
EQUILÍBRIOS DE NASH-COURNOT EM DUOPÓLIOS COM PRÁTICA DE SOBREPREÇO

Altieres Frances Silva¹
Marcio Colombo Fenille²

RESUMO: Este artigo propõe um modelo assimétrico de duopólio em que duas empresas competem na quantidade produzida. A assimetria provém de hipóteses de heterogeneidade de produtos, de diferenciação de custos de produção e de prática de sobrepreço por parte de uma das empresas. Mostra-se que o duopólio apresenta um único equilíbrio de Nash-Cournot, o qual é simétrico se, e somente se, o sobrepreço refere-se essencialmente a repasse dos custos; nos demais casos, embora seja assimétrico, quando o patamar de mercado cresce (indefinidamente), o equilíbrio converge para o cenário em que as duas empresas dividem igualmente a produção e, além disso, a empresa que pratica sobrepreço desfruta de benefício da ordem do fator de sobrepreço acima do benefício da concorrente.

Palavras Chave: Duopólio; equilíbrio; sobrepreço; produtos não homogêneos.

1. INTRODUÇÃO

Um duopólio, assim como tantos cenários de conflito ou competição, pode ser modelado sob a forma de um jogo, no qual os jogadores são as duas empresas que compõem o duopólio, cada uma dispondo de um conjunto de possíveis decisões ou estratégias que, tomadas de forma não-cooperativa, definem conjuntamente o benefício de ambas. São dois os modelos clássicos e precursores de duopólios desenvolvidos do ponto de vista da teoria econômica de jogos: o modelo de Cournot e o modelo de Bertrand. O primeiro, desenvolvido pelo filósofo, matemático e economista francês Antoine Augustin Cournot (1801–1877), propõe uma análise sobre o comportamento de duas empresas que praticam o mesmo preço e precisam decidir simultaneamente quanto produzir para maximizar seus ganhos. O segundo, desenvolvido pelo matemático francês Joseph Louis François Bertrand (1822–1900), consiste, em contraste ao primeiro, de um modelo em que as empresas precisam decidir simultaneamente os preços de seus produtos, ao invés da quantidade a ser produzida. Em ambos pressupõe-se que as empresas tenham o mesmo custo de produção e que seus produtos sejam homogêneos (substitutos perfeitos), de modo que o consumidor tende a decidir-se por um ou outro considerando apenas o preço, independentemente do fabricante.

Neste artigo, propõe-se um modelo de duopólio em que uma das empresas pratica sobrepreço com relação ao considerado preço ideal de mercado. A razão de tal prática pode estar relacionada a repasse de custos de produção, a não homogeneidade dos produtos, às duas coisas, ou a nenhuma delas, ou seja, pode ser mera convicção ou tradição da empresa.

Além de ser justificativa plausível para prática de sobrepreço, a diferenciação de produtos é um dos principais pressupostos que enriquecem os modelos de duopólios ou oligopólios, tendo sido considerada em muitos trabalhos desenvolvidos nas últimas décadas. Dentre eles, importa destacar dois que trazem a diferenciação de qualidade dos produtos não como fator de restrição do potencial de atuação das empresas, mas como decisão estratégica a ser tomada. Neste sentido, Shaked & Sutton (1982) estudaram oligopólios em que há competição em preços e em qualidade, isto é, a qualidade dos produtos é uma variável do modelo em função da qual o equilíbrio pode ser almejado. Também Chan & Leland (1982) analisaram mercados em que as empresas podem decidir os preços e os níveis de qualidade de seus produtos, com o diferencial que os consumidores podem adquirir informações de preço e qualidade sobre as empresas, individualmente, por um custo.

Como a distinção proposta neste trabalho é a modelagem de um duopólio em que há expressa prática de sobrepreço, o que determina *a priori* uma relação de preços, cabe apresentar um modelo em

¹ Professor / UFU

² Professor / UFU

que a estratégia de cada empresa consista, a exemplo do modelo clássico de Cournot, em decidir a quantidade a ser produzida.

