Bol. Soc. Paran. Mat.
Essays (3s.) **v. 24** 1-2 (2006): 99–106.

Funções trigonométricas definidas sobre corpos reais fechados

Luciano Panek e Osvaldo Germano do Rocio

ABSTRACT: Nestas notas abordaremos questões relacionadas a funções trigonométricas definidas sobre corpos reais fechados K. As noções introduzidas e contas efetuadas no corpo algebricamente fechado $K[\sqrt{-1}]$ permitem a generalização de identidades trigonométricas clássicas.

Contents

1. Introdução

No estudo elementar de funções trigonométricas, sobre o corpo dos números reais, tradicionalmente se define ângulo como sendo a união de duas semi-retas com mesma origem e a todo ângulo se associa um número real, denominado de medida do ângulo, o qual pode ser positivo ou negativo, dependendo da orientação do ângulo. Estabelecido o conceito de medida de ângulos, as funções trigonométricas seno e cosseno são então formalizadas como sendo funções cujos domínios e contradomínios são o corpo dos números reais e, para números reais θ, θ_1, θ_2, são bem conhecidas as seguintes identidades:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \tag{1}$$

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \pm \sin\theta_2 \cos\theta_1, \tag{2}$$

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \mp \sin\theta_1 \sin\theta_2, \tag{3}$$

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 2\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right), \tag{4}$$

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = -2\left(\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right), \tag{5}$$

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\left(\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right), \tag{6}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 12J17, 12J25
Date submission 02-Nov-2005.

$$\sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 2\left(\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right), \tag{7}$$

$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta,\ \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta, \tag{8}$$

$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta,\ \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta, \tag{9}$$

$$\sin(2\pi-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(2\pi-\theta) = \cos\theta, \tag{10}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta. \tag{11}$$

Ao se tentar generalizar os conceitos de funções trigonométrica para outros corpos surge uma primeira dificuldade na definição de medida de ângulos e outra na manutenção do mesmo corpo como contradomínio. O objetivo deste artigo de divulgação é o de considerar a classe dos corpos reais fechados, classe para a qual é possível generalizar as funções trigonométricas tradicionais. As identidades trigonométricas acima mencionadas serão demonstradas no contexto geral e, no caso real, estas serão um caso particular do caso geral.

2. Corpos Reais Fechados

Para o conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais vale a seguinte propriedade algébrica: se $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ e

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$$

então $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Baseado nesta observação Artin e Schreier introduziram o conceito de corpos formalmente reais: um corpo K é dito *formalmente real* se a identidade $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ for verdadeira para elementos $x_i \in K$ se, e somente se, $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Equivalentemente, um corpo K é formalmente real se, e somente se, existe um subconjunto $P \subset K$, com $0 \notin P$, tal que $P + P \subset P$, $P \cdot P \subset P$ e $K \backslash \{0\} = P \cup -P$. Um subconjunto P de um corpo K possuindo estas propriedades é denomindado de *cone positivo* de K.

Um cone positivo P de um corpo K define uma relação de ordem em K: se $x, y \in K$ então $x < y$ se, e somente se, $y - x \in P$. Não é difícil verificar que esta relação de ordem satisfaz as seguinte propriedades:

(a) Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;

(b) Se $x, y \in K$ então ou $x = y$, ou $x < y$, ou $x > y$;

(c) Se $x < y$ então $x + z < y + z$ para todo $z \in K$;

(d) Se $x < y$ e $z > 0$ então $xz < yz$. Se $z < 0$ então $xz > yz$.

Na literatura um corpo munido de uma relação de ordem satisfazendo as propriedeades (a) a (d) é denominado de *corpo ordenado*. Cabe observar que se $<$ é uma relação de ordem, compatível com as operações do corpo K, então o conjunto $P = \{x \in K : x > 0\}$ é um cone positivo para K.

Um corpo ordenado K é chamado de *corpo real fechado* se ele for maximal algébrico com esta propriedade. Isto significa que K é real fechado se K for ordenado e se $L \mid K$ for uma extensão algébrica com L ordenado e a ordem de K for a restrição da ordem de L então $L = K$. Todo corpo ordenado admite uma extensão algébrica ordenada maximal, a qual é denominada de *fecho real*.

