÃO OTIMIZADA 4 - PARETO SEMILINEAR

Passo 1 - Escolhemos $v^0 = (v_1^0, v_2^0)$ e consideramos uma aproximação $(y_{0,h}, y_{1,h}) \in W_{h,0} \times W_{h,0}$ para (y_0, y_1) .

Passo 2 - Dado $n \geq 0$ e $v^n = (v_1^n, v_2^n) \in V_h^{\Delta t}$, calculamos a aproximação $y_h^{n,0}, y_h^{n,1}, \dots$ do estado, através do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y_h^{n,0} = y_{h,0}, y_h^{n,1} = y_h^{n,0} + (\Delta t) y_{h,1}, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{y_h^{n,m+1} - 2y_h^{n,m} + y_h^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) z + \nabla y_h^{n,m+1} \nabla z + F'(y_m^{n,l-1}) y_m^{n,l} z \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} \left(f(x, t^{m+1}) + v_1^n(x, t^{m+1}) + v_2^n(x, t^{m+1}) + A(y_m^n) \right) z dx, \end{array} \right.$$

com $z, y_h^{n,m+1} \in W_{h,0}$ e $m = 1, \dots, T-1$.

Computamos o estado adjunto através do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i,h}^{n,M} = 0, \phi_{i,h}^{n,T-1} = 0, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\phi_{i,h}^{n,m+1} - 2\phi_{i,h}^{n,m} + \phi_{i,h}^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) z + F'(y_m^{n,l-1}) \phi_{i,h}^{n,l} z + \nabla \phi_{i,h}^{n,m+1} \nabla z \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} \left(y_h^{n,m-1} - y_{i,d}(x, t^{m-1}) \right) z dx, \end{array} \right.$$

com $z, \phi_{i,h}^{n,m} \in W_{h,0}$ e $m = T-1, T-2, \dots, 1$.

Passo 3 - Por fim, sendo $\lambda \in (0, 1)$, calculamos v_1^{n+1} e v_2^{n+1} , por meio de

$$v_1^{n+1} = -\frac{1}{\mu_1} \left(\phi_{1,h}^{n,m} + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \phi_{2,h}^{n,m} \right)$$

e

$$v_2^{n+1} = -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{(1-\lambda)} \phi_{1,h}^{n,m} + \phi_{2,h}^{n,m} \right).$$

6. Simulações Numéricas

Os resultados computacionais e a análise de convergência obtidos na implementação dos algoritmos para os problemas lineares e não lineares foram gerados utilizando o software livre *FreeFem++* [24] (versão 4.13). Inicialmente, apresentamos o domínio Ω_h na Figura 3, que foi assumido como uma aproximação poligonal para uma região circular bidimensional, parametricamente descrita por

$$\Omega_{2D} = (0.5 + 0.75 \cos(t), 0.5 + 0.75 \sin(t)), \quad \text{com } t \in [0, 2\pi].$$

Adicionado uma extrusão de Ω_{2D} no eixo- z , restrito ao intervalo $[0, 1]$, definimos $\Omega_h := \Omega_{2D} \times [0, 1]$.

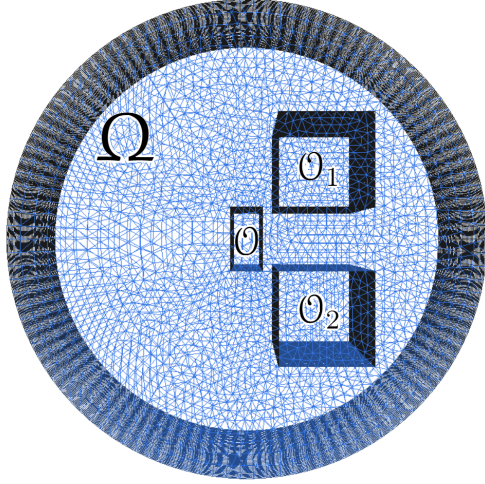


Figure 1: *

a) Domínio Ω_h - visão projetada

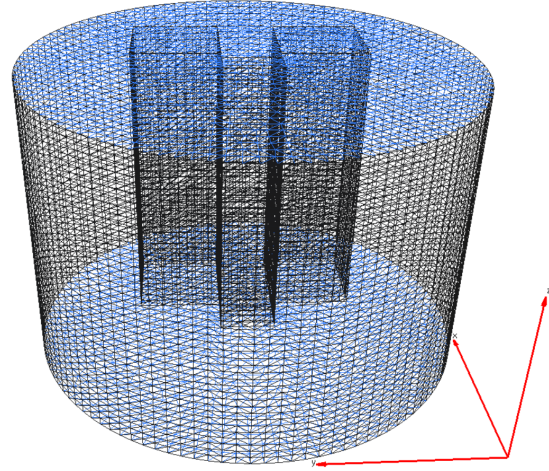


Figure 2: *

b) Domínio Ω_h - visão 3D

Figure 3: Domínio discretizado Ω_h , composto por 106800 tetraedros (gerando o volume), 19551 vértices (ou nós na decomposição dos elementos finitos) e 10840 triângulos (composição das superfícies).

Na Tabela 1 abaixo, temos informações suplementares sobre regiões e restrições necessárias no domínio.