Importante modelo do tipo Cournot que contém hipóteses de diferenciação de produtos é aquele proposto por Vigoya (2011), um modelo Bayesiano em que há um parâmetro que mede o grau de homogeneidade dos produtos, que podem variar de totalmente diferentes a substitutos perfeitos, e no qual considera-se que uma das empresas possa decidir, sem que a outra tenha conhecimento, por produzir com um ou outro determinado custo. Assim, uma das empresas conhece seus próprios custos e os da outra empresa, mas esta outra precisa associar probabilidades aos custos da primeira.

Mais recentemente, Pateiro-Rodríguez et al. (2015) propuseram uma análise em que custos de fidelização e de troca de uma por outra empresa são considerados, especialmente na situação em que um competidor (uma empresa) ingressa num mercado monopolista. São investigados equilíbrios em função de preço e de quantidade.

Todos os modelos em que a competição se dá, toda ou em parte, sobre a decisão de quanto produzir, constituem extensões do modelo clássico de Cournot, o qual apresenta um equilíbrio em que as duas empresas dividem igualmente a produção, por esta razão chamado um equilíbrio simétrico. A noção de equilíbrio no modelo de Cournot coincide, naquele particular, com a noção de equilíbrio de Nash, motivo pelo qual é também chamado um equilíbrio de Nash-Cournot.

Merece destaque o conceito de equilíbrio de Nash, proposto em 1950 pelo matemático norte-americano John Forbes Nash Jr. (1928–2015), laureado em 1994 com o prêmio Nobel de Economia. Definido num contexto mais geral (não somente para jogos que correspondam a duopólios), um equilíbrio de Nash para um jogo refere-se a uma situação do jogo em que nenhum dos jogadores sente-se motivado a modificar sua estratégia se os demais não o fizerem. Noutras palavras, um equilíbrio de Nash é um conjunto de estratégias (uma para cada jogador) com a propriedade que a estratégia de cada jogador é sua melhor resposta às estratégias dos demais; ver Nash (1951).

No modelo de duopólio apresentado neste artigo, considera-se que os produtos possam não ser homogêneos, que os custos de produção de cada empresa possam ser distintos e que uma das empresas pratique sobrepreço com relação àquele considerado o preço ideal de mercado, este último entendido como função linear inversa da demanda. Apresenta-se, portanto, um modelo assimétrico, e naturalmente questiona-se sobre a possibilidade de existência de equilíbrios simétricos.

Examinando conjuntamente as funções melhor resposta de ambas as empresas, verifica-se que o duopólio apresenta um único equilíbrio de Nash-Cournot que depende das constantes de custo de produção de cada empresa, do grau de homogeneidade dos produtos e do sobrepreço aplicado. Analisando-se o equilíbrio com relação a cada um dos parâmetros do modelo, vislumbram-se as condições sob as quais ocorre simetria, ou seja, o cenário em que as empresas dividem igualmente a produção, como no modelo clássico de Cournot. Nas situações em que isso não ocorre, isto é, o equilíbrio dá-se com as empresas produzindo quantidades distintas, verifica-se a tendência do ponto de equilíbrio em aproximar-se do caso simétrico com o crescimento do patamar de mercado, com o que se conclui que, em mercados suficientemente grandes, o ponto de equilíbrio é muito próximo daquele em que as empresas dividem igualmente a produção e a empresa que pratica sobrepreço desfruta de benefício da ordem do fator de sobrepreço acima do benefício da concorrente.

2. DUOPÓLIOS COM PRÁTICA DE SOBREPREGO

Considera-se o seguinte cenário: duas empresas, aqui nominadas E_1 e E_2 , disputam um mercado em situação de *market-clearing*, isto é, não existe excesso de demanda ou excesso de oferta. A empresa E_1 , por alguma razão, pratica sobrepreço da ordem de $k\%$ com relação ao preço considerado ideal para o mercado, este último entendido como função linear inversa da demanda.

