Bol. Soc. Paran. Mat.
(3s.) **v. 26** 1-2 (2008): 29–40.
©SPM –ISNN-00378712

Determinación de valores de los parámetros en la transformación de Schwarz-Christoffel

Julio C. Ramos Fernández y Jesús Rivas

ABSTRACT: In this paper we give an introduction to the problem of determination of the parameters in the Schwarz-Christoffel transformation, also, a numerical method in MAPLE is developed and implemented to find approximate numerical solutions to this problem.

Key Words: Schwarz-Christoffel transformation, Gauss-Jacobi's quadrature.

Contents

1. Introducción

En 1851, Riemann, en la disertación de su tesis doctoral, enunciaba y daba una prueba del famoso teorema que hoy lleva su nombre y en el que establecía que toda región simplemente conexa G, estrictamente contenida en el plano complejo, podía ser transformada conformemente en el disco unitario abierto del plano complejo $\mathbb{D}$ (ver [9]). La demostración de dicho resultado reposa en un principio minimax junto con la construcción de una familia normal de funciones y de allí se deduce la existencia de dicha transformación. Cabe destacar, que como en la mayoría de los teoremas de existencia, en la demostración de este resultado no se da un método explícito para hallar dicha transformación.

Un caso excepcional ocurre cuando se considera una región simplemente conexa G, cuya frontera sea un polígono P con vértices $z_1, z_2, \cdots, z_n$. En esta situación, H. Schwarz y E. Chistoffel demostraron, independientemente (Schwarz conocía el resultado en 1864 y lo publicó en 1866, Christoffel publicó su resultado en 1867), que la aplicación abierta de Riemann que transforma el disco unitario $\mathbb{D}$ en G, llamada transformación de Schwarz-Christoffel, viene dada por

$$z = g(w) = a + c\int_0^w \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s}{w_k}\right)^{\alpha_k - 1} ds \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30C30, 65E05, 65D32

donde $\alpha_k\pi \in (0, 2\pi)$ son los ángulos exteriores del polígono P, a y c son constantes complejas y los w_k , $k = 0, 1, \cdots, n$ son las preimágenes o prevértices de los z_k que satisfacen $|w_k| = 1$.

Son muchas las aplicaciones de la transformación de Schwarz-Christoffel, en primer lugar, mencionamos que, con un argumento de continuidad, ésta fórmula permite dar una prueba alternativa del Teorema de la Transformación de Riemann (ver [11]) para regiones simplemente conexas G cuya frontera sea una curva de Jordan continua a trozos. En el ámbito de la física, esta transformación ha resultado una herramienta poderosa para analizar fenómenos relacionados con el magnetismo (ver [10]), y con el flujo de un fluido a través de un tubo (ver [4,5]). En matemáticas, la transformación de Schwarz-Christoffel se puede usar para hallar soluciones a la ecuación de Laplace con ciertas condiciones de fronteras (ver [8]) y más recientemente como herramienta en la probabilidad aplicada (ver [14]).

El problema de determinación de parámetros de la transformación de Schwarz-Christoffel (denotado por *Problema S-C*), consiste en, dados los vértices $z_1, z_2, \cdots, z_n$ de un polígono P, hallar los valores de c, $w_1, w_2, \cdots, w_n$, involucrados en la expresión (1). Esto implica resolver un sistema no lineal de n ecuaciones, en el cual las incógnitas se encuentran como límites de integración de una integral de línea de una función compleja. A este problema no se le conoce solución analítica, salvo para polígonos regulares o polígonos cuyo número de vértices no exceda a 3 (como se muestra en las secciones 2 y 3). De aquí la importancia de desarrollar métodos numéricos que permitan encontrar soluciones aproximadas para dicho problema. En este trabajo, se desarrolló e implementó un método numérico para obtener soluciones aproximadas al problema de determinación de parámetros en la fórmula de Schwarz-Christoffel para el caso de polígonos acotados. Usamos como herramienta de programación el software MAPLE 9.5, así como el método de cuadratura de Gauss-Jacobi para aproximar integrales y un método cuasi-Newton para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

