Bol. Soc. Paran. Mat.
(3s.) **v. 21** 1/2 (2003): 1–9.

Aspectos da Matemática na Exploração Sustentável de Recursos Pesqueiros

Edson Alves
Departamento de Ciências - Universidade Estadual de Maringá
87360-000 Goioerê - PR
(edson@crg.uem.br)

Resumo: Neste trabalho discute-se um modelo de controle de pesca, baseado no conceito de curvas de crescimento, e ilustrado com dados estatísticos da produção de pescado no nordeste brasileiro. O trabalho tem por objetivo apresentar a questão da pesca predatória como um tema para a consolidação do espírito científico e de cidadania no ensino universitário. Além disso, o modelo apresentado demonstra, de uma forma natural, a importância do Cálculo Numérico na formação do jovem cientista.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Engenharia de Pesca, Cálculo Numérico.

1. Introdução

A idéia de escrever este trabalho surgiu da nossa experiência como professores da disciplina Cálculo Numérico, buscando um ensino dirigido às aplicações da Matemática. Nos livros-texto, é comum encontrarmos diversos exemplos de aplicação do Cálculo Numérico nas Engenharias e na Física. Entretanto, esses exemplos são muito complexos e específicos, não despertando a atenção de platéias mais heterogêneas. Uma alternativa foi a busca de subsídios em temas mais gerais, como o da pesca não predatória.

A exploração dos recursos pesqueiros além de fornecer suprimento alimentar traduz-se também na geração de renda e de empregos para a classe economicamente ativa. A exploração predatória e desordenada de uma espécie de peixe por um longo período de tempo pode causar, além da extinção dessa espécie, conseqüências danosas ao equilíbrio do ecossistema. Para assegurar o máximo rendimento sustentável das espécies de interesse econômico, é necessária uma investigação para determinar os níveis de abundância, e conseqüentemente os níveis de captura a que essas espécies podem ser submetidas.

2. O Modelo Matemático

Existem diversos modelos matemáticos dedicados à ciência da pesca. Alguns estudam técnicas de estimação do tamanho de cardumes, enquanto outros estudam a dinâmica populacional das várias espécies que concorrem no mesmo ecossistema. O modelo que apresentaremos aqui é bastante simples e é baseado na relação entre o estoque reprodutor e o recrutamento, estudado por Ricker (1954). O recrutamento R é definido como sendo a população de peixes passível de ser capturada, e o estoque reprodutor E é a população de peixes que escapa aos aparelhos de pesca e vai compor um novo recrutamento. Segue então que o estoque reprodutor é justamente a diferença entre o recrutamento e a captura C efetuada na temporada, e portanto a relação básica entre estas três grandezas é precisamente

$$C = R - E \tag{1}$$

Dependendo do estoque reprodutor E deixado numa temporada de pesca, o recrutamento R poderá sofrer severas alterações na temporada seguinte. A população E, juntamente com as particularidades do meio, determinarão o recrutamento. Do ponto de vista da matemática, dizemos que o recrutamento é função do estoque reprodutor, e escrevemos

$$R = f(E) \tag{2}$$

Essa dependência varia conforme as espécies e conforme a temporada de pesca. A dinâmica da pesca pode então ser representada graficamente da seguinte forma:

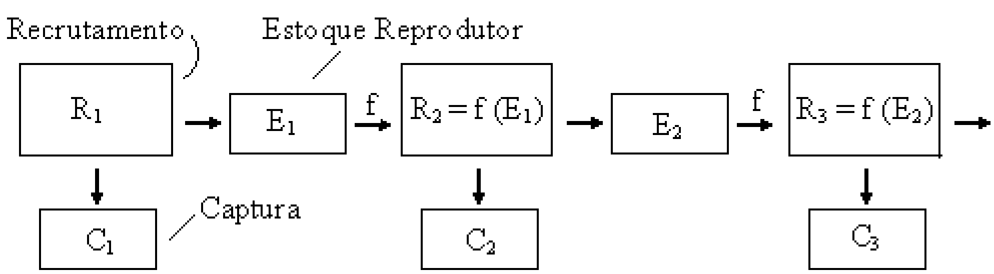

Figura 1: Recomposição do estoque ao longo de várias temporadas de pesca

Estamos interessados em determinar níveis de captura que garantam uma estabilidade no estoque pesqueiro. Em uma linguagem intuitiva, queremos a seguinte situação:

> *A cada temporada de pesca, encontramos o "mesmo" recrutamento R, e então fazemos a "mesma" captura C de sempre, conscientes de que esta ação não causará desequilíbrio no estoque.*

Voltando à figura 1, a pesca será considerada sustentável, ou estável, se pudermos manter os recrutamentos e as capturas constantes em todas as temporadas. Ou seja, $R_1 = R_2 = \cdots$, $C_1 = C_2 = \cdots$, $E_1 = E_2 = \cdots$, uma vez que $E = R - C$. Tendo esse objetivo em mente, concluímos de (2) que a pesca é estável quando

$$E = f(E) - C \quad \text{ou} \quad C = f(E) - E \tag{3}$$

A pergunta seguinte é: como calcular o estoque reprodutor "ótimo" E^* para que possamos ter o máximo de captura C? A resposta desta pergunta segue imediatamente do Cálculo Diferencial, onde sabemos que os máximos e os mínimos locais de uma função diferenciável são zeros da sua primeira derivada. Portanto, o E ótimo satisfaz

$$\frac{dC}{dE} = 0 \quad \text{ou seja} \quad f'(E) - 1 = 0$$

Então o valor de E^* é calculado resolvendo-se a equação, possivelmente não linear,

$$f'(E) - 1 = 0 \tag{4}$$

Na prática, a relação de dependência entre o recrutamento e o estoque reprodutor $R = f(E)$ é dada pela fórmula

$$f(E) = Ee^{a-bE} \quad \text{ou seja} \quad R = Ee^{a-bE} \tag{5}$$

onde os parâmetros $a, b > 0$ variam segundo as espécies e as populações estudadas. A função f acima, chamada de curva de reprodução, foi proposta por W. E. Ricker (Ricker 1954) baseado em estudos sobre o salmão do Pacífico. Conhecendo-se agora o comportamento típico de f, podemos fazer uma interpretação geométrica do cálculo da captura ótima C^*.

Podemos observar que a maior captura ocorre no ponto E^*, correspondente à intersecção do gráfico da função f com a tangente da função f, paralela à bissetriz $E = R$. Este ponto, calculado como raiz da equação (4), também pode ser obtido através do Teorema do Valor Médio.

3. O Pargo do Nordeste Brasileiro

Trabalhos realizados no Brasil, por pesquisadores da Universidade Federal do Ceará, mostraram que a curva de Ricker descreve satisfatoriamente as curvas de reprodução para diversas espécies economicamente importantes da costa brasileira. Os dados da tabela 1 foram obtidos por A. A. Fonteles Filho (Fonteles 1989), e correspondem às estimativas do estoque reprodutor e do recrutamento para o pargo, *lutjanus purpureus*, nas regiões Norte e Nordeste.

Tabela 1. Estimativas do estoque reprodutor e do recrutamento absoluto do pargo nas regiões Norte e Nordeste do Brasil. (Fonteles 1989).