Para maiores detalhes sobre a teoria de corpos ordenados nos reportamos tanto a [RI] como a [JA]. Conforme se encontram nestas referências são válidas as seguintes propriedades, que utilizaremos na próxima seção:

(a) Se K é um corpo real fechado então K admite uma única ordem e o subconjunto $K^2 \backslash \{0\} = \{x^2 : x \in K \text{ e } x \neq 0\}$ de K é um cone positivo para a única ordem de K;

(b) Todo corpo ordenado possui um fecho real;

(c) Um corpo ordenado K é real fechado se, e somente se, K for um corpo ordenado e o corpo $K[i] = \{a+bi : a, b \in K\}$, com $i = \sqrt{-1}$, é algébricamente fechado.

Por exemplo: o corpo $\mathbf{Q}$ dos números racionais é um corpo ordendado, $\overline{\mathbf{Q}} = \{x \in \mathbf{R} : x \text{ é algébrico sobre } \mathbf{Q}\}$ é o fecho real de $\mathbf{Q}$ e $\overline{\mathbf{Q}}[i]$ é algébricamente fechado. O corpo $\mathbf{R}$ dos números reais é o mais conhecido corpo real fechado. Um exemplo menos conhecido é considerar a ordem lexicográfica (ou anti-lexicográfica) no anel de polinômios $\mathbf{R}[X]$, onde X é uma indeterminada sobre $\mathbf{R}$, extender esta ordem para o corpo de frações racionais $\mathbf{R}(X)$ de $\mathbf{R}[X]$ e então considerar o fecho real de $\mathbf{R}(X)$.

3. Funções Trigonométricas sobre corpos reais fechados

Embora o conceito de ângulos, visto como a união de duas semi-retas de mesma origem, possa ser estendido do corpo $\mathbf{R}$ dos números reais a qualquer corpo isto não ocorre com o conceito de medida de ângulos. Esta dificuldade surge devido a inexistência do conceito de comprimento de arcos para corpos em geral e mesmo para corpos reais fechados. No entanto é perfeitamente possível definir funções trigonométricas sobre corpos reais fechados deixando de se considerar a noção de medida de ângulos. Este é o objetivo desta seção.

Seja $(K, <)$ um corpo real fechado. Se α é um elemento não nulo do produto $K \times K$ definimos a *semi-reta* passando pelo ponto α como sendo o conjunto $[\alpha] = \{k\alpha : k > 0\}$. Denotemos por $F(K)$ o conjunto de todas estas semi-retas.

Definition 3.1 *Os elementos de $F(K)$ são denominados de ângulos sobre o corpo K.*

Como K é um corpo real fechado, todo elemento positivo de K é um quadrado, e como a soma de elementos positivos é positivo, faz sentido falar em $\sqrt{x^2 + y^2}$ para todos $x, y \in K$. Notemos ainda que se $\alpha = (x, y)$ é um elemento não nulo de $K \times K$ e se $k \in K$, $k > 0$, então

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{kx}{\sqrt{(kx)^2+(ky)^2}} \quad \text{e} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{ky}{\sqrt{(kx)^2+(ky)^2}}.$$

Definition 3.2 *Se* $[\alpha] \in F(K)$ *é um ângulo sobre o corpo* K *e* (x, y) *é um representante de* $[\alpha]$*, o cosseno de* $[\alpha]$ *e o seno de* $[\alpha]$*, denotados respectivamente por* $\cos([\alpha])$ *e* $\sin([\alpha])$*, são definidos respectivamente por*:

$$\cos([\alpha]) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad e \quad \sin([\alpha]) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Note que estas definições independem de representantes do ângulo $[\alpha]$, que o domínio de ambas é o conjunto de ângulos e que a imagem é o intervalo $[-1, 1] = \{k \in K : -1 \leq k \leq 1\}$.

Antes de analisarmos as identidades trigonométrica precisamos definir soma de ângulos.

Para motivar esta definição relembremos o seguinte fato elementar da análise complexa (ver [CO]): se $z, w \in \mathbf{C} = \mathbf{R}[\sqrt{-1}]$, então

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$w = |w| (\cos \theta' + i \sin \theta')$$

e

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| (\cos (\theta + \theta') + i \sin (\theta + \theta')),$$

sendo $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ e θ, θ' as medidas dos ângulos que z, w fazem respectivamente com o eixo das abscissas.

Nada mais natural definir então a soma $[\alpha] + [\beta]$ da seguinte maneira: dados dois ângulos $[\alpha]$ e $[\beta]$ e escolhidos respectivos representantes $\alpha = (u, v)$ e $\beta = (x, y)$ definimos

$$[\alpha] + [\beta] = [(u, v)] + [(x, y)] = [(ux - vy, vx + uy)]$$

Notemos que esta definição independe dos representantes dos ângulos e que, esta operação nada mais é do que a multiplicação complexa.