As razões que essencialmente possam justificar a prática de sobrepreço, além de convicção ou tradição da empresa E_1 , são duas, a saber:

1. Os custos da empresa E_1 são superiores aos da empresa E_2 e eles são repassados ao consumir na forma de sobrepreço;
2. Os produtos das duas empresas não são homogêneos e a empresa E_1 entende que seus produtos sejam de qualidade superior.

Estas duas razões podem estar intrinsecamente relacionadas e a razão efetiva para a prática de sobrepreço ser uma combinação de ambas. É razoável esperar, por exemplo, que produtos não homogêneos tenham custos de produção distintos; assim sendo, ao ponderar a heterogeneidade dos produtos, a empresa leva em consideração também a discrepância de custos.

Para abranger quaisquer razões que justifiquem a prática de sobrepreço e que guardem relação com estas assim chamadas razões essenciais, apresenta-se um modelo que considera as hipóteses de custos de produção possivelmente distintos, produtos possivelmente não homogêneos e sobrepreço relacionado ou não a repasse de custo ou grau de homogeneidade.

O grau de homogeneidade é expresso por um parâmetro h que pode assumir qualquer valor real do intervalo fechado $[0,1]$. O extremo $h = 1$ significa que os produtos são totalmente homogêneos (substitutos perfeitos), enquanto que $h = 0$ significa que os produtos são totalmente incompatíveis. Seguindo o modelo proposto por Vigoya (2011), o grau de homogeneidade impacta os preços ideais de mercado dos produtos de ambas as empresas, de modo que

$$p_1^{ideal} = N - q_1 - hq_2 \quad e \quad p_2^{ideal} = N - hq_1 - q_2$$

onde q_1 e q_2 são as quantidades produzidas pelas empresas E_1 e E_2 , respectivamente, e N é o patamar de mercado, isto é, uma constante que corresponde à quantidade agregada máxima de produto que pode ser assimilada pelo mercado.

Quando $h = 1$, o preço ideal de mercado para ambas as empresa é dado por $P = N - Q$, onde $Q = q_1 + q_2$ é a quantidade agregada, conforme o modelo clássico de Cournot; ver Fiani (2011) ou Bortolossi et al. (2007).

De acordo com o assumido, a empresa E_1 pratica sobrepreço da ordem de $k\%$ sobre o preço ideal p_1^{ideal} . Definindo $s = 1 + k/100$ como o parâmetro de sobrepreço, obtém-se que os preços efetivamente praticados pelas empresa E_1 e E_2 são

$$p_1 = s(N - q_1 - hq_2) \quad e \quad p_2 = N - hq_1 - q_2$$

É importante notar que $s \geq 1$, verificando-se a igualdade quando $k = 0$ e, portanto, quando não há sobrepreço.

Ao se assumir a homogeneidade dos produtos de ambas as empresas, é natural supor que os custos de produção sejam os mesmos para as duas. Contudo, uma vez considerada a possibilidade de não haver homogeneidade, supõe-se que os custos por unidade produzida pelas empresas E_1 e E_2 correspondam, respectivamente, às constantes positivas c_1 e c_2 , possivelmente distintas.

A função benefício (ou lucro) f_i da empresa E_i depende da quantidade produzida q_i e do preço p_i por ela praticado, além da constante c_i . Mas sob as hipóteses consideradas, p_i é uma função de q_1 e q_2 , de modo que $f_i = f_i(q_1, q_2)$, ou seja, o benefício da empresa E_i é função das quantidades de q_1 e q_2 ofertadas por ambas as empresas. Simples e precisamente, $f_i(q_1, q_2) = q_i(p_i - c_i)$.