2. Polígonos con dos y tres vértices

En esta sección resolveremos analíticamente el *Problema S-C* en el caso que el polígono P tenga dos o tres vértices. Es conocido (ver [9]) que la transformación

$$h(z) = \frac{z - e^{i\alpha}}{z - ae^{i\alpha}},$$

con $Im(a) < 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ aplica biyectivamente el disco unitario $\mathbb{D}$ en el semiplano superior $H^+ = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$; luego, usando la expresión (1) y una composición de funciones es claro que la transformación

$$w = f(z) = A + C \int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n-1} (s - x_k)^{-\beta_k} \, ds, \quad z_0 \in H^+, \tag{2}$$

aplica el semiplano superior H^+ en el polígono P, donde $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \infty$ son los puntos del eje X cuyas imágenes son los vértices del polígono; es decir, $f(x_j) = z_j$, $j = 1, 2, ..., n-1$, $z_n = f(\infty)$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ y $\beta_k \in (-1, 1)$, es el ángulo exterior normalizado del vértice z_k.

Supongamos primero que el polígono P tiene dos vértices, entonces necesariamente uno de sus vértices debe ser el punto infinito, luego por un proceso de traslación y rotación se puede suponer que el otro vértice está en el origen y así, el polígono se puede escribir como

$$P = \{z \in \mathbb{C} : |arg(z)| < \theta\pi\}$$

para algún $\theta \in (0, 1)$ con $\theta \neq 1/2$ (condición necesaria para que haya un vértice en el origen); luego, haciendo $z_0 = \infty$ y $z_1 = 0$, vemos que el ángulo exterior al vértice z_1 viene dado por $\beta\pi$ con $\beta = 2(1 - \theta)$ y por tal motivo, sustituyendo en (2), la transformación que aplica el semiplano superior en el polígono P viene dado por

$$g(w) = C \int_0^w s^{-\beta} ds.$$

Así, seleccionado $C = 1$, $w_0 = \infty$ y $w_1 = 0$ si $\beta < 1$ o $w_0 = 0$ y $w_1 = \infty$ si $\beta > 1$, vemos que $g(z_k) = w_k$, $k = 0, 1$ y el problema queda resuelto en este caso.

Supongamos ahora que el polígono P tiene tres vértices z_0, z_1, z_2 y que ninguno de ellos es infinito, entonces aplicando una traslación, luego una rotación y finalmente una dilatación o contracción, se puede suponer que $z_0 = 0$ y $z_1 = 1$; además, dado que la transformación de Schwarz-Christoffel (del semiplano superior al polígono) mapea el eje real en la frontera de P se puede asumir que la preimagen del vértice z_2 es $w_2 = \infty$; también, otra traslación nos permite suponer que la preimagen del vértice $z_0 = 0$ es $w_0 = 0$; así que solamente nos falta por seleccionar el valor de la preimagen de z_1, el cual se denota por w_1. Con este fin, escogemos $A = 0$, $C = 1$ en la expresión (2) y dado que $h(w_1) = z_1 = 1$ se obtiene

$$\int_0^{w_1} s^{-k_0} (s - w_1)^{-k_1} ds = 1,$$

así, haciendo el cambio de variable $s = w_1 t$, se obtiene

$$(w_1)^{1-k_0-k_1} \int_0^1 t^{-k_0}(t-1)^{-k_1} dt = 1,$$

de donde se puede despejar fácilmente w_1.

El caso de un triángulo P no acotado es similar, se toma $h(\infty) = \infty$, es decir, la preimagen del vértice $z_2 = \infty$ es $w_2 = \infty$; también se hace $w_0 = 0$ y w_1 se determina como antes.