Passamos agora a investigar como ficam as relações $(1)-(11)$ no caso das funções seno e cosseno introduzidas segundo a definição 3.2.

Proposition 3.1 *Sejam* $[\alpha], [\beta] \in F(K)$*. Então*:

(*i*) $\cos([\alpha] + [\beta]) = \cos([\alpha]) \cdot \cos([\beta]) - \sin([\alpha]) \sin([\beta])$;

(*ii*) $\sin([\alpha] + [\beta]) = \sin([\alpha]) \cdot \cos([\beta]) + \cos([\alpha]) \sin([\beta])$.

Proof: Sejam (u, v) e (x, y) representantes de $[\alpha]$ e $[\beta]$ respectivamente. Então

$$\cos([\alpha]) \cdot \cos([\beta]) - \sin([\alpha]) \sin([\beta]) = \frac{ux}{\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{vy}{\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{ux - vy}{\sqrt{(ux - vy)^2 + (vx + uy)^2}} = \cos([\alpha] + [\beta])$$

e

$$\sin([\alpha])\cdot\cos([\beta])+\cos([\alpha])\sin([\beta])=\frac{vx}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{uy}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{vx+uy}{\sqrt{(ux-vy)^2+(vx+uy)^2}}=\sin([\alpha]+[\beta]),$$

como queríamos. □

Vejamos agora como devemos interpretar a diferença de medidas de ângulos das identidades (1) − (11) no caso de um corpo real fechado. Se $[\alpha]$ é um ângulo sobre um corpo real fechado K, definimos a *semi-reta simétrica* à $[\alpha]$ como sendo o conjunto $-[\alpha]=\{(x,-y):(x,y)\in[\alpha]\}$. Note agora que $-[\alpha]$ é um ângulo sobre K, ou seja, $-[\alpha]\in F(K)$. Também note que $[\alpha]-[\alpha]=[\alpha]+(-[\alpha])=[(1,0)]$. O ângulo $-[\alpha]$ será chamado de *ângulo simétrico à* $[\alpha]$.

Interpretamos então a diferença de medidas de ângulos do caso real em um corpo real fechado arbitrário como sendo a soma de um ângulo por um ângulo simétrico.

Proposition 3.2 *Sejam* $[\alpha],[\beta]\in F(K)$. *Então*:

(i) $\cos([\alpha]-[\beta])=\cos([\alpha])\cdot\cos([\beta])+\sin([\alpha])\sin([\beta])$;

(ii) $\sin([\alpha]-[\beta])=\sin([\alpha])\cdot\cos([\beta])-\cos([\alpha])\sin([\beta])$.

Proof: Sejam (u,v) e (x,y) respectivamente representantes dos ângulos $[\alpha]$ e $[\beta]$. Da definição 3.2 segue que

$$\cos([\alpha])\cdot\cos([\beta])+\sin([\alpha])\sin([\beta])=\frac{ux}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{vy}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{ux-v(-y)}{\sqrt{(ux-v(-y))^2+(vx+u(-y))^2}}=\cos([\alpha]-[\beta])$$

e

$$\sin([\alpha])\cdot\cos([\beta])-\cos([\alpha])\sin([\beta])=\frac{vx}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{uy}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{vx+u(-y)}{\sqrt{(ux-v(-y))^2+(vx+u(-y))^2}}=\sin([\alpha]-[\beta]).$$

□

Como consequência das proposições 3.1 e 3.2 temos as seguintes identidades, que restritas ao corpo dos números reais coincidem com as identidades de (8) a (11):

Corollary 3.0A *Sejam* $[\alpha], [\beta] \in F(K)$. *Então*:

(*i*) $\sin([(-1,0)] - [\alpha]) = \sin([\alpha])$ *e* $\cos([(-1,0)] - [\alpha]) = -\cos([\alpha])$;

(*ii*) $\sin([(-1,0)] + [\alpha]) = -\sin([\alpha])$ *e* $\cos([(-1,0)] + [\alpha]) = -\cos([\alpha])$;

(*iii*) $\sin([(1,0)] - [\alpha]) = -\sin([\alpha])$ *e* $\cos([(1,0)] - [\alpha]) = \cos([\alpha])$;

(*iv*) $\sin([(0,1)] - [\alpha]) = \cos([\alpha])$ *e* $\cos([(0,1)] - [\alpha]) = \sin([\alpha])$.