Importa observar que o domínio de ambas as funções, f_1 e f_2 é o subconjunto Δ do plano cartesiano formado por todos os pares (q_1, q_2) de números reais não negativos para os quais se tem $q_1 + q_2 \leq N$.

De posse das considerações anteriores, pode-se escrever explicitamente as funções benefício das empresas que compõem o duopólio:

$$\begin{aligned} f_1(q_1, q_2) &= q_1(s(N - q_1 - hq_2) - c_1); \\ f_2(q_1, q_2) &= q_2(N - hq_1 - q_2 - c_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Cada empresa busca maximizar seu benefício. Para tanto, quando a empresa E_1 define sua produção q_1 , a empresa E_2 reage com a produção q_2 que maximiza a função benefício $f_2(q_1, \cdot)$, e vice versa. A produção q_2 é então a *melhor resposta* da empresa E_2 frente à produção q_1 da empresa E_1 . Estas estratégias definem as *funções melhor resposta* MR_1 e MR_2 das empresas E_1 e E_2 , respectivamente, que são dadas por:

$$\begin{aligned} MR_1(q_2) &= \operatorname{argmax}_{q_1} f_1(\cdot, q_2) = \{q_1 : f_1(q_1, q_2) \geq f_1(q, q_2) \forall q\}; \\ MR_2(q_1) &= \operatorname{argmax}_{q_2} f_2(q_1, \cdot) = \{q_2 : f_2(q_1, q_2) \geq f_2(q_1, q) \forall q\}. \end{aligned}$$

Ressalte-se que as funções melhor resposta são, formalmente, funções multivaloradas, isto é, a imagem de cada elemento é um conjunto que pode não ser unitário, o que ocorre quando a função benefício correspondente possui mais de um ponto de máximo global para uma dada estratégia da empresa concorrente. Isso não ocorre no modelo aqui proposto.

Um *equilíbrio de Nash-Cournot* para o duopólio é um par de estratégias $(q_1^*, q_2^*) \in \Delta \times \Delta$ que satisfaz simultaneamente:

$$q_1^* \in MR_1(q_2^*) \quad \text{e} \quad q_2^* \in MR_2(q_1^*).$$

Isto significa que q_1^* é a melhor resposta possível para a empresa E_1 à estratégia q_2^* da empresa E_2 , e q_2^* é a melhor resposta possível para a empresa E_2 à estratégia q_1^* da empresa E_1 . Na situação de equilíbrio, nenhuma empresa sente-se motivada a mudar sua estratégia se a outra empresa não o fizer; ver Fiani (2011) ou Bortolossi et al. (2007).

As condições $q_1^* \in MR_1(q_2^*)$ e $q_2^* \in MR_2(q_1^*)$ implicam que q_1^* é ponto crítico da função $f_1(\cdot, q_2^*)$ e que q_2^* é ponto crítico da função $f_2(q_1^*, \cdot)$. Como, além disso, essas duas funções são quadráticas com coeficientes dominantes negativos, segue-se que um par de estratégias $(q_1^*, q_2^*) \in \Delta \times \Delta$ é um equilíbrio de Nash-Cournot para o duopólio se, e somente se,

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1}(q_1^*, q_2^*) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial q_2}(q_1^*, q_2^*) = 0.$$

Calculando as derivadas parciais envolvidas, a esta última expressão corresponde o sistema linear

$$\begin{cases} s(N - 2q_1^* - hq_2^*) - c_1 = 0 \\ N - hq_1^* - 2q_2^* - c_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

A única solução (q_1^*, q_2^*) deste sistema, destacada na proposição a seguir, é o equilíbrio de Nash-Cournot do duopólio modelado.