Table 1: Sub-regiões no Domínio

Região	Eixo x	Eixo y	Eixo z
$\mathcal{O}$	$[0.45, 0.55]$	$[0.4, 0.6]$	$[0, 1]$
$\mathcal{O}_d$	$[0.3, 1]$	$[0, 1]$	$[0, 1]$
$\mathcal{O}_1$	$[0.6, 0.9]$	$[0.6, 0.9]$	$[0, 1]$
$\mathcal{O}_2$	$[0.6, 0.9]$	$[0.1, 0.4]$	$[0, 1]$

Em todas as simulações, consideramos os valores Err_1 e Err_2 , para estimar os critérios de convergências nos algoritmos. Nos casos lineares, estabelecemos para os **Algoritmo 1** e **Algoritmo 2**, os seguintes critérios de parada:

$$\text{Err}_1 \equiv \frac{\|(v_1^{n+1}, v_2^{n+1}) - (v_1^n, v_2^n)\|}{\|(v_1^{n+1}, v_2^{n+1})\|} \quad \text{e} \quad \text{Err}_2 \equiv \frac{\|y^{n+1} - y^n\|}{\|y^{n+1}\|}.$$

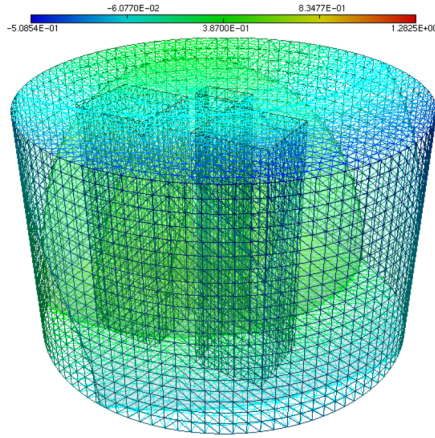
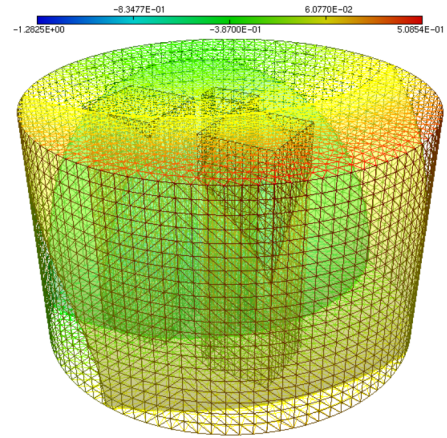
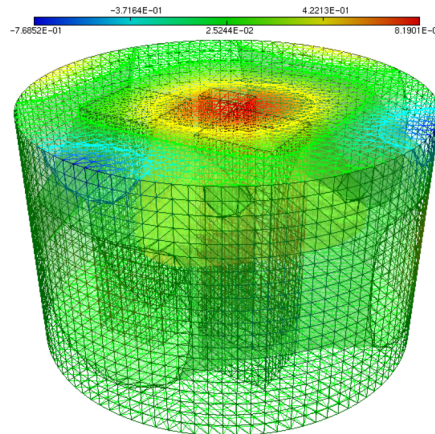
Nos casos não lineares, o critério de parada para o **Algoritmo 3** e o **Algoritmo 4** exige a obtenção simultânea dos valores

$$\text{Err}_1 \equiv \frac{\|(v_1^{n+1}, v_2^{n+1}) - (v_1^n, v_2^n)\|}{\|(v_1^{n+1}, v_2^{n+1})\|} \quad \text{e} \quad \text{Err}_2 \equiv \frac{\|y^{n,\ell+1} - y^{n,\ell}\|}{\|y^{n,\ell+1}\|}.$$

Por conta das condições de Dirichlet, para uma melhor percepção dos resultados, as simulações são apresentadas com um recuo no eixo z , definido por $z_{\text{Top}} = z - 0.1$ e $z_{\text{Base}} = z + 0.1$. Os critérios de parada nos processos iterativos ocorrem quando valem simultaneamente $\text{Err}_1 \leq \varepsilon$ e $\text{Err}_2 \leq \varepsilon$, onde fixamos $\varepsilon = 10^{-6}$. Boas estimativas para os critérios de parada nos processos iterativos são essenciais para avaliar a precisão e eficiência dos algoritmos utilizados, guiando o processo computacional das soluções aproximadas, durante a computação evolutiva dos problemas de controle. Para medir a eficácia e ajustar as aproximações, avaliamos o desempenho em $[0, T]$ dos funcionais de custo $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$, durante atuação dos controles v_1 e v_2 . As funções utilizadas e os dados iniciais estão apresentados na Tabela 2 abaixo, seguidas da visualização dos objetivos nas Figuras 4 e 5 e do dado inicial na Figura 6.

Table 2: Funções Utilizadas

Função	Expressão
y_0	$z \sin(\pi xy) \sin(\pi xz) \sin(\pi yz)$
y_1	$z \sin(\pi xy) \sin(\pi xz) \sin(\pi yz)$
$y_{1,d}$	$(1.3 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$
$y_{2,d}$	$(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1.3)$
$F(s)$	$s \sin(1/\exp(s))$

Figure 4: Objetivo 1: $y_{1,d}$ Figure 5: Objetivo 2: $y_{2,d}$ Figure 6: Dados iniciais $y_0 = y_1$.

