Análise da eficácia da variância e de medidas *Downside Risk* para formação de carteiras

Doi: 10.4025/enfoque.v35i3.31637

Mariane Bezerra Nóbrega
Mestre em Administração
Professora do Instituto Federal do Amapá
Programa de Pós-Graduação em Administração (PPGA) da UFPB
E-mail: mariuchanobrega@outlook.com

Márcio André Veras Machado
Doutor em Administração
Professor do Programa de Pós-Graduação em Administração (PPGA) da Universidade Federal da Paraíba e do Programa Multiinstitucional e Inter-regional de Pós-Graduação em Ciências Contábeis - UnB/UFPB/UFRN
E-mail: mavmachado@hotmail.com

Recebido em: 13.04.2016 Aceito em: 04.08.2016 2ª versão aceita em: 02.09.2016

RESUMO

O objetivo deste artigo é analisar a eficácia da variância e de medidas de *downside risk* para formação de carteiras de investimentos no mercado de ações brasileiro. Utilizando as metodologias de Ang (1975), Markowitz et al. (1993), Ballestero (2005), Estrada (2008) e Cumova e Nawrocki (2011), foi verificado qual o melhor método para resolução do problema de matriz assimétrica e endógena e, inspirando-se nos trabalhos de Markowitz (1952) e Lohre, Neumann e Winterfeldt (2010), foi constatada qual métrica de risco é mais indicada para a realização da alocação mais eficiente dos recursos disponíveis no mercado acionário do Brasil. A amostra utilizada foi composta pelas ações do IBrX 50, no período de 2000 a 2013. Os resultados indicaram que, ao empregar a semivariância como medida de risco assimétrico, caso o investidor possua meios para utilizar modelos mais requintados para resolução do problema da matriz de semivariância-cosemivariância assimétrica, será mais eficaz o modelo de Cumova e Nawrocki (2011). Além disso, a partir dos dados brasileiros, o VaR apresentou-se mais eficaz do que a variância e outras medidas de *downside risk* no que tange à minimização do risco de perda. Assim, dada a premissa de que o investidor possui preferências assimétricas em relação ao risco, a formação de carteiras de ações no mercado brasileiro é mais eficiente ao se utilizar critérios de minimização de *downside risk* do que a abordagem tradicional de média-variância.

Palavras-chave: Formação de carteiras; Variância; Semivariância; Cosemivariância*; Downside risk*.

Analysis of the effectiveness of the variance and Downside Risk measures for formation of investment portfolios

ABSTRACT

This paper aims to analyze the efficacy of variance and measures of downside risk for of formation of investment portfolios in the Brazilian stock market. Using the methodologies of Ang (1975), Markowitz et al. (1993), Ballestero (2005), Estrada (2008) and Cumova and Nawrocki (2011), sought to find what the best method to solve the problem of asymmetric and endogenous matrix and, inspired by the work of Markowitz (1952) and Lohre, Neumann and Winterfeldt (2010), intended to be seen which risk metric is most suitable for the realization of more efficient allocation of resources in the stock market in Brazil. The sample was composed of stocks of IBrX 50, from 2000 to 2013. The results indicated that when the semivariance was used as a measure of asymmetric risk, if the investor can use more refined models for solving the problem of asymmetric semivariance-cosemivariance matrix, the model of Cumova and Nawrocki (2011) will be more effective. Furthermore, from the Brazilian data, VaR had

[1]Artigo publicado no ANPCONT, 2015.

become more effective than variance and other measures of downside risk with respect to minimizing the risk of loss. Thus, taken the assumption that the investor has asymmetric preferences regarding risk, forming portfolios of stocks in the Brazilian market is more efficient when using criteria of minimizing downside risk than the traditional mean-variance approach.

Keywords: Portfolios; Variance; Semivariance; Cosemivariance; *Downside risk*.

1 INTRODUÇÃO

A Moderna Teoria das Carteiras (*Modern Portfolio Theory* – MPT) foi firmada pelo trabalho seminal de Harry Markowitz, em 1952, intitulado "*Portfolio Selection*" (LAI; YU; WANG, 2006; LI; QIN; KAR, 2010; KOLM; TÜTÜNCÜ; FABOZZI, 2014) e considera o investidor como sendo racional, avesso ao risco e maximizador de sua própria utilidade esperada. Desse modo, baseado, principalmente, em premissas sobre a distribuição dos retornos dos ativos e sobre o comportamento dos investidores, Markowitz (1952) tinha como principal objetivo diversificar carteiras de investimento, de forma a determinar uma composição que minimizasse o risco ou maximizasse o retorno esperado pelo investidor, dado que este é racional.

