



Planos e hiperplanos reais e complexos

Ludmila Bourchtein

ABSTRACT: The study of the structure of n -dimensional complex space $\mathcal{C}^n$ and the different objects in this space is very important, both for analysis of properties of $\mathcal{C}^n$ and for investigations of functions of n complex variables. In this article, real and complex planes and hyperplanes in the space $\mathcal{C}^n$ are considered. In particular, equations for complex line and real two-dimensional plane are constructed. The following statement is proved: any two distinct complex lines can have at most one common point in the space $\mathcal{C}^n$ ($n \geq 2$). One example show that a similar statement is not true for two distinct real two-dimensional planes in $\mathcal{C}^n$.

Contents

1	Introdução. O espaço complexo $\mathcal{C}^n$.	1
2	Planos complexos em $\mathcal{C}^n$. Equação da reta complexa.	2
3	Planos reais em $\mathcal{C}^n$. A equação do plano real bidimensional.	4
4	Um problema sobre comportamento das retas complexas.	6

1. Introdução. O espaço complexo $\mathcal{C}^n$.

Uma das principais dificuldades no estudo de funções de várias variáveis complexas é a ausência das simples interpretações geométricas. Existe diferença entre comportamento dos diferentes objetos no espaço n -dimensional e no plano. Além disso, há diferenças entre as propriedades dos objetos reais e complexos no espaço complexo $\mathcal{C}^n$. Neste artigo são analisadas algumas propriedades dos planos reais bidimensionais e das retas complexas no espaço $\mathcal{C}^n$ (notamos que o conjunto das retas complexas é um subconjunto dos planos reais bidimensionais).

Introduzimos algumas definições básicas.

O espaço cujos pontos são conjuntos ordenados de n números complexos $z = (z_1, \dots, z_n)$ é chamado *espaço complexo n -dimensional* e é denotado por $\mathcal{C}^n$. Como $z_k = x_k + iy_k = x_k + ix_{n+k}$, $k = 1, \dots, n$ então os pontos do espaço $\mathcal{C}^n$ são os pontos do espaço real euclidiano $2n$ -dimensional $\mathbb{R}^{2n}$. No espaço $\mathcal{C}^n$ são introduzidas a adição e a multiplicação por escalar complexo [1],[5]:

- 1) $z + w = (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n)$, $\forall z, w \in \mathcal{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$;
- 2) $\lambda z = (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$, $\forall z \in \mathcal{C}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

isto é, $\mathcal{C}^n$ tem estrutura de espaço vetorial. Neste espaço pode ser definido o

produto escalar de Hermite [4]:

$$(z, w) = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k, \quad \forall z, w \in \mathcal{C}^n, \quad z = (z_1, \dots, z_n), \quad w = (w_1, \dots, w_n). \quad (1)$$

Utilizando a representação dos números complexos na forma $z_k = x_k + ix_{n+k}$, $w = u_k + iu_{n+k}$, $k = 1, \dots, n$, obtemos de (1)

$$(z, w) = \sum_{k=1}^{2n} x_k u_k + i \sum_{k=1}^n (x_{n+k} u_k - x_k u_{n+k}). \quad (2)$$

De (1) e (2) segue particularmente que

$$(z, z) = \sum_{k=1}^{2n} x_k^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 = |z|^2.$$

Esta é a norma euclideana que coincide com a norma do vetor z no espaço $\mathbb{R}^{2n}$ [1],[7].

2. Planos complexos em $\mathcal{C}^n$. Equação da reta complexa.

O *hiperplano complexo*, contendo o ponto $z^0 \in \mathcal{C}^n$, é o conjunto dos pontos $z \in \mathcal{C}^n$ tais que o vetor $z - z^0$ é ortogonal no sentido complexo ao vetor fixo $a \in \mathcal{C}^n$, $a \neq 0$ [2],[5]: $(z - z^0, a) = 0$ (notamos que esta é a ortogonalidade usual no espaço complexo $\mathcal{C}^n$).

Sejam os vetores $a^j \in \mathcal{C}^n$, $j = 1, \dots, k$, $k \leq n$, linearmente independentes sobre o corpo $\mathcal{C}$. O conjunto dos pontos

$$\begin{cases} (z - z^0, a^j) = 0 \\ j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (3)$$

é chamado *plano complexo* de codimensão k (ou de dimensão $m = n - k$) que passa pelo ponto z^0 e é ortogonal no sentido complexo aos vetores a^j [2],[5]. O plano complexo unidimensional é chamado *reta complexa*.