6.1. Experimentos do caso Nash Linear

Iniciamos os resultados numéricos pelo caso Nash-Linear. A Figura 7 ilustra o estado y , controlado no tempo final T , enquanto as Figuras 8 e 9 apresentam os controles v_1 e v_2 respectivamente

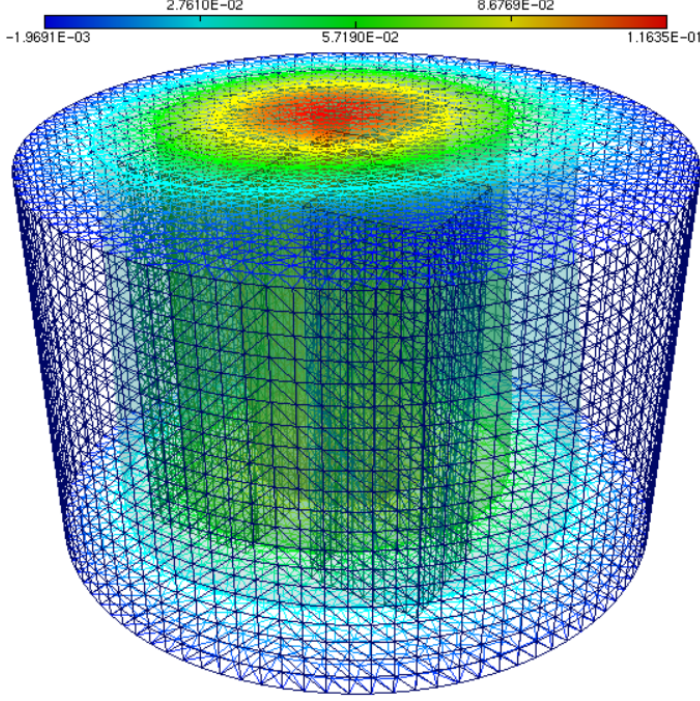


Figure 7: Estado $y(x, T)$

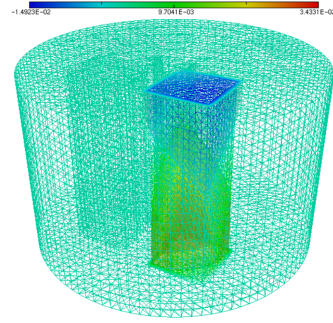


Figure 8: $v_1(x, T)$

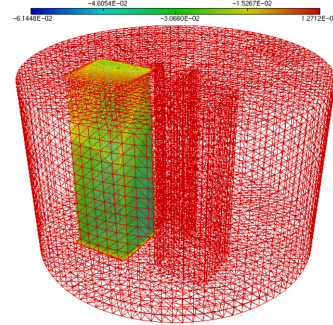


Figure 9: $v_2(x, T)$

Os gráficos apresentados na Figura 10 ilustram o processo evolutivo associado aos critérios de parada simultâneos, bem como o comportamento das funções custo no contexto do Equilíbrio de Nash Linear.

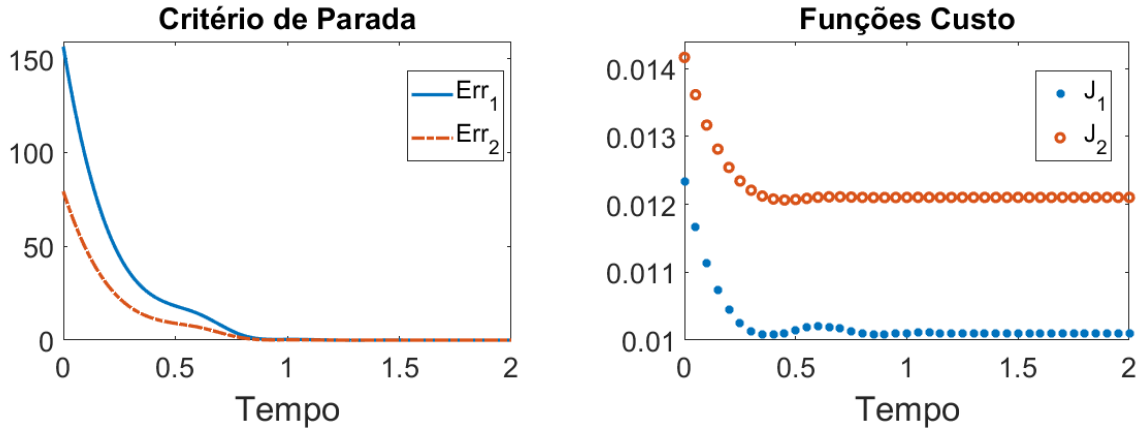


Figure 10: Evolução temporal das funções custo e dos critérios de parada no processo iterativo.

6.2. Experimentos do caso Pareto Linear

Similar ao que foi apresentado no caso anterior, agora inserimos experimentos realizados para o Equilíbrio de Pareto, no casolinear. Nas Figuras 11 e 12, tem-se os estados finais associados aos val-

ores extremas avaliados para λ , mais especificamente, $\lambda = 0.05$ e $\lambda = 0.95$, seguidos da avaliação dos critérios de parada Err_i ($i = 1, 2$) na Figura 13 e dos funcionais custo $\mathcal{J}_i$ ($i = 1, 2$) na Figura 14 (ambos em função da variação de tempo e algumas variações de λ).