3. Polígonos regulares

Supongamos ahora que los vértices dados se corresponden a un polígono regular con n vértices, entonces haciendo nuevamente un proceso de traslación y luego una rotación se puede suponer que estos vértices se encuentran en la circunferencia con centro en el origen y radio $d > 0$. Así, cada vértice debe tener la forma $z_k = de^{2\pi ik/n}$ donde $k = 1, 2, \cdots, n$ y $z_{n+1} = z_1$. En este caso, se resuelve el problema utilizando la transformación (1) que aplica el disco unitario $\mathbb{D}$ en el polígono P. Luego, haciendo $g(0) = 0$, nos queda

$$g(w) = C \int_0^w \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{s}{w_k}\right)^{\alpha_k - 1} ds;$$

y como los ángulos exteriores a un polígono regular es $\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$ se tiene que $\alpha_k - 1 = -\frac{2}{n}$ para todo $k = 1, 2, \cdots, n$.

Afirmamos que los puntos

$$w_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

resuelve el *Problema S-C* en este caso para alguna constante $C \in \mathbb{C}$.

En efecto, primeramente notamos que la transformación g se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} g(w) &= C \int_0^w \prod_{k=1}^n \left(\frac{w_k - s}{w_k}\right)^{-\frac{2}{n}} ds \\ &= C \left(\prod_{k=1}^n \frac{-1}{w_k}\right)^{-\frac{2}{n}} \int_0^w \prod_{k=1}^n (s - w_k)^{-\frac{2}{n}} ds, \end{aligned}$$

además, de las identidades

$$\left(\prod_{k=1}^n \frac{-1}{w_k}\right)^{-\frac{2}{n}} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{k}{n^2}4\pi i} = e^{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}4\pi i} = e^{\frac{n+1}{n}2\pi i} = e^{\frac{1}{n}2\pi i} = w_1,$$

y del hecho que

$$\prod_{k=1}^{n}(s-w_k)=\prod_{k=1}^{n}\left(s-e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)=s^n-1,$$

pues los w_k son las raíces n-ésima de la unidad; se tiene que la transformación g se puede escribir en la forma

$$g(w)=Cw_1\int_0^w (s^n-1)^{-\frac{2}{n}}\,ds.$$

Así, evaluando en w_k se obtiene

$$\begin{aligned} g(w_k) &= Cw_1\int_0^{w_k}(s^n-1)^{-\frac{2}{n}}\,ds \\ &= Cw_1w_k\int_0^1 (w_k^n t^n-1)^{-\frac{2}{n}}\,ds \\ &= Cw_1w_k\int_0^1 (t^n-1)^{-\frac{2}{n}}\,ds, \end{aligned}$$

donde se ha realizado el cambio de variable $s=w_kt$ en la segunda igualdad y hemos usado el hecho que $(w_k)^n=1$ en la última igualdad. Por tanto, seleccionando C tal que

$$Cw_1\int_0^1 (t^n-1)^{-\frac{2}{n}}\,ds=d>0,$$

se obtiene que $g(w_k)=z_k$ y el *Problema S-C* queda resuelto en este caso.

4. Método numérico

En esta sección proponemos un algoritmo y un código MAPLE para hallar soluciones aproximadas del *Problema S-C*. Con este fin, supongamos que tenemos un polígono acotado P cuyos vértices son $z_1,z_2,\cdots,z_n$, recorridos en sentido positivo; es decir, en sentido contrario a las agujas del reloj. Primeramente, notamos que los valores de los ángulos exteriores a cada vértice se pueden hallar usando cálculo elemental de pendientes de rectas. Además, si denotamos por w_k las preimágenes de los vértices z_k, entonces, usando la transformación (1) que aplica el disco unitario $\mathbb{D}$ en el polígono P se tiene el sistema de ecuaciones

$$z_j=a+c\int_0^{w_k}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{s}{w_k}\right)^{\alpha_k-1}ds,\quad j=1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

donde a es un punto en el interior del polígono P.