Consideremos as retas complexas mais detalhadamente. Neste caso temos $m = 1$, isto é, $k = n - 1$; a reta complexa se define para o conjunto de $n - 1$ vetores $a^j \in \mathcal{C}^n$, $j = 1, \dots, n - 1$ linearmente independentes sobre o corpo $\mathcal{C}$; isto significa que da igualdade

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \dots + \lambda_{n-1} a^{n-1} = 0, \quad (4)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathcal{C}$, segue que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ [3],[6]. Representamos o vetor $a^j \in \mathcal{C}^n$ com ajuda das coordenadas $a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$, onde $a_p^j \in \mathcal{C}$, $\forall p = 1, \dots, n$, $\forall j = 1, \dots, n - 1$. Então podemos escrever a igualdade (4) na forma

$$\begin{cases} \lambda_1 a_1^1 + \lambda_2 a_1^2 + \dots + \lambda_{n-1} a_1^{n-1} = 0 \\ \dots \\ \lambda_1 a_n^1 + \lambda_2 a_n^2 + \dots + \lambda_{n-1} a_n^{n-1} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

e vemos que este sistema admite apenas soluções nulas. Isto significa que o rank da matriz

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

é igual a $n - 1$ [3]. Sem perda de generalidade podemos supor que o seguinte determinante de ordem $n - 1$ é diferente de zero:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{n-1}^1 \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

Utilizando a definição de reta complexa e reescrevendo o sistema (3) no caso $k = n - 1$ em forma de coordenadas pela fórmula (1), obtemos

$$\begin{cases} (z_1 - z_1^0)\bar{a}_1^1 + (z_2 - z_2^0)\bar{a}_2^1 + \dots + (z_n - z_n^0)\bar{a}_n^1 = 0 \\ (z_1 - z_1^0)\bar{a}_1^{n-1} + (z_2 - z_2^0)\bar{a}_2^{n-1} + \dots + (z_n - z_n^0)\bar{a}_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} (z_1 - z_1^0)\bar{a}_1^1 + \dots + (z_{n-1} - z_{n-1}^0)\bar{a}_{n-1}^1 = -(z_n - z_n^0)\bar{a}_n^1 \\ (z_1 - z_1^0)\bar{a}_1^{n-1} + \dots + (z_{n-1} - z_{n-1}^0)\bar{a}_{n-1}^{n-1} = -(z_n - z_n^0)\bar{a}_n^{n-1} \end{cases}. \quad (7)$$

Notamos que o determinante da matriz do sistema (7) (denotado por ω_n) é complexo conjugado ao determinante (6): $\omega_n = \bar{\Delta} \neq 0$, consequentemente, o sistema (7) tem única solução [3],[6]

$$\begin{cases} z_p - z_p^0 = \frac{\omega_p}{\omega_n}(z_n - z_n^0) \\ p = 1, \dots, n - 1 \end{cases} \quad (8)$$

onde

$$\omega_p = - \begin{vmatrix} \bar{a}_1^1 & \dots & \bar{a}_{p-1}^1 & \bar{a}_n^1 & \bar{a}_{p+1}^1 & \dots & \bar{a}_{n-1}^1 \\ \bar{a}_1^{n-1} & \dots & \bar{a}_{p-1}^{n-1} & \bar{a}_n^{n-1} & \bar{a}_{p+1}^{n-1} & \dots & \bar{a}_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Do sistema (8) obtemos a equação da reta complexa na forma

$$\frac{z_1 - z_1^0}{\omega_1} = \dots = \frac{z_{n-1} - z_{n-1}^0}{\omega_{n-1}} = \frac{z_n - z_n^0}{\omega_n}. \quad (9)$$

Caso alguns ω_p sejam nulos, entendemos que para a razão respectiva temos $z_p = z_p^0$. Denotando a razão comum em (9) por ζ , $\zeta \in \mathcal{C}$ obtemos a equação paramétrica da reta complexa em $\mathcal{C}^n$:

$$z = z^0 + \omega\zeta, \quad (10)$$

onde $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathcal{C}^n$ é algum vetor fixo não nulo que determina a reta complexa dada e ζ é um parâmetro complexo.

Fazendo raciocínios análogos podemos escrever a equação do plano complexo m -dimensional ($m < n$), que passa pelo ponto $z^0 \in \mathcal{C}^n$ na forma

$$z = z^0 + \omega^1 \zeta_1 + \omega^2 \zeta_2 + \dots + \omega^m \zeta_m, \quad (11)$$

onde $\omega^j = (\omega_1^j, \dots, \omega_n^j) \in \mathcal{C}^n$, $j = 1, \dots, m$ são vetores linearmente independentes do espaço $\mathcal{C}^n$ (que determinam o plano complexo m -dimensional dado) e $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathcal{C}^m$ é um parâmetro complexo m -dimensional.