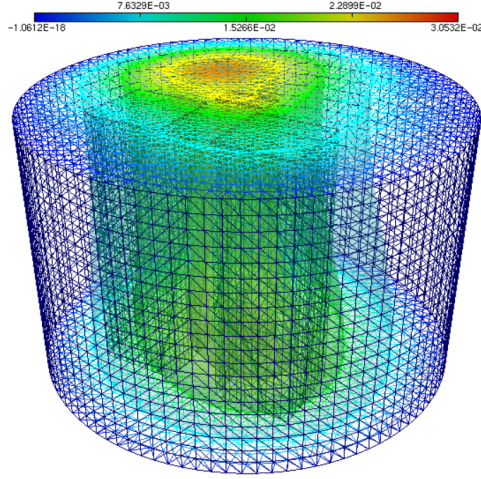


Figure 11: Estado $y(x, T)$ em $\lambda = 0.05$

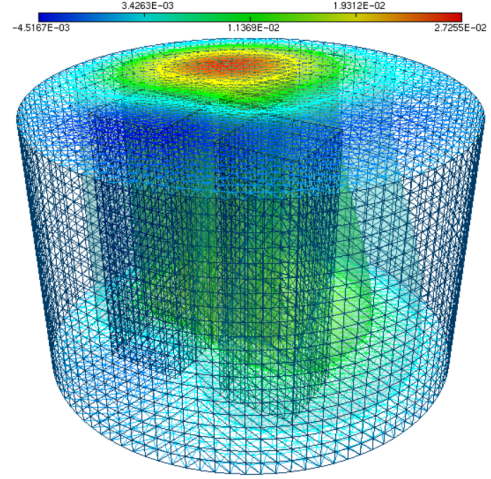


Figure 12: Estado $y(x, T)$ em $\lambda = 0.95$

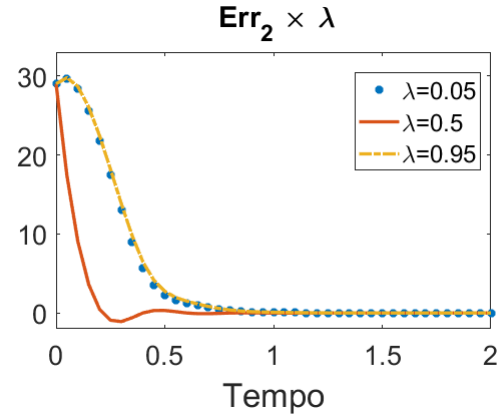
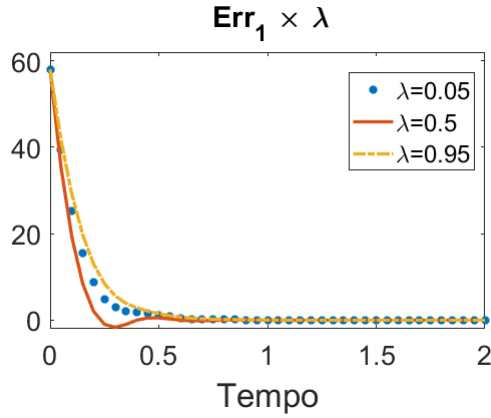


Figure 13: Critérios de parada Err_1 e Err_2 em termos de λ , no processo evolutivo do problema.

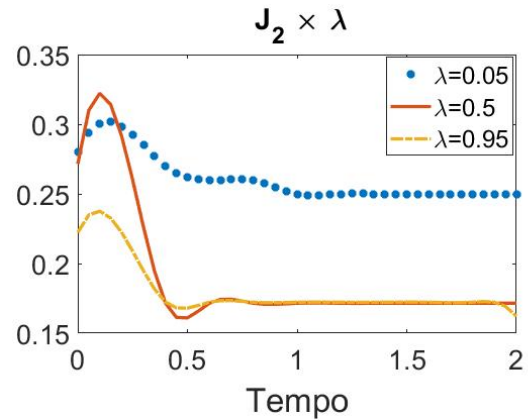
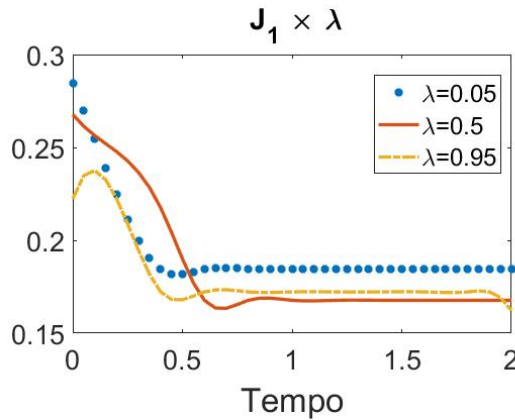


Figure 14: Funcionais custo $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$. Nos experimentos, o equilíbrio ótimo ocorreu quando $\lambda = 0.5$.

6.3. Experimentos do caso Nash Não-Linear

Para os casos Não-Lineares, iniciaremos com os resultados obtidos no Equilíbrio de Nash. Na Figura 15, temos o estado controlado em seu tempo final, seguido da análise do critério de parada na Figura 16 e das informações sobre a evolução das funções custo, na Figura 17.

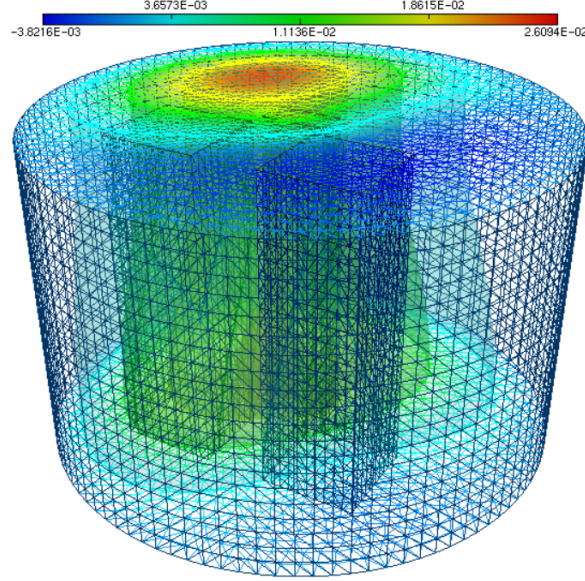


Figure 15: Estado $y(x, T)$ final controlado no tempo.