Proposição 1: *O duopólio cujas funções benefício são aquelas expressas nas equações (1) tem um único equilíbrio de Nash-Cournot (q_1^*, q_2^*) dado por:*

$$q_1^* = \frac{N}{2+h} + \frac{shc_2 - 2c_1}{s(4-h^2)} \quad e \quad q_2^* = \frac{N}{2+h} + \frac{hc_1 - 2sc_2}{s(4-h^2)}.$$

Observa-se que, como $0 \leq h \leq 1$ e $s \geq 1$, as expressões de q_1^* e q_2^* estão bem definidas. Ademais, a condição $(q_1^*, q_2^*) \in \Delta \times \Delta$ reduz-se a

$$N \geq \max \left\{ \frac{2c_1 - shc_2}{s(2-h)}, \frac{2sc_2 - hc_1}{2-h}, \frac{c_1 + sc_2}{s(4+h)} \right\}.$$

Mais uma vez, como $0 \leq h \leq 1$ e $s \geq 1$, todos os denominadores que aparecem na expressão acima estão entre s e $5s$. Além disso, num cenário de aplicação realista, espera-se que os parâmetros do modelo estejam devidamente normalizados e ajustados em suas unidades de medida, de modo que o patamar N possa ser considerado, numericamente, bastante superior às constantes c_1 e c_2 . Em tal cenário verificar-se-á, de fato, $(q_1^*, q_2^*) \in \Delta \times \Delta$.

Quando reduz-se o modelo aqui proposto ao clássico de Cournot, o que significa tomar $s = h = 1$ e $c_1 = c_2 = c$, (re)obtem-se, de acordo com a Proposição 1, o equilíbrio simétrico $q_1^* = q_2^* = (N - c)/3$, exatamente como naquele modelo; ver Fiani (2011) ou Bortolossi et al. (2007).

3. ANÁLISE DO EQUILÍBRIO

Apresenta-se nesta seção uma análise do equilíbrio de Nash-Cournot (q_1^*, q_2^*) do duopólio proposto, com relação aos seus vários parâmetros, especialmente considerando-se os pontos de vista apresentados no início da seção anterior como sendo razões essenciais para a prática de sobrepreço.

Equilíbrio simétrico: Diz-se que o equilíbrio (q_1^*, q_2^*) é *simétrico* quando $q_1^* = q_2^*$, o que significa que, na situação de equilíbrio, as duas empresas dividem igualmente o mercado em termos de quantidade produzida. Por exemplo, o modelo clássico de Cournot apresenta equilíbrio simétrico. Com relação ao modelo proposto neste artigo, tem-se, de acordo com a Proposição 1,

$$q_1^* - q_2^* = \frac{sc_2 - c_1}{s(2-h)}.$$

Como $0 \leq h \leq 1$ e $s \geq 1$, segue-se que o sinal de $q_1^* - q_2^*$ é o mesmo da diferença $sc_2 - c_1$. Em particular, o duopólio apresenta equilíbrio simétrico se, e somente se $c_1 = sc_2$.

Sobrepreço correspondente a repasse de custo: É interessante perceber que a condição para que se tenha equilíbrio simétrico não envolve o parâmetro h de homogeneidade, mas apenas os custos c_1 e c_2 e o fator de sobrepreço s . Isto justifica que digamos que a condição $c_1 = sc_2$ caracteriza a razão de aplicação de sobrepreço correspondente integralmente a repasse de custos ao consumidor. De fato, nestas condições, o fator de sobrepreço s indica também o quanto superior é o custo da empresa E_1 comparado ao custo da empresa E_2 . Com esta terminologia, pode-se enunciar que o duopólio apresenta equilíbrio simétrico se, e somente se, o sobrepreço corresponde integralmente a repasse de custos ao consumidor.

Varição da assimetria com relação ao sobrepreço: O equilíbrio não sendo simétrico, a diferença $q_1^* - q_2^*$ (que em valor absoluto mede a assimetria) é diferente de zero, podendo ser positiva ou negativa, e, como o fator de homogeneidade h não depende de s (o que pode ocorrer é s depender de h), então a derivada parcial

$$\frac{\partial(q_1^* - q_2^*)}{\partial s} = \frac{c_1}{s^2(2-h)}$$

é positiva, o que significa que a diferença $q_1^* - q_2^*$ é crescente com relação ao parâmetro s , ou seja, quanto maior for o sobrepreço aplicado pela primeira empresa, maior será a diferença da quantidade produzida por ambas as empresas na situação de equilíbrio (maior será a assimetria do equilíbrio).