3. Planos reais em $\mathcal{C}^n$. A equação do plano real bidimensional.

O *hiperplano real* em $\mathcal{C}^n$ contendo o ponto z^0 é o conjunto de pontos $z \in \mathcal{C}^n$ tais que o vetor $z - z^0$ é ortogonal no sentido real a um vetor fixo $a \in \mathcal{C}^n$, $a \neq 0$ [2],[5]: $Re(z - z^0, a) = 0$ (a condição de ortogonalidade usual do espaço real $\mathbb{R}^{2n}$).

Sejam os vetores $a^j \in \mathcal{C}^n$, $j = 1, \dots, k$, $k \leq 2n$, linearmente independentes sobre o corpo $\mathbb{R}$. O conjunto dos pontos

$$\begin{cases} Re(z - z^0, a^j) = 0 \\ j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (12)$$

é chamado *plano real* de codimensão k (ou de dimensão $m = 2n - k$) passando pelo ponto z^0 e ortogonal no sentido real aos vetores a^j [5]. O plano real unidimensional é chamado *reta real*.

Consideremos mais detalhadamente o plano real bidimensional em $\mathcal{C}^n$; neste caso, $m = 2$, isto é, $k = 2n - 2$. O plano real bidimensional se determina para um conjunto de $2n - 2$ vetores $a^j \in \mathcal{C}^n$, $a^j \neq 0$, $j = 1, \dots, 2n - 2$ linearmente independentes sobre o corpo $\mathbb{R}$, isto é, a igualdade

$$\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \dots + \lambda_{2n-2} a^{2n-2} = 0, \quad (13)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n-2} \in \mathbb{R}$, é válida apenas quando $\lambda_q = 0$, $\forall q = 1, \dots, 2n - 2$ [6]. Denotando $a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j) = (b_1^j, \dots, b_{2n}^j)$, onde $a_p^j = b_p^j + i b_{n+p}^j$, e reescrevendo a equação (13) na forma de coordenadas

$$\begin{cases} \lambda_1 b_1^1 + \lambda_2 b_1^2 + \dots + \lambda_{2n-2} b_1^{2n-2} = 0 \\ \dots \\ \lambda_1 b_{2n}^1 + \lambda_2 b_{2n}^2 + \dots + \lambda_{2n-2} b_{2n}^{2n-2} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

temos, pela condição de independência linear dos vetores a^j , $j = 1, \dots, 2n - 2$ sobre $\mathbb{R}$, que o sistema (14) admite apenas soluções nulas. Disto segue que o rank da matriz

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^{2n-2} \\ b_{2n}^1 & b_{2n}^2 & \dots & b_{2n}^{2n-2} \end{bmatrix}$$

é igual a $2n - 2$ [3]. Sem perda de generalidade vamos supor que o seguinte determinante de ordem $2n - 2$ da matriz $\tilde{M}$ é diferente de zero

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^{2n-2} \\ & b_{n-1}^1 & b_{n-1}^2 & \dots & b_{n-1}^{2n-2} \\ & b_{n+1}^1 & b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^{2n-2} \\ & & & \dots & \\ & b_{2n-1}^1 & b_{2n-1}^2 & \dots & b_{2n-1}^{2n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1^1 & \dots & b_{n-1}^1 & b_{n+1}^1 & \dots & b_{2n-1}^1 \\ b_1^2 & \dots & b_{n-1}^2 & b_{n+1}^2 & \dots & b_{2n-1}^2 \\ & \dots & & & \dots & \\ b_1^{2n-2} & \dots & b_{n-1}^{2n-2} & b_{n+1}^{2n-2} & \dots & b_{2n-1}^{2n-2} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (15)$$

Reescrevemos o sistema das equações (12) no caso $k = 2n - 2$ na forma de coordenadas utilizando a fórmula (2) e colocando as parcelas com $(x_n - x_n^0)$ e $(x_{2n} - x_{2n}^0)$ no lado direito

$$\begin{cases} (x_1 - x_1^0)b_1^j + \dots + (x_{n-1} - x_{n-1}^0)b_{n-1}^j + (x_{n+1} - x_{n+1}^0)b_{n+1}^j + \dots \\ \dots + (x_{2n-1} - x_{2n-1}^0)b_{2n-1}^j = -(x_n - x_n^0)b_n^j - (x_{2n} - x_{2n}^0)b_{2n}^j \\ j = 1, \dots, 2n - 2 \end{cases}$$