Nuestro objetivo es hallar un sistema de ecuaciones de incógnitas reales equivalente a (3). Con este fin, vemos que de la definición de integral de línea se desprende que

$$z_i-z_j=c\int_{w_j}^{w_i}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{s}{w_k}\right)^{\alpha_k-1}ds,$$

donde $i \neq j$. Así, haciendo la parametrización $s(t) = (1-t)\frac{w_j}{2} + (1+t)\frac{w_i}{2}$, $-1 \leq t \leq 1$, se obtiene el sistema equivalente

$$z_i - z_j = \frac{c\,(w_i - w_j)}{2^{\alpha_i+\alpha_j-1}} \left(1 - \frac{w_j}{w_i}\right)^{\alpha_i - 1} \left(1 - \frac{w_i}{w_j}\right)^{\alpha_j - 1} \int_{-1}^{1} P_{i,j}(t,w)(1-t)^{\alpha_i-1}(1+t)^{\alpha_j-1}dt,$$

donde

$$P_{i,j}(t,w) = \prod_{k=1, k\neq i,j}^{n} \left(1 - \frac{1-t}{2}\frac{w_j}{w_k} - \frac{1+t}{2}\frac{w_i}{w_k}\right)^{\alpha_k - 1}. \tag{4}$$

Esto implica que para cada lado del polígono se cumple

$$|z_{j+1} - z_j|^2 = \frac{|c|^2}{2^{2(\alpha_{j+1}+\alpha_j-1)}} \left|1 - \frac{w_{j+1}}{w_j}\right|^{2(\alpha_{j+1}+\alpha_j-1)} \left|\int_{-1}^{1} P_j(t,w)(1-t)^{\alpha_{j+1}-1}(1+t)^{\alpha_j-1}dt\right|^2,$$

donde $P_j = P_{j+1,j}$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$, $z_{n+1} = z_1$, $\alpha_{n+1} = \alpha_1$ y hemos usado que $|w_j| = 1$. Para $j = n$ tenemos la ecuación

$$|z_1 - z_n|^2 = \frac{|c|^2}{2^{2(\alpha_1+\alpha_n-1)}} \left|1 - \frac{w_1}{w_n}\right|^{2(\alpha_1+\alpha_n-1)} \left|\int_{-1}^{1} P_{1,n}(t,w)(1-t)^{\alpha_1-1}(1+t)^{\alpha_n-1}dt\right|^2.$$

Finalmente, dado que $|w_j| = 1$ para todo $j = 1, \cdots, n$ se puede hacer el cambio

$$w_j = e^{i\theta_j}.$$

Así, seleccionando (por una rotación) $w_1 = 1$, se obtiene un sistema de n ecuaciones reales con n incógnitas reales de la forma

$$F_j\left(C, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n\right) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

donde $C := |c|^2$ y

$$F_j\left(C, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n\right) = |z_{j+1} - z_j|^2 - \frac{C}{2^{(\alpha_{j+1}+\alpha_j-1)}}\left(1 - \cos\left(\theta_{j+1} - \theta_j\right)\right)^{(\alpha_{j+1}+\alpha_j-1)} \left|f_j\left(\theta\right)\right|^2.$$

Aquí

$$f_j(\theta) = \int_{-1}^{1} \prod_{k=1, k\neq j, j+1}^{n} \left(1 - \frac{1-t}{2} e^{i(\theta_j - \theta_k)} - \frac{1+t}{2} e^{i(\theta_{j+1}-\theta_k)}\right)^{\alpha_k - 1} (1-t)^{\alpha_{j+1}-1}(1+t)^{\alpha_j-1}dt$$

cuando $j = 1, 2, \cdots, n-1$; mientras que

$$f_n(\theta) = \int_{-1}^{1} \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 - \frac{1-t}{2} e^{i(\theta_n - \theta_k)} - \frac{1+t}{2} e^{i(\theta_1-\theta_k)}\right)^{\alpha_k - 1} (1-t)^{\alpha_1-1}(1+t)^{\alpha_n-1}dt;$$

también hay que recordar que para $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene $e^{i\alpha} = cos(\alpha) + isen(\alpha)$.