Varição da assimetria com relação ao grau de homogeneidade: Considerando o sobrepreço $s = s(h)$, isto é, s (possivelmente) dependente de h , e derivando a diferença $q_1^* - q_2^*$ com relação a h , obtém-se

$$\frac{\partial(q_1^* - q_2^*)}{\partial h} = \frac{c_1(2-h)\frac{\partial s}{\partial h} + s(sc_2 - c_1)}{s^2(2-h)^2}. \quad (3)$$

Sendo seu denominador positivo, o sinal da derivada parcial $\partial(q_1^* - q_2^*)/\partial h$ é igual ao sinal de seu numerado $c_1(2-h)\frac{\partial s}{\partial h} + s(sc_2 - c_1)$.

Particularmente interessante é o caso em que s não depende de h ; se assim o é, então $\frac{\partial s}{\partial h} = 0$ e o sinal da derivada parcial $\partial(q_1^* - q_2^*)/\partial h$ é o mesmo da diferença $sc_2 - c_1$, que por sua vez determina o sinal de $q_1^* - q_2^*$. Portanto, se o sobrepreço s não depende do grau de homogeneidade h , então tem-se:

- i. se $q_1^* - q_2^* > 0$ (equivalentemente $c_1 < sc_2$), então esta diferença é crescente com relação a h ;
- ii. se $q_1^* - q_2^* < 0$ (equivalentemente $c_1 > sc_2$), então esta diferença é decrescente com relação a h .

A seguir, a análise de um caso particularmente interessante em que s depende de h , estando ambos os parâmetros relacionados através de uma simetria gerada pela ordem de sobrepreço.

Sobrepreço correspondente ao grau de homogeneidade: Apesar do parâmetro h não interferir no sinal da diferença $q_1^* - q_2^*$, importa interpretar a razão essencial de sobrepreço correspondente a este parâmetro. Neste sentido, em similaridade à interpretação no caso de sobrepreço proporcionado integralmente por custos, diz-se que o sobrepreço corresponde integralmente ao grau de homogeneidade se $s + h = 2$. Para melhor compreensão do que isto significa, lembra-se que $s = 1 + k/100$. Assim, à condição $s + h = 2$ equivale $h = 1 - k/100$. Isto quer dizer que o sobrepreço da ordem de $k\%$ é aplicado no cenário em que o fator de homogeneidade dos produtos é da ordem de $(100 - k)\%$, ou seja, os produtos são $(100 - k)\%$ similares ou substituíveis (um pelo outro). Neste caso, a restrição $0 \leq h \leq 1$ impõe $1 \leq s \leq 2$. Substituindo s por $2 - h$ na expressão (3) obtém-se:

$$\frac{\partial(q_1^* - q_2^*)}{\partial h} = \frac{(2-h)c_2 - 2c_1}{(2-h)^3}.$$

Portanto, se o sobrepreço corresponde integralmente ao grau de homogeneidade (conforme aqui definido), então, com respeito a h , a diferença $q_1^* - q_2^*$ é crescente se $2c_1 < (2 - h)c_2$, e é decrescente se $2c_1 > (2 - h)c_2$.

4. ANÁLISE DO QUOCIENTE DE EQUILÍBRIO

O quociente q_1^*/q_2^* é o fator que representa, na situação de equilíbrio do duopólio, o quanto mais (ou menos) a empresa E_1 produz que a empresa E_2 .