O determinante da matriz deste sistema coincide com o determinante (15), $\tilde{\Delta} \neq 0$; consequentemente, este sistema tem solução única [3],[6]

$$x_p - x_p^0 = \frac{1}{\tilde{\Delta}} \{ -(x_n - x_n^0)\Delta_p^n - (x_{2n} - x_{2n}^0)\Delta_p^{2n} \}, \quad p = 1, \dots, n-1, n+1, \dots, 2n-1, \quad (16)$$

onde

$$\Delta_p^\ell = \begin{vmatrix} b_1^1 & \dots & b_{p-1}^1 & b_\ell^1 & b_{p+1}^1 & \dots & b_{n-1}^1 & b_{n+1}^1 & \dots & b_{2n-1}^1 \\ & \dots & & & & \dots & & & & \\ b_1^{2n-2} & \dots & b_{p-1}^{2n-2} & b_\ell^{2n-2} & b_{p+1}^{2n-2} & \dots & b_{n-1}^{2n-2} & b_{n+1}^{2n-2} & \dots & b_{2n-1}^{2n-2} \end{vmatrix},$$

com $\ell = n$ ou $\ell = 2n$.

Introduzimos o parâmetro complexo $\zeta = \xi + i\eta$ do seguinte modo

$$\xi = -\frac{x_n - x_n^0}{2\tilde{\Delta}}, \quad \eta = \frac{x_{2n} - x_{2n}^0}{2\tilde{\Delta}}. \quad (17)$$

Lembrando que $z_p - z_p^0 = (x_p - x_p^0) + i(x_{n+p} - x_{n+p}^0)$, $p = 1, \dots, n$ e utilizando o fato de que

$$\xi = \frac{1}{2}(\zeta + \bar{\zeta}), \quad \eta = \frac{1}{2i}(\zeta - \bar{\zeta})$$

obtemos de (16) e (17)

$$z_p - z_p^0 = \omega_p \zeta + \omega'_p \bar{\zeta}, \quad p = 1, \dots, n, \quad (18)$$

onde

$$\begin{cases} \omega_p = \Delta_p^n - \Delta_{n+p}^{2n} + i(\Delta_{n+p}^n + \Delta_p^{2n}) \\ \omega'_p = \Delta_p^n + \Delta_{n+p}^{2n} + i(\Delta_{n+p}^n - \Delta_p^{2n}), \quad p = 1, \dots, n-1 \\ \omega_n = 0, \quad \omega'_n = -2\tilde{\Delta}. \end{cases} \quad (19)$$

Introduzindo os vetores $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ e $\omega' = (\omega'_1, \dots, \omega'_n)$ do espaço $\mathcal{C}^n$, podemos reescrever a equação do plano real bidimensional (18) na forma

$$z = z^0 + \omega\zeta + \omega'\bar{\zeta} \quad (20)$$

onde ζ é um parâmetro complexo. De (19) é visto que pelo menos um dos vetores ω ou ω' , que determinam o plano real bidimensional, é vetor não nulo no espaço $\mathcal{C}^n$.

Notamos que qualquer reta complexa (10) é um plano real bidimensional no espaço $\mathcal{C}^n$. A afirmação inversa não é verdadeira de um modo geral.

4. Um problema sobre comportamento das retas complexas.

Consideremos o seguinte problema: demonstrar que duas retas complexas quaisquer diferentes podem ter no máximo um ponto comum em $\mathcal{C}^n$ ($n \geq 2$).

Sejam dadas duas retas complexas em $\mathcal{C}^n$:

$$z = z^0 + \omega\zeta, \quad (21)$$

$$z = z^1 + \omega^1\zeta_1. \quad (22)$$

Representando o parâmetro ζ_1 na forma $\zeta_1 = \alpha\zeta$, $\alpha \in \mathcal{C}$ e denotando $\alpha\omega^1 = \tilde{\omega}$, reescrevemos a equação da reta (22) na forma

$$z = z^1 + \tilde{\omega}\zeta. \quad (23)$$

Antes de tudo, examinaremos o caso $z^1 = z^0$. Notamos que o ponto $z = z^0$ corresponde ao valor do parâmetro $\zeta = 0$ e para $\zeta \neq 0$ temos os pontos $z \neq z^0$. Neste caso ($z^1 = z^0$) as retas (21) e (23) têm o ponto z^0 em comum. Se essas retas têm mais um ponto em comum, além do ponto z^0 , então neste ponto temos a igualdade

$$(\omega - \tilde{\omega})\zeta = 0. \quad (24)$$

Como estamos interessados em pontos $z \neq z^0$, então $\zeta \neq 0$, portanto, de (24) temos que $\omega = \tilde{\omega}$, isto é, as retas complexas (21) e (23) completamente coincidem no espaço $\mathcal{C}^n$, o que contradiz a condição (de as retas serem distintas).