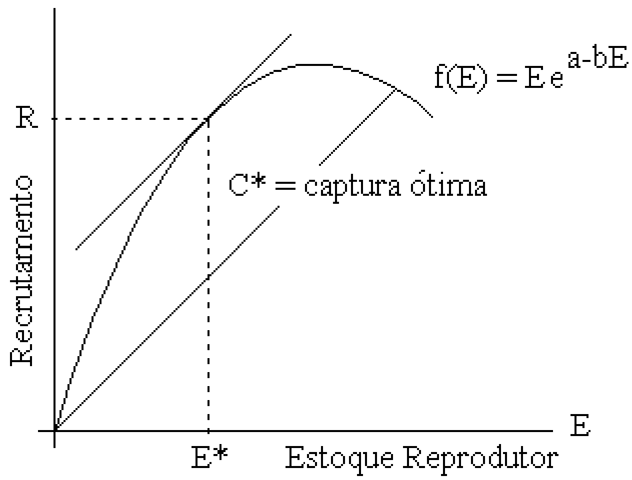

Figura 2: Curva de crescimento de Ricker e a determinação da captura ótima

ano	E (em milhões)	ano	R (em milhões)	$Z = \ln(R/E)$ (linearização)
1970	0,434956	1971	1,359604	1.139704
1971	0,453752	1972	2,502356	1.707437
1972	0,557176	1973	1,736815	1.136927
1973	1,026496	1974	1,578720	0.430463
1974	1,267969	1975	2,183823	0.543661
1975	1,509981	1976	2,580708	0.535967
1976	1,440540	1977	2,496351	0.549812
1977	1,746568	1978	2,476963	0.349381
1978	1,762855	1979	2,399826	0.308462
1979	1,092157	1980	3,093349	1.041100

Baseado nesses dados, podemos fazer um estudo quantitativo sobre a exploração sustentável dessa espécie, determinando a sua captura ótima. Com a intenção de aplicar o modelo anteriormente descrito, devemos ser capazes de determinar a curva de reprodução que melhor descreve os dados apresentados. Para isso, precisamos assumir uma hipótese para a fundamentação teórica do nosso procedimento. Admitiremos que a curva de Ricker $f(E) = \exp(a - bE)$ é adequada para representar o crescimento dessa população de pargo. Temos então a seguinte situação gráfica mostrada na figura 3.

É importante notar que a determinação da melhor curva se resume em deter-

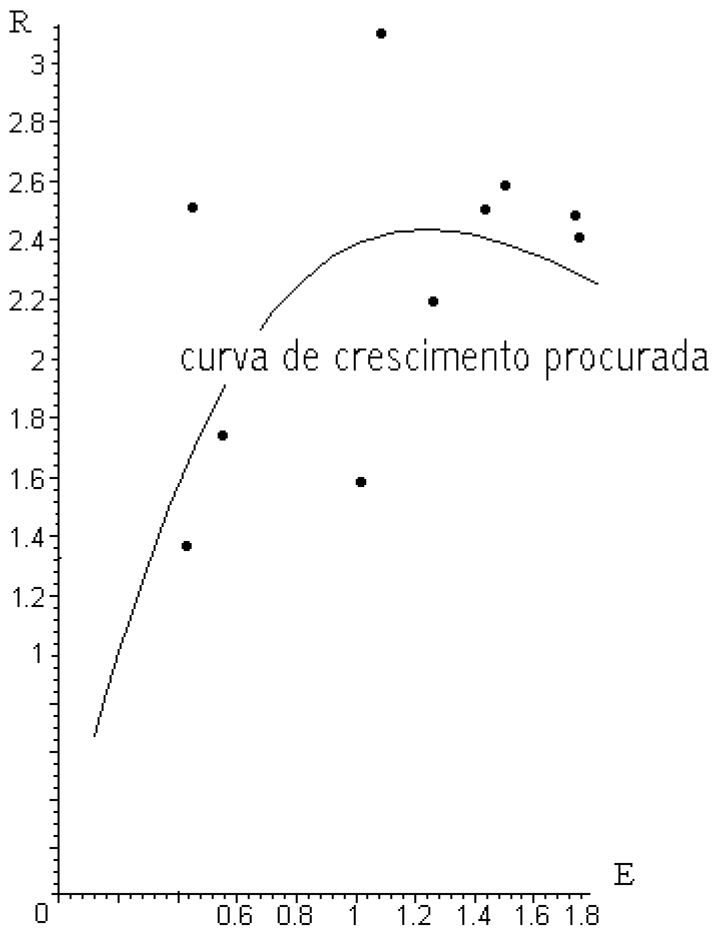

Figura 3: Diagrama de dispersão dos dados da tabela 1

minar os correspondentes valores de a e b. A metodologia mais aceita para esse tipo de "ajuste de curvas" é a de *mínimos quadrados*, que emprega uma noção de média para os pontos da tabela. No presente caso, devido a forma da função f, primeiramente linearizamos os dados obtidos, reduzindo o problema original a um problema de ajustes de retas. Esse processo é chamado de regressão linear, e é feito passando-se o logaritmo na equação (5),

$$\ln R = \ln E + (a - bE)$$

Assim, fazendo $Z = \ln(R/E)$, obtemos

$$Z = a - bE$$

ou seja, agora temos um problema linear de ajustar a reta $Z = a - bE$ aos pontos da tabela $E \times Z$.