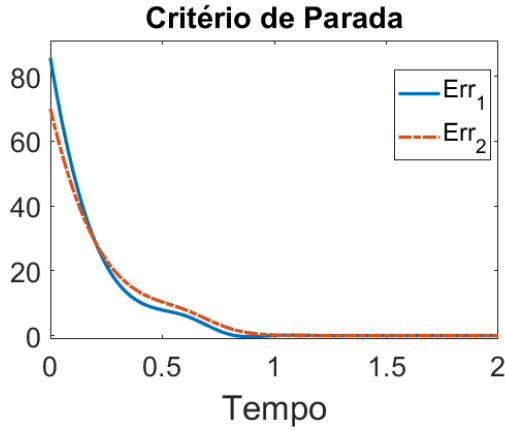


Figure 16: Critério de parada.

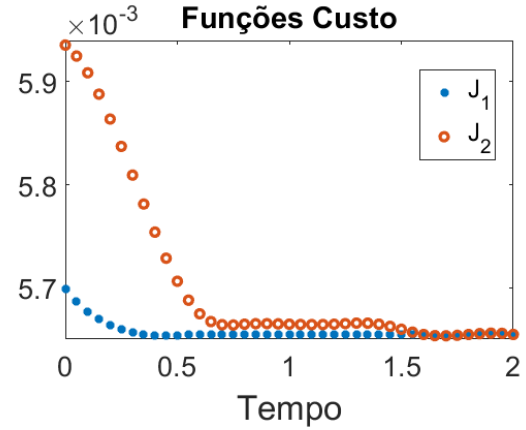
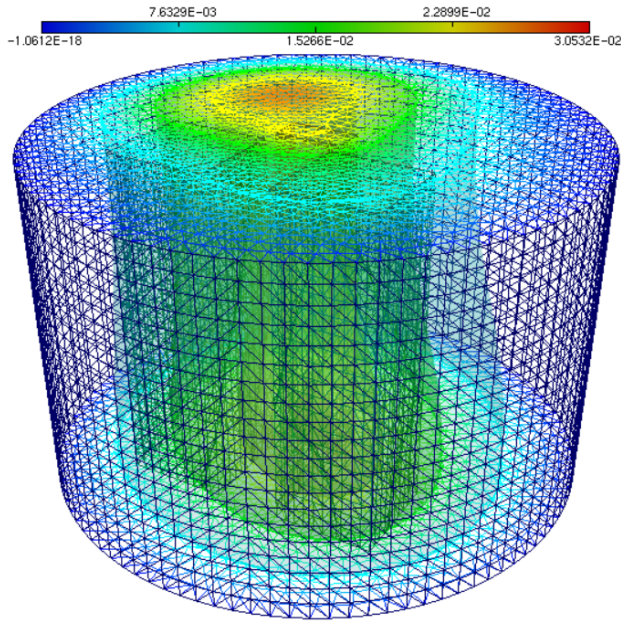
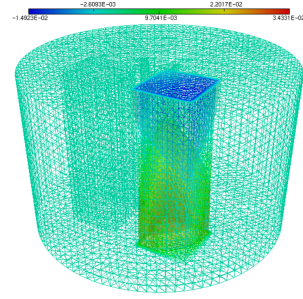
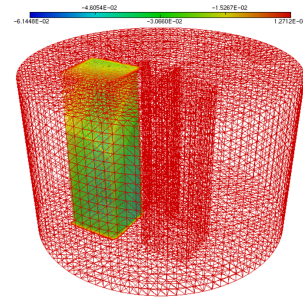
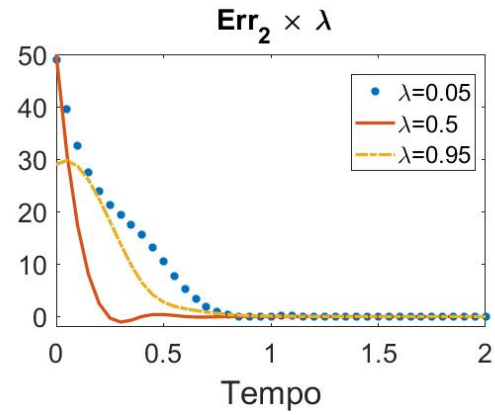
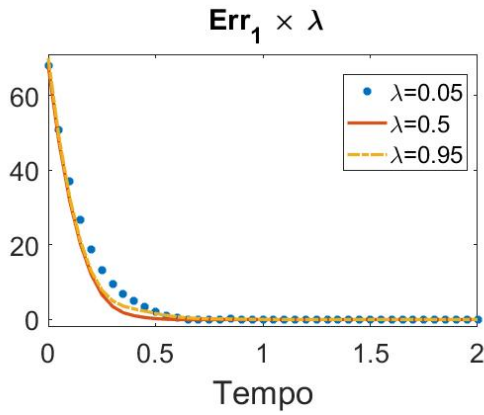
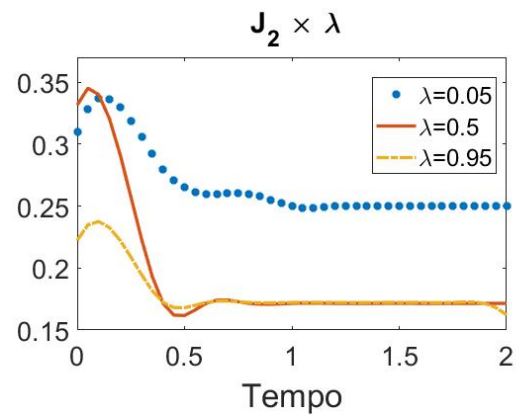
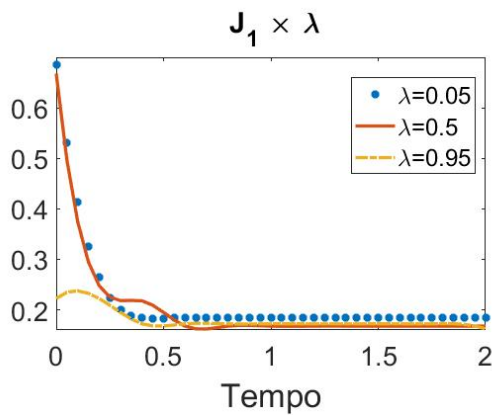


Figure 17: Função custo.