Seja agora $z^1 \neq z^0$. Vamos analisar se as retas complexas (21) e (23) podem ter pontos comuns em $\mathcal{C}^n$ neste caso. Se tais pontos existem, então de (21) e (23) temos $(\omega - \tilde{\omega})\zeta = z^1 - z^0$, ou

$$(\omega_k - \tilde{\omega}_k)\zeta = z_k^1 - z_k^0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (25)$$

É suficiente analisar os valores $\zeta \neq 0$. Se para todos $k = 1, \dots, n$ tivermos $\omega_k - \tilde{\omega}_k = 0$, então de (25) segue que $z^1 = z^0$, o que contradiz a escolha de z^1 e z^0 . Portanto, existe k_0 , $1 \leq k_0 \leq n$, tal que $\omega_{k_0} - \tilde{\omega}_{k_0} \neq 0$. Então, temos de (25)

$$\zeta = \frac{z_{k_0}^1 - z_{k_0}^0}{\omega_{k_0} - \tilde{\omega}_{k_0}}. \quad (26)$$

Se existe mais um índice k_1 , $1 \leq k_1 \leq n$, $k_1 \neq k_0$, tal que $\omega_{k_1} - \tilde{\omega}_{k_1} \neq 0$ então obtemos de (25)

$$\zeta = \frac{z_{k_1}^1 - z_{k_1}^0}{\omega_{k_1} - \tilde{\omega}_{k_1}}. \quad (27)$$

Como as igualdades (25) são válidas para todos $k = 1, \dots, n$, então os valores obtidos de ζ (26) e (27) têm que coincidir, isto é,

$$\frac{z_{k_0}^1 - z_{k_0}^0}{\omega_{k_0} - \tilde{\omega}_{k_0}} = \frac{z_{k_1}^1 - z_{k_1}^0}{\omega_{k_1} - \tilde{\omega}_{k_1}}. \quad (28)$$

Notamos entretanto que a igualdade (28) nem sempre é válida. Então, concluímos que as retas complexas podem ter no máximo um ponto em comum em $\mathcal{C}^n$ ($n \geq 2$).

Como já foi notado, qualquer reta complexa em $\mathcal{C}^n$ é o plano real bidimensional. Mas, a afirmação análoga (sobre a quantidade de pontos comuns) não é verdadeira para quaisquer dois planos reais bidimensionais. Realmente, consideramos o seguinte exemplo. Tomamos no espaço $\mathcal{C}^2$ dois planos reais bidimensionais que são definidos parametricamente da seguinte maneira:

$$z_1 = \zeta, \quad z_2 = 0, \quad z = (z_1, z_2) \quad (\text{primeiro plano}); \quad (29)$$

$$z_1 = 2i\zeta - (2+i)\bar{\zeta}, \quad z_2 = (1-i)\zeta + (1+i)\bar{\zeta}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{C} \quad (\text{segundo plano}). \quad (30)$$

Notamos que o plano (29) é, ao mesmo tempo, uma reta complexa. Os planos reais bidimensionais (29) e (30) têm o conjunto dos pontos em comum da forma $z = (z_1, z_2)$, onde $z_1 = (1-i)t$, $z_2 = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, isto é, interceptam-se ao longo da reta real.

Agradecimentos. Agradeço o apoio da FAPERGS com a bolsa N01/60053.9.

References

1. H. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*- Dover Publications, N. York (1995)
2. L. Hormander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*- North Holland, Amsterdam (1990)
3. S.J. Leon, *Linear Algebra with Applications*- University of Massachusetts, Prentice Hall, Boston (2002)
4. R.M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*- Springer-Verlag, N. York (1998)
5. B.V. Shabat, *Introduction to Complex Analysis Part 2: Functions of Several Variables*- American Mathematical Society, Providence (1992)
6. G. Strang, *Linear Algebra and Applications*- Harcourt Brace & Company, (1988)
7. V.S. Vladimirov, *Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables*- M.I.T. Press, Boston (1966)

Ludmila Bourchtein
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Pelotas,
Pelotas, RS CEP 96010-900 , Brazil
E-mail burstein@terra.com.br