Poderíamos, neste momento questionar se as funções da definição 3.2 são periódicas em algum sentido, além da situação trivial

$$\sin([\alpha] + [(1,0)]) = \sin([\alpha]) \text{ e } \cos([\alpha] + [(1,0)]) = \cos([\alpha]),$$

que corresponderia no caso clássico as identidades $\sin(\theta + 0) = \sin\theta$, $\cos(\theta + 0) = \cos\theta$.

Para compreendermos as identidade $(4), (5), (6)$ e (7) no contexto de corpos reais fechados devemos compreender o que é um ângulo de medida $\dfrac{\theta}{2}$ do caso real em $F(K)$. Sabemos que no caso real valem as relações

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \tag{12}$$

e

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta. \tag{13}$$

De (12) temos que $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}$, daí

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}. \tag{14}$$

Intercalando (13) com (14) tem-se

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}}. \tag{15}$$

Motivado agora pelas igualdades (14) e (15) temos que:

Proposition 3.3 *Sejam* $[\alpha], [\beta] \in F(K)$. *Então*:

(*i*) $\cos([\alpha]) + \cos([\beta]) = \left(\frac{\sin([\alpha]+[\beta])}{\sqrt{1-\cos([\alpha]+[\beta])}}\right) \cdot \left(\frac{\sin([\alpha]-[\beta])}{\sqrt{1-\cos([\alpha]-[\beta])}}\right)$;

(*ii*) $\cos([\alpha]) - \cos([\beta]) = -\left(\sqrt{1-\cos([\alpha]+[\beta])}\right) \cdot \left(\sqrt{1-\cos([\alpha]-[\beta])}\right)$;

(*iii*) $\sin([\alpha]) + \sin([\beta]) = \left(\sqrt{1-\cos([\alpha]+[\beta])}\right) \cdot \left(\frac{\sin([\alpha]-[\beta])}{\sqrt{1-\cos([\alpha]-[\beta])}}\right)$;

(iv) $\sin([\alpha]) - \sin([\beta]) = \left(\sqrt{1-\cos([\alpha]-[\beta])}\right) \cdot \left(\frac{\sin([\alpha]+[\beta])}{\sqrt{1-\cos([\alpha]+[\beta])}}\right).$

Proof: A prova segue usando as proposições anteriores e a identidade de Pitágoras $\sin^2([\alpha]) + \cos^2([\alpha]) = 1$. Verifiquemos (i) e (iv) respectivamente:

$$\left(\frac{\sin([\alpha]+[\beta])}{\sqrt{1-\cos([\alpha]+[\beta])}}\right) \cdot \left(\frac{\sin([\alpha]-[\beta])}{\sqrt{1-\cos([\alpha]-[\beta])}}\right) =$$

$$= \frac{\sin^2([\alpha]) \cdot \cos^2([\beta]) - \cos^2([\alpha]) \sin^2([\beta])}{\sqrt{(\cos([\alpha]) - \cos([\beta]))^2}} = \frac{\cos^2([\beta]) - \cos^2([\alpha])}{\cos([\alpha]) - \cos([\beta])}$$

sendo a última igualdade consequência da identidade $\sin^2([\alpha]) = 1 - \cos^2([\alpha])$;

$$\left(\sqrt{1-\cos([\alpha]-[\beta])}\right) \cdot \left(\frac{\sin([\alpha]+[\beta])}{\sqrt{1-\cos([\alpha]+[\beta])}}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{1-\cos([\alpha]+[\beta])}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{1-\cos([\alpha]-[\beta])}\right)}{\left(\sqrt{1-\cos([\alpha]+[\beta])}\right)} \cdot \left(\frac{\sin([\alpha]+[\beta])}{\sqrt{1-\cos([\alpha]+[\beta])}}\right)$$

$$= \frac{(\cos([\alpha]) - \cos([\beta])) \cdot (\sin([\alpha]+[\beta]))}{\cos([\alpha]+[\beta]) - 1}$$

Usando o fato de que $\cos^2([\alpha]) = 1 - \sin^2([\alpha])$ na última igualdade concluíremos o resultado. □