Ademais, com base em Markowitz (1952), os retornos esperados de ativos financeiros são tipicamente descritos estatisticamente pela sua média, enquanto o risco ou volatilidade é descrito pela variância (MARKOWITZ, 1959; BAE, 2014; KOLM; TÜTÜNCÜ; FABOZZI, 2014). Assim, a combinação de ativos com risco dentre o conjunto de todas as carteiras possíveis formará uma carteira eficiente, ao selecionar aqueles com o maior nível de retorno para o mínimo grau de risco (MARKOWITZ, 1952). A MPT aborda, basicamente, a otimização de carteiras baseada no equilíbrio entre risco e retorno sob uma curva de fronteira eficiente, encontrada por meio da combinação ótima (PINHEIRO; MATSUMOTO; TABAK, 2008; KOLM; TÜTÜNCÜ; FABOZZI, 2014), feita por meio da diversificação de ativos com reduzido nível de correlação.

Contudo, muitas críticas ao modelo surgiram, sendo que as principais estão relacionadas ao uso do desvio-padrão/variância como medida de risco e a suposições questionáveis (BERTSIMAS; LAUPRETE; SAMAROV, 2004; BOASSON; BOASSON; ZHOU, 2011). As críticas feitas ao uso do desvio-padrão ou da variância como medidas de risco estão intrinsecamente relacionadas à suposição de normalidade da distribuição de retornos, porque quando as distribuições dos retornos dos ativos são assimétricas, essas medidas são contestáveis, por supor que os investidores pesam a probabilidade de retornos negativos igualmente a retornos positivos ao formar suas carteiras (FISHBURN, 1977; GROOTVELD; HALLERBACH, 1999; BOND; SATCHELL, 2002; BERTSIMAS; LAUPRETE; SAMAROV, 2004; BOASSON; BOASSON; ZHOU, 2011). Muitos estudos têm indicado que as distribuições de retornos tendem a ser assimétricas na prática (HOGAN; WARREN, 1972; GROOTVELD; HALLERBACH, 1999; JARROW; ZHAO, 2006; LAI; YU; WANG, 2006; ESTRADA, 2008; CASTRO JUNIOR; SILVEIRA, 2009; BOASSON; BOASSON; ZHOU, 2011; BEARDSLEY; FIELD; XIAO, 2012; BRIEC; KERSTENS; WOESTYNE, 2013; DITRAGLIA; GERLACH, 2013), o que torna o desvio e a variância medidas contestáveis.

Nesse sentido, ao longo dos anos, as hipóteses consideradas por Markowitz (1952) foram sendo flexibilizadas, sobretudo através de modelos que consideram distribuições de retornos assimétricas, com probabilidades subjetivas à utilidade do investidor, utilizando abordagens de *downside risk*, que tem como base, sobretudo, os trabalhos de Roy (1952) e Markowitz (1959) e que impulsionaram a formação da Pós-Moderna Teoria das Carteiras (*Post-Modern Portfolio Theory* – PMPT). A perspectiva de *downside risk* assume que os investidores consideram o risco assimetricamente e, segundo Markowitz (1959), é mais susceptível de produzir uma solução melhor quando as distribuições de retornos não são normais.

Entre as medidas de risco consideradas sob a abordagem de *downside risk* estão: Semivariância (MARKOWITZ, 1959), *Lower Partial Variance* (BAWA, 1975), *Lower Partial Moment* (BAWA; LINDENBERG, 1977), *Value-at-Risk* (RISKMETRICS, 1996) e *Conditional Value-at-Risk* (ROCKAFELLAR; URYASEV, 2000). Além dessas, há uma ampla utilização

de medidas de assimetria e curtose e de outras medidas recentes utilizadas por autores como Lohre, Neumann e Winterfeldt (2010), como *loss penalty* e *maximum drawdown*. Deve-se mencionar, ainda, o Modelo alfa-t (FISHBURN, 1977), que também contribuiu para o desenvolvimento da medida genérica *Lower Partial Moment* (LPM), consolidada com base nas contribuições de Bawa (1975, 1978), Bawa e Lindenberg (1977) e Fishburn (1977). Essa medida LPM destaca-se, pois com base nela são derivadas outras medidas, como o semidesvio e a semivariância, podendo-se encontrar inclusive a variância, apesar de, diferentemente dessa última, pressupor apenas algumas premissas básicas, como aversão ao risco e preferência assimétrica por parte dos investidores.