6.4. Experimentos do caso Pareto Não-Linear

Seguindo a estrutura dos experimentos anteriores, guiaremos os resultados obtidos no caso Pareto Não-Linear. Aqui, as simulações foram realizadas com $\mu = 5$ fixo e $\lambda = \{0.05, 0.5, 0.9\}$. Nas figuras 18, 19 e 20, representamos as imagens do estado y e dos respectivos controles atuantes v_1 e v_2 , obtidas após atingirem os critérios de convergência simultâneos; estes representados na Figura 21. Na Figura 22 temos a evolução dos funcionais custo em função do tempo e de alguns valores de λ . Assim como no caso Pareto-Linear, nas simulações realizadas observou-se a convergência ótima quando $\lambda \approx 0.5$.

Figure 18: Estado final $y(x, T)$ em $\lambda = 0.5$ Figure 19: $v_1(x, T)$ Figure 20: $v_2(x, T)$ Figure 21: Critérios de parada Err_1 e Err_2 , com diferentes valores de λ .Figure 22: Funcionais custo $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$. Nos experimentos, o equilíbrio ótimo ocorreu quando $\lambda = 0.5$.

6.5. E o problema sem controles?

Enquanto nos resultados anteriores abordamos problemas de controle com base nos conceitos de Equilíbrio de Nash e Equilíbrio de Pareto, introduzimos agora experimentos que simulam a ausência de controle no processo evolutivo da solução. Esses experimentos permitem comparar os resultados obtidos nas abordagens com e sem controle, avaliando as respectivas vantagens e limitações. A seguir, apresentamos experimentos adicionais com o objetivo de extrair mais informações da conexão entre o desempenho dos funcionais custo $\mathcal{J}_i$ ($i = 1, 2$) e os diferentes cenários de controle considerados neste estudo. Nos casos de Equilíbrio de Nash e Pareto, os resultados numéricos e computacionais demonstraram que a atuação dos controles possibilita alcançar de maneira eficaz a condição de equilíbrio do estado. No entanto, surge a seguinte questão: como seria o comportamento da solução na ausência de controles atuantes, considerando um objetivo previamente definido?

Para responder tal questionamento, adicionamos experimentos comparativos, em que o processo evolutivo da solução dos sistemas estarão livres da atuação de controles. Para avaliar o comportamento dos sistemas livres da atuação do controle (caso linear e não-linear), inserimos agora o funcional custo $\mathcal{J}_i$, como aferidor de desempenho da aproximação solução, dado um objetivo a ser alcançado, ao qual, definimos por:

$$\mathcal{J}_i(y) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |y - y_{i,d}|^2 dx dt, \quad i = 1, 2.$$

Nos gráficos das Figuras 23 e 24, apresentamos uma avaliação qualitativa dos funcionais custo $\mathcal{J}_i$ e $\mathcal{J}_i$ ($i = 1, 2$), no contexto evolutivo dos algoritmos lineares e não-lineares respectivamente. Realizamos simulações comparativas entre evolução ausente de atuação dos controles e os casos de controle com Equilíbrio Nash e Equilíbrio de Pareto, considerando a condição ótima de desempenho dos algoritmos anteriores, que foram obtidos ao fixar $\lambda = 0.5$ e $\mu = 5$.

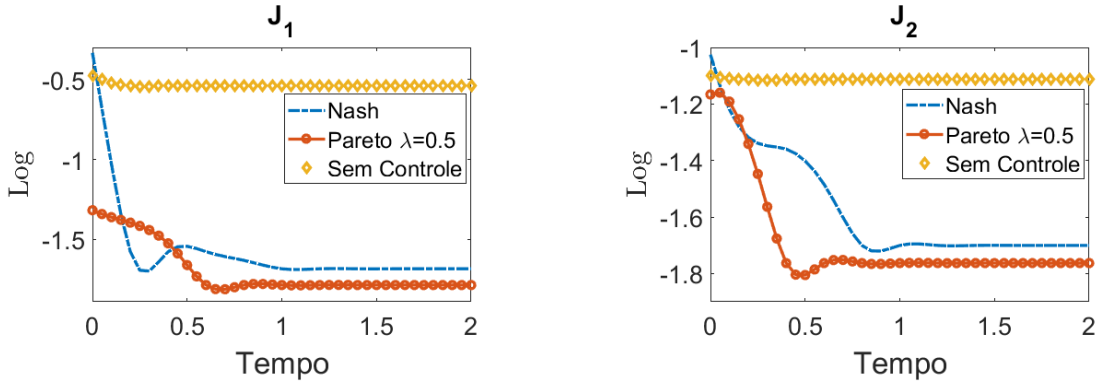


Figure 23: Casos lineares.