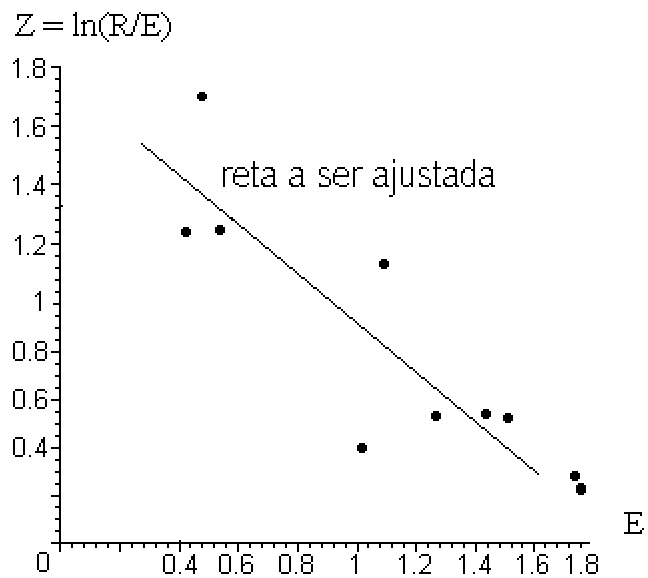

Figura 4: Diagrama de dispersão linearizado, conforme tabela 1

O ajuste de uma reta do tipo $y = a - bx$ pode ser obtido computacionalmente através de pacotes estatísticos. Por outro lado, esse cálculo também pode ser realizado diretamente das fórmulas de mínimos quadrados, discutidos na disciplina de Cálculo Numérico. Neste caso, devemos resolver o sistema (ver Ruggiero e Lopes 1996)

$$\begin{cases} c_{11}a + c_{12}c = d_1 \\ c_{21}a + c_{22}c = d_2 \end{cases}$$

onde

$$c_{11} = \sum_{i=1}^{10} 1 = 10, \quad c_{12} = \sum_{i=1}^{10} E_i = 11.292450, \quad c_{22} = \sum_{i=1}^{10} E_i^2 = 15.07312467,$$

$$c_{21} = c_{12}, \quad d_1 = \sum_{i=1}^{10} Z_i = 7.742912569, \quad d_2 = \sum_{i=1}^{10} Z_i E_i = 6.927516138,$$

cuja solução é

$$a = 1.657830250 \quad \text{e} \quad b = 0.7824156789.$$

Substituindo esses valores na função f obtemos finalmente

$$f(E) = Ee^{1.657830250-0.7824156789E}$$

Agora nos ocuparemos do cálculo da captura ótima. Conforme vimos no estudo do modelo matemático, o nível do estoque reprodutor ótimo é dado pela raiz da equação (4), que corresponde a $(1-bE)e^{a-bE}-1=0$, ou seja,

$$(1-0.7824156789E)e^{1.657830250-0.7824156789E}-1=0 \qquad (6)$$

Existem diversos métodos numéricos para a resolução de equações não lineares na forma $g(E)=0$, que é o caso de (6). Usaremos aqui o Método de Newton-Raphson (ver Ruggiero e Lopes 1996), que é baseado em processos iterativos. A partir de uma aproximação inicial E_0 (próxima à raiz procurada), obtém-se aproximações cada vez melhores da raiz através da fórmula

$$E_n = E_{n-1} - \frac{g(E_{n-1})}{g' E_{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Utilizando este método com $E_0 = 1.0$, obtemos

$$E^* \cong 0.8166 \quad \text{milhões de indivíduos.}$$

Logo, se o nível de escape for mantido em aproximadamente $0,81$ milhões de indivíduos, a captura máxima permissível é obtida fazendo-se

$$C^* = f(E^*) - E^* \cong 1.44 \quad \text{milhões de indivíduos.}$$

Portanto, a manutenção da captura nesse patamar permitirá a recomposição do estoque capturável para a temporada seguinte, de forma a permitir o equilíbrio da população e o máximo rendimento econômico.