Assim, evidências empíricas internacionais recentes mostram que a abordagem de *downside risk* apresenta desempenho superior, quando comparada à abordagem tradicional de média-variância (BOASSON; BOASSON; ZHOU, 2011; HAMRIN, 2011; DITRAGLIA; GERLACH, 2013; PLA-SANTAMARIA; BRAVO, 2013; GAO et al., 2014). Ademais, há uma crescente atenção para medidas de *downside risk* devido a fatores macroeconômicos, como crises financeiras, acordos da Basileia I e II, aumento do uso de derivativos na formação de carteiras e problemas de "caudas pesadas" nas distribuições de probabilidade de ativos de renda fixa (JARROW; ZHAO, 2006). Além disso, a utilização da semivariância parece ser consensualmente relevante para formação de carteiras, como mostram os trabalhos nacionais de Andrade (2006), Araújo e Montini (2011, 2012) e Pinheiro, Matsumoto e Tabak (2008) e os internacionais de Bond e Satchell (2002), Estrada (2008), Lohre, Neumann e Winterfeldt (2010), Boasson, Boasson e Zhou (2011), Cumova e Nawrocki (2011, 2014), Beardsley, Field e Xiao (2012), Pla-Santamaria e Bravo (2013) e Gao et al. (2014). Isso pode indicar sua importância e que a mesma supere outras medidas de *downside risk* na redução do risco.

Contudo, apesar do avanço da abordagem *downside risk* alcançado por meio da formalização da medida LPM, muitos autores vêm ressaltando as dificuldades para sua utilização. Os problemas relacionados aos modelos média-LPM envolvem, sobretudo, o fato da matriz de semivariância-cosemivariância ser assimétrica e endógena. Alguns dos pesquisados que têm proposto metodologias são: Hogan e Warren (1972, 1974), Ang (1975), Elton, Gruber e Padberg (1976), Nawrocki (1983) e Nawrocki e Staples (1989), Harlow (1991), Markowitz et al. (1993), Gilli e Këllezi (2000), Athayde (2001), Ballestero (2005), Estrada (2008) e Cumova e Nawrocki (2011). Independente da metodologia utilizada, nos estudos internacionais analisados, abordagens de *downside risk* apresentaram desempenho superior, no que se refere à escolha de ativos que formem as melhores fronteiras eficientes (ANG; CHUA, 1979; BOND; SATCHELL, 2002; BERTSIMAS; LAUPRETE; SAMAROV, 2004; BOASSON; BOASSON; ZHOU, 2011; HAMRIN, 2011; DITRAGLIA; GERLACH, 2013; PLA-SANTAMARIA; BRAVO, 2013; GAO et al., 2014), o que também ocorreu para estudos no Brasil (ANDRADE, 2006; ARAÚJO; MONTINI, 2011, 2012).

Dado o melhor desempenho de medidas de *downside risk* no mercado externo evidenciado pela literatura e a escassez de comparações tanto entre as medidas de risco para formação de carteira, quanto entre metodologias para solução do problema da matriz de cosemivariância no mercado brasileiro, faz-se necessário um exame empírico, na tentativa de responder a seguinte questão: qual a eficácia da tradicional medida de variância e de medidas de *downside risk* na otimização de carteiras de ações no mercado acionário brasileiro? Para responder a questão de pesquisa, tem-se como objetivo: analisar a eficácia de medidas tradicionais e de medidas de *downside risk* para formação de carteiras de investimentos no mercado de ações brasileiro, utilizando o modelo para solução do problema da matriz de semivariância-cosemivariância que apresentou menores valores para a semivariância.