De acordo com a análise expandida na seção anterior, $q_1^*/q_2^* = 1$ se, e somente se, $c_1 = sc_2$. Já para $c_1 < sc_2$ tem-se $q_1^*/q_2^* > 1$, e para $c_1 > sc_2$ verifica-se $q_1^*/q_2^* < 1$.

Nos casos em que o quociente q_1^*/q_2^* não é constante igual a 1, interessa compreender seu comportamento com relação ao patamar do mercado, o que é medido pelo parâmetro N . Calculando explicitamente o quociente, através dos valores apresentados na Proposição 1, obtém-se

$$\frac{q_1^*}{q_2^*} = \frac{s(2 - h)N + shc_2 - 2c_1}{s(2 - h)N + hc_1 - 2sc_2}.$$

Observa-se que, independentemente dos valores das constantes de custo c_1 e c_2 , do grau de homogeneidade h e do sobrepreço s , o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q_1^*}{q_2^*} = 1.$$

Isto significa que, quando o patamar de mercado N cresce (indefinidamente), o ponto de equilíbrio do duopólio converge para um equilíbrio simétrico. Noutras palavras, independentemente da diferenciação dos produtos e de seus custos de produção e, especialmente, a despeito da prática de sobrepreço, se o mercado é suficientemente grande, então o ponto de equilíbrio do duopólio é próximo daquele em que as duas empresa dividem igualmente a produção. Isto demonstra que, em mercados suficientemente grandes, a prática de sobrepreço não altera significativamente o equilíbrio do duopólio.

5. OS BENEFÍCIOS NO PONTO DE EQUILÍBRIO

Uma vez que q_1^* e q_2^* se aproximam quando N tende ao infinito (independentemente dos demais parâmetros), é razoável intuir que, em tal cenário, o benefício $f_1(q_1^*, q_2^*)$ aproxima-se de $sf_2(q_1^*, q_2^*)$, já que as duas empresas tendem a dividir igualmente a produção e a primeira pratica sobrepreço s . Comprova-se esta intuição com o cálculo explícito que segue.

De início, nota-se que o sistema linear (2) que determina o par (q_1^*, q_2^*) pode ser reescrito sob a forma

$$\begin{cases} N - q_1^* - hq_2^* = q_1^* + c_1/s \\ N - hq_1^* - q_2^* = q_2^* + c_2 \end{cases}. \quad (4)$$

Estas relações entre q_1^* e q_2^* permitem calcular e expressar o benefício de cada empresa na situação de equilíbrio em função do próprio ponto de equilíbrio. De fato, das expressões (1) e do sistema linear (4) resulta

$$f_1(q_1^*, q_2^*) = q_1^*(s(N - q_1^* - hq_2^*) - c_1) = s(q_1^*)^2$$

$$f_2(q_1^*, q_2^*) = q_2^*(N - hq_1^* - q_2^* - c_2) = s(q_2^*)^2.$$

Segue-se que, conforme intuído, o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f_1(q_1^*, q_2^*)}{f_2(q_1^*, q_2^*)} = \lim_{N \rightarrow \infty} s \left(\frac{q_1^*}{q_2^*} \right)^2 = s.$$

Portanto, quando o patamar de mercado N cresce (indefinidamente), o ponto de equilíbrio do duopólio converge para o cenário em que as duas empresas dividem igualmente a produção e, além disso, a empresa que pratica sobrepreço desfruta de benefício da ordem do fator de sobrepreço acima do benefício da concorrente.

6. CONCLUSÕES

Propôs-se um modelo de duopólio em que duas empresas competem na quantidade produzida, considerando-se conjuntamente alguns fatores que enriquecem a análise, garantem certa generalidade e provocam assimetria: assumiu-se que os produtos podem não ser homogêneos (podendo variar de totalmente incomparáveis a substitutos perfeitos), que as empresas podem ter custos de produção distintos e, ainda, que uma das empresas pratica sobrepreço com relação ao considerado o preço ideal de mercado, fato que pode estar relacionado a repasse de custos, ao grau de homogeneidade dos produtos, às duas coisas, ou a coisa alguma, sendo, neste último caso, mera convicção ou tradição de empresa.