El algoritmo que se propone es el siguiente:

Algoritmo 1. Solución numérica del *Problema S-C*

ENTRADA:	Vértices $z_1, z_2, \cdots, z_n$ de un polígono acotado, recorrido en sentido positivo.
SALIDA:	Pre-vértices $w_1, w_2, \cdots, w_n \in \mathbb{D}$ y parámetro $C = \lvert c\rvert^2$.
PASO 1.	Se calculan los ángulos exteriores normalizados $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.
PASO 2.	Para $j = 1, 2 \cdots, n$ se calcula una aproximación de la función $f_j(\theta)$ usando un método de cuadratura.
PASO 3.	Se halla una solución aproximada del sistema $F_j(C, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n) = 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$ usando un método de resolución de sistema no lineal.
PASO 4.	Se escribe la solución aproximada.

FIN.

Es necesario un comentario sobre cada uno de los pasos del algoritmo anterior. En primer lugar, notamos que para el cálculo de los ángulos exteriores del polígono se usa la fórmula explícita que relaciona las pendientes de cada segmento que une cada vértice,

$$\tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

La presencia del peso $w(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $-1 < t < 1$, $\alpha, \beta > -1$ en la integral que define la función $f_j(\theta)$ nos invita a utilizar una fórmula de cuadratura de Gauss-Jacobi las cuales se basan en los polinomios ortogonales de Jacobi definidos por

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\frac{d^n}{dt^n}\left\{(1-t)^{\alpha+n}(1+t)^{\beta+n}\right\}.$$

Estos polinomios se pueden obtener mediante el comando **JacobiP**(n, α, β, t) del programa MAPLE; además, con las oportunas modificaciones del Teorema 4.7 del texto [3] se obtiene el siguiente resultado:

Theorem 4.1. *Sean $\alpha, \beta > -1$ y supongamos que $t_1, t_2, \cdots, t_n$ son las raíces del polinomio de Jacobi $p_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ de grado n. Si $Q(t)$ es un polinomio cualquiera de un grado menor que $2n$, entonces*

$$\int_{-1}^{1} Q(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt = \sum_{k=1}^{n} c_k Q(t_k),$$

donde los coeficientes c_k están dado por

$$c_k = \int_{-1}^{1}\left(\prod_{j=1, j\neq k}^{n}\frac{t-t_j}{t_k-t_j}\right)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Las raíces aproximadas del polinomio de Jacobi de grado n se puede obtener con el comando **fsolve(E)** del MAPLE, donde E es la expresión algebraica del polinomio de Jacobi. Los coeficientes c_k lo podemos calcular (aproximadamente) usando el comando

> **ck:=int(PROD_k(t)*(1-t)**α*(1+t)**β,t=-1..1);**

donde

$$PROD\_k(t) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{t - t_j}{t_k - t_j}.$$

Para evaluar el producto en la integral que define a la función f_j utilizamos el siguiente procedimiento MAPLE:

```
> Prodt1:= proc (t,j)
   local k;
   if j=NVertices then j_aux:=1 else j_aux:=j+1;end if;
   Prodt1:=1;
   for k from 1 to NVertices do
     if(k<>j)and(k<>j_aux) then
      Prodt1:=Prodt1*(simplify(evalf(1-(1-t)/2*(cos(theta[j]-theta[k])+I*sin(theta[j]-
theta[k]))
     -(1+t)/2*cos(theta[j+1]-theta[k])+I*sin(theta[j+1]-theta[k]))**(alpha[k]-1)));
     end if;   end do;
  Prodt1;
end proc;
```