4. Discussões e Conclusão

O modelo discutido na Seção 2 é baseado na curva de crescimento da população do pescado em consideração. Esta, por sua vez, depende diretamente da qualidade dos dados obtidos sobre a espécie. Entretanto, a imprecisão das estatísticas disponíveis e o estudo ainda tímido das condições oceanográficas/geológicas das áreas de pesca, da biologia/ecologia das espécies de interesse econômico e da dinâmica das populações explotadas são fatores que dificultam o acompanhamento e o controle da produção de pescado.

O estudo de modelos e de métodos para a estimação de recursos pesqueiros é por si só uma área de pesquisa de intensa atividade (veja e.g. Abuabara e Petrere Jr 1997). Por outro lado, a discussão da pesca não predatória é um tema de interesse dos estudantes de ciências, em nível universitário, e permite ao professor de matemática uma oportunidade real de ilustrar e de motivar diversos aspectos da matemática, principalmente sobre a modelagem, os métodos numéricos e a computação científica.

O Modelo e suas considerações foram apresentados em diversos encontros regionais de matemática e ciências, onde foi possível fazer avaliações do tema através das discussões com o público. Esse modelo também foi proposto para alunos de graduação de turmas de Engenharia de Produção e Matemática da Universidade Estadual de Maringá, tendo sido muito bem recebido, motivando até mesmo a pesquisa de outros dados na Internet. Das discussões em sala de aula, surgiram questões como a possibilidade de gerenciamento de mais de uma espécie ao mesmo tempo e a influência da captura de uma espécie sobre outras, já que os aparelhos de pesca, seletivos ao tamanho dos indivíduos não o são quanto às espécies que coexistem numa mesma região de pesca, podendo ser capturados indivíduos de diferentes espécies a cada lance de rede. Surgiram também sugestões para o estudo de situações envolvendo espécies predadoras, que poderia ser estudado num modelo mais complexo, o que estaria fora dos objetivos iniciais da proposta do problema. No entanto, é importante salientar que o objetivo é proporcionar atividades interdisciplinares, integrando a matemática e outras áreas do conhecimento científico. A avaliação não é baseada no conhecimento sobre modelagem matemática, mas sobretudo na capacidade do indivíduo em visualizar a interdisciplinaridade no conhecimento científico.

5. Agradecimentos

Agradecemos ao Professor Dr. Ma To Fu pela apresentação e discussão de uma versão preliminar deste artigo em sua turmas de Cálculo Numérico, na Universidade Estadual de Maringá, em 2001 e 2002. Seus relatos sobre a experiência contribuíram para a finalização da pesquisa.

Referências

1. A. A. Fonteles Filho, *Recursos Pesqueiros: Biologia e Dinâmica Populacional*, Imprensa Oficial do Ceará, Fortaleza, 1989.
2. C. W. Clark, *Fishery Mathematics*, Applied Mathematics Notes 6 (1981) 101-107.
3. M. A. G. Ruggiero, V. L. R. Lopes, *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*, Makron Books, São Paulo, 1996.
4. M. A. P. Abuabara e M. Petrere Jr., *Estimativas da Abundância de Populações Animais.* Introdução às Técnicas de Captura-Recaptura, EDUEM, Maringá, 1997.
5. M. B. Shaefer, *Some Aspects of the Dynamics of Populations Important to the Management of the Commercial Marine Fisheries*, Bulletin of Mathematical Biology 53 (1991) 253-279.
6. Malcolm Haddon, *Modelling and Quantitative Methods in Fisheries*, Chapman & Hall, 2001.
7. M. P. Paiva, *Recursos Pesqueiros Estuarinos e Marinhos do Brasil*, Editora UFC, Fortaleza, 1997.
8. S. A. Miloca, *Sobre um Modelo Numérico na Matemática Pesqueira*, Monografias do Curso de Especialização, Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 1997.
9. W. E. Ricker, *Stock and Recuitment*, Journal of the Fisheries Research Board of Canada 11 (1954) 559-623.