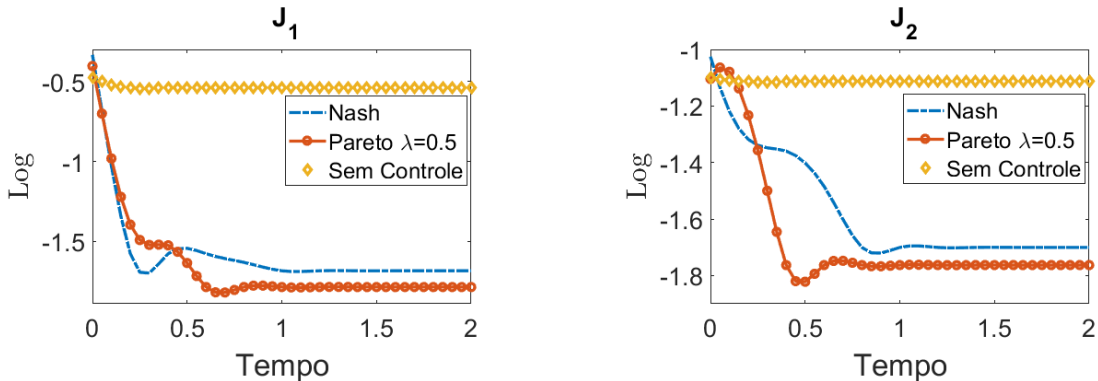


Figure 24: Casos não-lineares.

7. Conclusões

Neste trabalho, apresentamos uma análise de problemas de controle ótimo para equações de ondas lineares e semilineares, utilizando estratégias que envolvem equilíbrio de Nash e Pareto, em domínios tridimensionais. Prolongamos os resultados teóricos, com métodos numéricos iterativos seguidos de simulações computacionais. Para construir soluções aproximadas em espaços de dimensão finita, utilizamos o Método dos Elementos Finitos para a discretização espacial e o Método das Diferenças Finitas para a discretização temporal dos problemas. Já para os algoritmos iterativos, foram usados o método do ponto fixo, nos casos lineares, e o método de Newton, para os casos semilineares. Por fim, destacamos a relevância de controlar um sistema, indicando simulações qualitativas quando comparadas ao processo de não controlar os sistemas.

Na teoria de controle, os resultados teóricos têm o potencial de orientar aplicações práticas e análises numéricas que são não apenas viáveis, mas também relevantes do ponto de vista científico. Entre esses resultados, destacam-se: o problema de controle ótimo [35]; o problema multiobjetivo associado ao controle robusto [25]; o controle hierárquico em condições de fronteira [20]; problemas relacionados à fronteira dinâmica [6,21,33]; sistemas dispersivos [8,9]; problemas que empregam o método dos momentos [22]; e problemas envolvendo condições degeneradas [1], entre outros.

Uma possível extensão natural deste trabalho seria o desenvolvimento de algoritmos qualitativos, visando identificar e apresentar o caso ótimo entre diversas alternativas, conforme ilustrado em [10]. Avanços promissores apontam em adaptar técnicas de Machine Learning, como apresentado em [7], para orientar métodos de otimização com grandes dados, bem como possibilitar melhorias de informação e impactos na teoria de controle de EDPs. Além disso, técnicas de Deep Learning, como em [23], poderiam ser utilizadas para desenvolver abordagens baseadas em redes neurais capazes de obter resultados para estratégias de controle mais eficientes, ou que indique as maneiras mais adequadas a se considerar os dados iniciais, bem como os objetivos a serem alcançados para soluções a serem controladas. As abordagens informadas acima, ampliariam o potencial de aplicação em diversas áreas do conhecimento.

References

1. ALLAL, B., HAJJAJ, A., SALHI, J., SBAI, A., *Boundary controllability for a coupled system of degenerate/singular parabolic equations*, Evolution Equations and Control Theory, **11**(5) 1579-1604 (2022).
2. ARARUNA, F. D., FERNÁNDEZ-CARA, E., GUERREIRO S., SANTOS, M.C., *New results on the Stackelberg–Nash exact control of linear parabolic equations*, Systems and Control Letters **104** 78-85 (2017).
3. ARARUNA, F., FERNÁNDEZ-CARA, E., GUERREIRO, S., SILVA, L.C., *Hierarchic control for the wave equation*, J. Optimiz. Theory App **178**(4) 264-288 (2018).
4. ARARUNA, F.D., FERNÁNDEZ-CARA, E., SANTOS, M.C., *Stakelberg Nash Exact Controllability for linear and semilinear Parabolic Equations*, ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations **21**(3) (2015).
5. BOUHAMED, A., ELKABOUSS, A., CARVALHO, P. P., BOUZAHIR, H., *Boundary optimal control problem of semi-linear Kirchhoff plate equation*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, **80** 104146 (2024).
6. BOUTAAYAMOU, I., ET-TAHRI, F., MANIAR, L., *Insensitizing controls of a volume-surface reaction-diffusion equation with dynamic boundary conditions*, arXiv preprint arXiv:2411.19760 (2024).
7. BRUNTON, S. L., KUTZ, J. N., *Promising directions of machine learning for partial differential equations*, Nature Computational Science, **4**(7) 483-494 (2024).
8. CAPISTRANO-FILHO, R. de A., CHENTOUF, B., de Sousa, L. S., GONZALEZ MARTINEZ, V. H., *Two stability results for the Kawahara equation with a time-delayed boundary control*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, **74**(1) 16 (2023).
9. CAPISTRANO-FILHO, R. de A., DA SILVA, J. S., *Boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation: The Neumann case*, arXiv preprint arXiv:2310.04977 (2023).
10. CARVALHO, P. P., *Some numerical results for control of 3D heat equations using Nash equilibrium*, Comp. Appl. Math, **40** 92 (2021).
11. CARVALHO, P. P.; DE JESUS, I. P.; DE SÁ NETO, O. P., *On the computation of hierarchical control results for one-dimensional transmission line.*, Mathematica Applicanda, **v. 50**(1) (2022).
12. CARVALHO, P. P., FERNÁNDEZ-CARA, E., *Numerical Stackelberg–Nash Control for the Heat Equation*, SIAM Journal on Scientific Computing, **42**(5) A2678-A2700 (2020).