donde **NVertices** denota el número de vértice del polígono P, **alpha[k]** son los ángulos exteriores (normalizados) del polígono, **theta[k]** ($k = 2, 3, \cdots, NVertices$) son las variables de la función f_j e **I** denota la unidad imaginaria de los números complejos. Así, las funciones f_j en el sistema la podemos aproximar usando el siguiente procedimiento

```
> # CÁLCULO DE LA INTEGRAL (fj) EN EL SISTEMA #
> fj:=proc(j)
   fj:=0;
   for k from 1 to grado do
     fj:=fj+c(j,k)*Prodt1(Raiz(j)[k],j);
   end do; fj;
end proc;
```

aquí **grado** es el grado del polinomio de Jacobi que se usará en la fórmula de cuadratura de Gauss-Jacobi, **c(j,k)** denota el k-ésimo coeficiente c_k y **Raiz(j)[k]** es la k-ésima raíz del polinomio de Jacobi que se usarán para aproximar las integrales f_j, $j = 1, 2, \cdots, NVertices$. Los procedimientos que hemos usado para calcular estos valores son:

```
> #CÁLCULO DE LAS RAÍCES DE LOS POLINOMIOS DE JACOBI#
> Raiz:=proc (j)
  local P, R;
```

```
  P:=x->expand(JacobiP(grado,alpha[j+1]-1,alpha[j]-1,x));
  R:=expand(P(x)); Raiz:=[fsolve(R=0,x)];
end proc;
```

```
> # PRODUCTO EN LA INTEGRAL DE LOS COEFICIENTES EN LA CUADRATURA
DE JACOBI #
> Producto:= proc(y,k,i)
 local l;
  Producto:=(1-y)**(alpha[k+1]-1)*(1+y)**(alpha[k]-1);
  for l from 1 to grado do if (l<>i) then
    Producto:=Producto*(y-Raiz(k)[l])/(Raiz(k)[i]-Raiz(k)[l]);
  end if; end do;
  Producto;
end proc;
```

```
> # CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES Ci EN LA CUADRATURA DE JA-
COBI #
> c:= proc(j,i);
  c:=evalf(int(Producto(t,j,i),t=-1..1));
end proc;
```

El módulo de un número complejo $z = x + iy$ se puede calcular en MAPLE usando el comando **abs(z)**; sin embargo, debido a que no se conoce los valores de las funciones $f_j(\theta)$, no podemos usar este comando para calcular $|f_j(\theta)|$ en la ecuación $F_j(C, \theta_2, \cdots, \theta_n) = 0$; en este caso, usamos el hecho que $|z|^2 = z\overline{z}$, donde $\overline{z}$ denota el conjugado del número complejo z y las ecuaciones en el sistema las podemos obtener usando el procedimiento

```
> # ECUACIONES EN EL SISTEMA #
> for k from 1 to NVertices do
    Inte_Aux:=fj(k);
    F[k]:=evalf(abs(z[k+1]-(z[k]))**2)- C/(evalf(2**(alpha[k+1]+alpha[k]-1))) *
  (1-cos(theta[k+1]-theta[k]))**(alpha[k+1]+alpha[k]-1)*
    Inte_Aux*evalc(conjugate(Inte_Aux));
end do:
```

Aquí hemos usado una variable auxiliar **Inte_Aux** para evitar el uso del procedimiento **fj(k)** dos veces.

Finalmente, para hallar las aproximaciones del sistema de ecuaciones no lineal

$$F_j(C, \theta_2, \cdots, \theta_n) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

usamos un método cuasi-Newton (ver [2]), como por ejemplo, el método de Broyden (ver [3]). En vista que en la evaluación de la función $F[j]$ aparece una parte imaginaria casi nula se recomienda usar el comando **Re(z)** del MAPLE para obtener su parte real; por ejemplo, el siguiente procedimiento evalúa la función $T = (F_1, F_2, \cdots, F_5)$ en el punto (a, b, c, d, e)

```
> T:=proc(a,b,c,d,e)
global C,theta;
  C:=a; theta[2]:=b; theta[3]:=c;theta[4]:=d; theta[5]:=e;
  T:=≪evalf(Re(F[1])),evalf(Re(F[2])),evalf(Re(F[3])), evalf(Re(F[4])),evalf(Re(F[5]))≫;
end proc;
```