4. Restrição ao Caso Real

Observamos que o conjunto de ângulos $F(\mathbf{R})$ sobre o corpo dos números reais $\mathbf{R}$ pode ser identificado com o intervalo $[0, 2\pi) \subset \mathbf{R}$. Para tanto identificamos cada semi-reta $[\alpha] \in F(\mathbf{R})$ do plano cartesiano com a medida $\angle([x], [\alpha])$ do ângulo formado pelas semi-retas $[x] = \{k(1,0) : k \in \mathbf{R} \text{ e } k > 0\}$ e $[\alpha]$. Em outras palavras, a aplicação

$$i : F(\mathbf{R}) \to [0, 2\pi)$$

tal que $i([\alpha]) = \angle([x], [\alpha])$ é uma bijeção. A importância desta aplicação se deve aos seguintes fatos:$i([\alpha]+[\beta]) = i([\alpha]) + i([\beta])$ e $i([\alpha]-[\beta]) = i([\alpha]) - i([\beta])$. A primeira igualdade é consequência imediata da identidade

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta| \left(\cos(\angle([x],[\alpha]) + \angle([x],[\beta])) + i \sin(\angle([x],[\alpha]) + \angle([x],[\beta]))\right),$$

sendo α e β representantes de $[\alpha]$ e $[\beta]$. Para a segunda igualdade observe inicialmente que se $\theta' = \angle([x],[\beta])$ então $2\pi - \theta' = \angle([x], -[\beta])$. Daí, pondo $\theta = \angle([x],[\alpha])$, segue que

$$\alpha \cdot \beta_s = |\alpha| \cdot |\beta_s| \left(\cos(\theta + (2\pi - \theta')) + i \sin(\theta + (2\pi - \theta'))\right),$$

sendo α e β_s representantes de $[\alpha]$ e $-[\beta]$. Usando os fatos de que $\cos(\theta + (2\pi - \theta')) = \cos(\theta' - \theta)$, $\sin(\theta + (2\pi - \theta')) = -\sin(\theta' - \theta)$, cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar, concluímos que

$$\alpha \cdot \beta_s = |\alpha| \cdot |\beta_s| \left(\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')\right).$$

Portanto $\angle([x], [\alpha] - [\beta]) = \theta - \theta' = \angle([x], [\alpha]) - \angle([x], [\beta])$, donde segue que $i([\alpha] - [\beta]) = i([\alpha]) - i([\beta])$.

Como $\sin([\alpha]) = \sin(i([\alpha]))$ e $\cos([\alpha]) = \cos(i([\alpha]))$, segue das propriedades da aplicação $i : F(\mathbf{R}) \to [0, 2\pi)$ que

$$\begin{array}{rcl} \sin([\alpha] + [\beta]) & = & \sin(\angle([x], [\alpha]) + \angle([x], [\beta])), \\ \sin([\alpha] - [\beta]) & = & \sin(\angle([x], [\alpha]) - \angle([x], [\beta])), \\ \cos([\alpha] + [\beta]) & = & \cos(\angle([x], [\alpha]) + \angle([x], [\beta])), \\ \cos([\alpha] - [\beta]) & = & \cos(\angle([x], [\alpha]) + \angle([x], [\beta])). \end{array}$$

Fica claro agora que as funções da definição 3.2 restritas ao caso real coincidem com as clássicas funções trigonométricas seno e cosseno.

Para finalizar estas notas propomos o seguinte problema para o qual ainda não conhecemos resposta. É bem conhecido que para todo $x \in \mathbf{R}$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{e} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Deste desenvolvimento em séries das funções trigonométricas clássicas surge naturalmente o problema da re-interpretação das funções trigonométricas agora definidas sobre um corpo real fechado K (no nosso caso seno e cosseno foram definidas sobre $F(K)$) de maneira a obter uma expansão em séries de potências para as mesmas. Para analisar a convergência de séries sobre corpos reais fechados uma idéia é considerar ao invés da ordem a valorização real compatível com a ordem (ver [NA]).

Agradecimentos

Os autores agradecem o "referee" pelos comentários e sugestões.

References

[CO] Conway, J. B. - *Functions of One Complex Variable* - Springer - Verlag (1978)

[JA] Jacobson, N. - *Lectures in Abstract Algebra - III Theory of Fields and Galois Theory* - Springer-Verlag (1964).

[NA] Narici, L. - *Functional Analysis and Valuation Theory* - Pure and Applied Mathematics (1971).

[RI] Ribenboim, P. - *L'arithmétique des corps* - Hermann, Paris, (1972).

Luciano Panek
Centro de Engenharias e Ciências Exatas
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Av. Tarquínio dos Santos 1300
CEP 85870-650, Foz do Iguaçú - PR, Brasil
E-mail address: ucpanek@gmail.com

Osvaldo Germano do Rocio
Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Maringá
Campus Universitário - Av. Colombo 5790
CEP 87020-900, Maringá-PR, Brasil
E-mail address: rocio@uem.br