O duopólio proposto apresenta um único equilíbrio de Nash-Cournot, que pode ser expresso em termos de todos os parâmetros do modelo, isto é, os custos, o grau de homogeneidade, o sobrepreço e o patamar do mercado, o que permite analisar seu comportamento com respeito a cada parâmetro separadamente ou em conjunto.

Da análise do equilíbrio restou demonstrado que: (i) o equilíbrio é simétrico, isto é, corresponde ao cenário em que as empresas dividem igualmente a produção se, e somente se, o sobrepreço refere-se essencialmente a repasse de custos (no sentido definido neste artigo); (ii) nos casos em que o equilíbrio é assimétrico, quanto maior for o sobrepreço aplicado pela primeira empresa, maior será a diferença entre sua produção e o da empresa concorrente na situação de equilíbrio; (iii) com relação ao grau de homogeneidade, a diferença de produção pode ser crescente ou decrescente, dependendo do seu sinal e dele ser ou não razão essencial para a prática do sobrepreço.

Um segundo tipo de análise do equilíbrio, realizado do ponto de vista do patamar do mercado, demonstrou que, independentemente de quaisquer parâmetros do modelo, o ponto de equilíbrio em um mercado crescente tende a aproximar-se de um equilíbrio simétrico em que as empresas dividem igualmente a produção e, ademais, a empresa que pratica sobrepreço experimenta, quando do equilíbrio, benefício da ordem do fator de sobrepreço acima do benefício de sua concorrente.

ABSTRACT: This article proposes an asymmetric model of duopoly in which two companies compete in the quantity produced. The asymmetry comes from the hypothesis of product heterogeneity, different production costs and the practice of overprice by one of the companies. It is shown that the duopoly has a unique Nash-Cournot equilibrium, which is symmetrical if, and only if, the overprice refers essentially to the transfer of costs; in the other cases, although it is asymmetrical, when the market level increases (indefinitely), the equilibrium point converges to the scenario in which the companies divide the production, with the company that practices overprice enjoying benefit proportional to the overprice above the benefit of the other.

KeyWords: Duopoly; equilibrium; overprice; non-homogeneous products.

REFERÊNCIAS

- BORTOLOSSI, Humberto; GARBAGIO, Gilmar; SARTINI, Brígida. **Uma Introdução à Teoria Econômica dos Jogos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- CHAN, Yuk-Shee; LELAND, Hayne. **Prices and Qualities in Markets with Costly Information**. Review of Economic Studies, v. 49, n. 4, 499–516, Oct. 1982.
- FIANI, Ronaldo. **Teoria de Jogos: com aplicações em economia, administração e ciências sociais**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.
- NASH, John Forbes. **Non-cooperative games**. Annals of Mathematics, v. 54, p. 286–295, 1951.
- PATEIRO-RODRÍGUES, Carlos; PRADO-DOMÍNGUEZ, A. Javier; GARCIA-IGLESIAS, Jesús M.; BARREIRO-VIÑÁN, José M. **Duopolio con costos de cambio y de retención. Efectos sobre el excedente del consumidor y el bienestar social**. Investigación Económica, v. LXXIV, n. 292, p. 159–184, abril-junio 2015.
- SHAKED, Avner; SUTTON, John. **Relaxing Price Competition Through Product Differentiation**. Review of Economic Studies, v. 49, n. 1, p. 3–13, Jan. 1982.
- VIGOYA, Alejandro Ramírez. **Um equilíbrio Bayesiano de Nash: competencia a la Cournot bajo información asimétrica y productos diferenciados**. Revista Facultad Ciencias Económicas, Nueva Granada, v. XIX, n. 2, p. 61–72, Diciembre 2011.

Data da submissão: 30 Junho 2017.

Data do aceite: 2 Março 2018.