Los resultados que se obtuvieron del código MAPLE para el caso de un polígono regular con 5 lados (pentágono), usando los polinomios de Jacobi de grado 5 y el método de Broyden (ver [3]) con una tolerancia de 10^{-7} para resolver el sistema de ecuaciones no lineal fueron:

```
># VÉRTICES DEL POLÍGONO #
> z[1]:=3;z[2]:=3*exp(2*Pi*I*1/5);z[3]:=3*exp(2*Pi*I*2/5);
z[4]:=3*exp(2*Pi*I*3/5); z[5]:=3*exp(2*Pi*I*4/5);z[6]:=z[1];
```

```
># ÁNGULOS EXTERIORES NORMALIZADOS #
> alpha[1]:=3/5;alpha[2]:=3/5;alpha[3]:=3/5; alpha[4]:=3/5;alpha[5]:=3/5;alpha[6]:=3/5;
```

NVertices	Valor-Inicial	θ_n-Final	C y w_k-aprox
	C=5		C=5.550408973
	$\theta_2 = 1$	$\theta_2 = 1.256637059$	$0.3090169948 + 0.9510565162I$
5	$\theta_3 = 2$	$\theta_3 = 5.550408973$	$-0.8090169933 + 0.5877852538I$
	$\theta_4 = 3$	$\theta_4 = 3.769911184$	$-0.8090169933 - 0.5877852538I$
	$\theta_5 = 5$	$\theta_5 = 5.0266548244$	$0.3090169948 - 0.9510565162I$

Tabla 1. Solución numérica del *Problema S-C* para polígonos con 5 vértices

La solución para este caso (ver tercera sección) viene dada por

$$w_k = e^{2\pi i \frac{k}{5}}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5;$$

es decir,

$$\begin{aligned}
&w_1 = 1,\\
&w_2 \approx 0.3090169938 + 0.9510565165I,\\
&w_3 \approx -0.8090169944 + 0.5877852522I,\\
&w_4 \approx -0.8090169944 - 0.5877852522I,\\
&w_5 \approx 0.3090169938 - 0.9510565165I,
\end{aligned}$$

lo cual se puede notar que se corresponden con los valores obtenidos por nuestro método. Aquí el método de Broyden necesitó de 15 iteraciones.

La siguiente tabla muestra los resultados que se obtienen con el Algoritmo 1 cuando usamos un polígono regular de 10 vértices (con vértices $z_k = 3e^{2\pi i \frac{k}{10}}$, $k = 1, 2, ..., 10$) usando el polinomio de Jacobi de grado 5 y el método de Broyden con una tolerancia de 10^{-4}

NVertices	Valor-Inicial	θ_n-Final	C y w_k-aprox
	C=3	$\theta_1 = 0$	C=5.243100044
	$\theta_2 = 0.5$	$\theta_2 = 0.6283535684$	$0.8089963992 + 0.5878135980I$
	$\theta_3 = 1.2$	$\theta_3 = 1.256657424$	$0.3089976284 + 0.9510628085I$
	$\theta_4 = 2$	$\theta_4 = 1.884966355$	$-0.3090272304 + 0.9510531903I$
	$\theta_5 = 2.7$	$\theta_5 = 2.513317326$	$-0.8090423878 + 0.5877502997I$
10	$\theta_6 = 3.5$	$\theta_6 = 3.141639922$	$-0.9999999989 - 0.0000472684I$
	$\theta_7 = 4.2$	$\theta_7 = 3.769975888$	$-0.8089789608 - 0.5878375974I$
	$\theta_8 = 5$	$\theta_8 = 4.398183716$	$-0.3090607417 - 0.9510423008I$
	$\theta_9 = 5.5$	$\theta_9 = 5.026509445$	$-0.3089800924 - 0.9510685057I$
	$\theta_{10} = 6$	$\theta_{10} = 5.656023726$	$0.8096964907 - 0.5868488673I$