13. CARVALHO, P. P.; FERNÁNDEZ-CARA, E., *On the computation of Nash and Pareto equilibria for some bi-objective control problems*, Journal of Scientific Computing, **78** 246-273 (2018).
14. CARVALHO, P.P, FERNÁNDEZ-CARA, E., LÍMACO, J., *On the computation of Nash and Pareto equilibria for some bi-objective control problems for the wave equation*, Adv Comput Math, **46** 73 (2020).
15. CARVALHO, P. P., LÍMACO, J., MENEZES, D., THAMSTEN, Y., *Local null controllability of a class of non-Newtonian incompressible viscous fluids*. Evolution Equations and Control Theory, **11**(4) 1251-1283 (2022).
16. CAVALCANTI, M. and DOMINGOS CAVALCANTI, V., ROSIER, C. and ROSIER, L., *Numerical control of a semi-linear wave equation on an interval*, In: Auriol, J., Deutscher, J., Mazanti, G., Valmorbidia, G. (eds.) Advances in Distributed Parameter Systems, pp. 69–89. Springer, Cham, 2022.
17. DE JESUS, I. P., *Hierarchic control for the one-dimensional wave equation in domains with moving boundary*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, **32** 377-388 (2016).
18. DE JESUS, I. P., LÍMACO, J., CLARK, M. R., *Hierarchical control for the one-dimensional plate equation with a moving boundary*, Journal of Dynamical and Control Systems, **24** 635-655 (2018).
19. DJOMEGNE, L., *Hierarchic control for a nonlinear parabolic equation in an unbounded domain*, Applicable Analysis **104**(4) 1-34 (2021).
20. DJOMEGNE, L., KENNE, C., *Hierarchical exact controllability of a parabolic equation with boundary controls*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **542**(2) 128799 (2025).
21. ET-TAHRI, F., CHORFI, S.-E., MANIAR, L., BOUTAAYAMOU, I., *Null controllability of a volume-surface reaction-diffusion equation with dynamic boundary conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **542**(2) 128793 (2025).
22. GONZÁLEZ-BURGOS, M., SOUSA-NETO, G. R., *Boundary controllability of a one-dimensional phase-field system with one control force*, Journal of Differential Equations **269**(5) 4286-4331 (2020).
23. GUO, Y., CAO, X., LIU, B., GAO, M., *Solving partial differential equations using deep learning and physical constraints*, Applied Sciences, **10**(17) 5917 (2020).
24. HECHT, F., *New development in FreeFem++*, Journal of numerical mathematics, **20** 1-14, De Gruyter, (2012).
25. HERNÁNDEZ-SANTAMARIA, V., TERESA, L. de, *Robust Stackelberg controllability for linear and semilinear heat equations*, Evolution Equations and Control Theory, **7**(2) 247-273 (2018).
26. HUAMAN, D. N., CHAVEZ, M. R. N., LÍMACO, J., CARVALHO, P.P., *Local null controllability for the thermistor problem*, Nonlinear Analysis, **236** 113330 (2023).
27. LIONS, J.L., *Contrôle de Pareto de systèmes distribués, Le cas d'évolution*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **302**(11) 413–417 (1986).
28. LIONS, J.L., *Hierarchic Control*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., **104**(4) 295-304 (1994).
29. LIONS, J. L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
30. MORAES, C., RINCON, M., ANTUNES, G., *Numerical Method of the Exact Control for the Elastic String Problem with Moving Boundary*, Bol. Soc. Parana Mat. (2023).
31. NASH, J.F., *Noncooperative games*, Ann. Math., **54** 286–295 (1951).
32. OBLITAS, O. N. R., LÍMACO, J., CARVALHO, P.P., *Nash equilibria for quasi-linear parabolic problems. Computational and Applied Mathematics*, **43**(3) 112 (2024).
33. OUKDACH, O., BOUTAAYAMOU, I., MANIAR, L., *Hierarchical control problem for the heat equation with dynamic boundary conditions*, IMA Journal of Mathematical Control and Information, **41**(2) (2024).
34. PARETO, V., *Cours d'économie politique*, Rouge, Laussane, Switzerland (1896).
35. RAMOS, A. M., *Nash Equilibria Strategies and Equivalent Single-Objective Optimization Problems. The Case of Linear Partial Differential Equations*, Applied Mathematics & Optimization, **87**(2) 30 (2023).
36. STACKELBERG, H. von., *Marktform un Gleichgewicht*, Springer, Berlin, Germany, 1934.

Pitágoras Pinheiro de Carvalho,
 Coordenação de Matemática,
 Universidade Estadual do Piauí - UESPI,
 Teresina-PI, Brasil.
 E-mail address: pitagorascarvalho@gmail.com

and

Gilcenio R. Sousa-Neto,
Departamento de Matemática,
Universidade Federal do Piauí - UFPI,
Teresina-PI, Brasil.
E-mail address: `gilceniorodrigues@ufpi.edu.br`