Tabla 2. Solución numérica del *Problema S-C* para polígonos con 10 vértices

Comentarios finales. Debido a que los vértices del polígono P están dados en sentido positivo, debemos tener presente que los valores iniciales deben cumplir las condiciones $C > 0$ y $0 = \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < 2\pi$. Claramente el Algoritmo 1 será más eficiente en la medida que se use un mejor método de cuadratura para el PASO 2 y un método más eficiente para resolver el sistema de ecuaciones no lineales del PASO 3. Finalmente queremos dar conocimiento que existen dos códigos eficientes que permiten calcular la transformación de Schwarz-Christoffel que mapea un polígono P en el disco unitario $\mathbb{D}$, el primero de ellos es un programa en FORTRAN el cual se conoce como SCPACK, se debe a L. N. Trefethen (ver [12]) y se puede encontrar en la referencia [13]. El segundo código conocido como "MATLAB SC Toolbox" se debe a T. A. Driscoll (ver [7]) y provee un programa en MATLAB que permite la creación y visualización de transformaciones conformes de regiones acotadas por polígonos. Recientemente L. Banjai y L. N. Trefethen (ver [1]) han implementado un nuevo método (usando FMM =fast multipole method) que permiten calcular la transformación de Schwarz-Chistoffel para polígonos con más de diez mil vértices.

References

1. L. Banjai and L. N. Trefethen: A multipole method for Schwarz-Christoffel mapping of polygons with thousands of sides, *SIAMJ. Sci. Comput.* **25** (2003), 1042-1065.

2. E. Birgin, N. Krejic y J. Martinez: Globally convergent inexact quasi-Newton methods for solving nonlinear systems, *Numeric algorithms*, **32** (2003), 249-260.

3. R. Burden y J. Faires: *Análisis Numérico.* Sexta edición. Internacional Thomson Editores. Mexico. 1998.

4. J. M. Chuang: Numerical studies on non-linear free surface flow using generalized Schwarz-Christoffel transformation, *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, **32**, (2000), 745-772.

5. C. Collins, T. Driscoll, K. Stephenson: Curvature flow in conformal mapping, *Comput. Methods Funct. Theory*, **3**, (2003), 325-347.

6. J. B. Conway: Functions of One Complex Variable, *Springer-Verlag*, New-York, (1978)

7. T. Driscoll: Algorithm 843: improvements to the Schwarz-Christoffel toolbox for MATLAB, *ACM Trans. Math. Software*, **31** (2005), 239-251.

8. T. Driscoll, L. Trefethen: *Schwarz-Christoffel mapping*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

9. E. Hille: *Analitic function theory*, Editorial Board. USA. 1962.

10. M. Marković, M. Jufer, Y. Perriard: A square magnetic circuit analysis using Schwarz-Christoffel mapping, *Math. Comput. Simulation*, **71**, (2006), 460-465.

11. H. P. McKean: A quick proof of Riemann's mapping theorem, *Comm. Pure Appl. Math.* **52** (1999), no 3, 405-409.

12. L. N. Trefethen: Numerical computation of the Schwarz-Christoffel transformation, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **1** (1980), 82-102.

13. L. N. Trefethen: *SCPACK User's Guide*, MIT Numerical Analysis Report 89-2, MIT, Cambridge, MA, 1989.

14. Y. Swan, F. Brus: The Schwarz-Christoffel transformation as a tool in applied probability, *Math. Sci.* **29** (2004), no 1, 21-32.

Julio C. Ramos Fernández y Jesús Rivas
Departamento de Matemática, Universidad de Oriente
6101 Cumaná, Edo. Sucre, Venezzuela
e-mails: julio.ramos.fernandez@gmail.com,
jesus_rivas2076@hotmail.com