Desse modo, utilizando as metodologias de Ang (1975), Markowitz et al. (1993), Ballestero (2005), Estrada (2008) e Cumova e Nawrocki (2011), foi verificado o melhor método para resolução do problema de matriz assimétrica e endógena e, inspirando-se nos trabalhos de Markowitz (1952) e Lohre, Neumann e Winterfeldt (2010), foi constatada qual a métrica de risco – variância, VaR, CVaR, semidesvio, semivariância, assimetria padronizada, assimetria robusta, *Loss Penalty* e *Maximum Drawdown* – mais indicada para a realização da alocação mais eficiente dos recursos disponíveis no mercado acionário do Brasil.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.1 AMOSTRA

O presente estudo utilizou dados de empresas listadas na BM&FBOVESPA, sendo a amostra utilizada composta pelas ações do IBrX 50. Esse índice foi escolhido porque, de acordo com a BM&FBOVESPA, calculado somente a partir de 1997, o objetivo do IBrX 50 é ser o indicador do desempenho médio das cotações dos 50 ativos de maior negociabilidade e representatividade do mercado de ações brasileiro, sendo um referencial para investidores e administradores de carteiras, tendo a vantagem operacional de ser mais facilmente reproduzido pelo mercado, quando comparado ao IBrX. A alta frequência de negociação dessas ações evita que os indicadores de análise passem por altas variações que poderiam dificultar a análise dos dados, sendo esse índice utilizado em diversos estudos nacionais. Os dados foram obtidos a partir do banco de dados da ECONOMATICA® e do site institucional da BM&FBOVESPA, e tratados por meio do *software* MATLAB®. Os retornos contínuos foram dados por $R_i = ln\left({P_t}/{P_{t-1}}\right)$, em que P_t é o preço da ação no tempo *t*, considerando uma tolerância de 2 dias para suprir a falta de dados de preços em dias específicos durante a série coletada. Além disso, em uma análise preliminar, além de verificar a curtose e a assimetria, foram realizados testes de normalidade de Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov e Jarque-Bera para as distribuições dos retornos das ações da amostra, cujos resultados indicaram a rejeição da hipótese de normalidade para todos os ativos a um nível de significância de 1% , justificando a utilização de métricas apropriadas para o controle do *downside risk*.

Para a primeira parte do trabalho, comparação entre alternativas para resolução do problema da matriz de cosemivariância, foram coletados preços diários de ações, para os anos de 2000 a 2013, e calculados os retornos diários contínuos para o período de 04/01/2000 a 30/12/2013 de ações das empresas presentes no IBrX 50 no último trimestre de 2013. Nessa etapa, o período amostral foi estendido ao máximo, de modo que permanecesse um número satisfatório de ações na carteira. Foram excluídas as empresas que não possuíam cotações disponíveis para todo o período utilizado, resultando em um total de 17 ações com 3466 observações para cada uma. O total de ações escolhido justifica-se, pois estudos de Evans e Archer (1968), Fisher e Lorie (1970) e Elton e Gruber (1977) indicam que em torno de 10 ativos a carteira já está bem diversificada.

Para a segunda parte, comparação entre métricas de risco simétrico e assimétrico, foram coletados preços diários, no período entre janeiro de 2010 a dezembro de 2013, de ações das empresas presentes no IBrX 50 e do próprio índice, que foi utilizado como parâmetro, e calculados os retornos diários contínuos. O período escolhido justifica-se, visto que se necessitava das participações de todas as ações no IBrX 50 para comparação entre as composições das carteiras formadas e a composição do índice, sendo que o período total foi dividido em trimestres, sobretudo para levar em consideração possíveis modificações da composição do índice e na tentativa de redução do *tracking error*. Assim, foi analisado um total de 16 trimestres e 77 ações, sendo que foram utilizadas cerca de 50 para cada trimestre, conforme as mudanças de composição do IBrX 50. A abordagem metodológica e de análise utilizada na segunda parte deste trabalho teve como base o estudo de Lohre, Neumann e Winterfeldt (2010).

2.2 METODOLOGIAS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA MATRIZ DE COSEMIVARIÂNCIA

2.2.1 Modelo de Ang (1975)

Para o entendimento de seu modelo, Ang (1975) inicialmente define a semivariância como:

$$SV_j = E\left[\min\left(\sum_{i=1}^{n} R_{i,j}X_i - \tau, 0\right)\right]^2 \qquad (1)$$

Em que:

$R_{i,j}$ = Retorno contingente para o ativo i no estado j;

X_i = Participação do ativo i na carteira;

τ = Retorno alvo.

Segundo Ang (1975), pode-se aproximar a Equação 1 pelo desvio semilinear, *proxy* linear de risco usualmente conhecida como semidesvio, conforme a Equação 2:

$$SL_j = E\left[\min\left(\sum_{i=1}^{n} R_{i,j}X_i - \tau, 0\right)\right] \quad (2)$$

O risco total da carteira SL_T é calculado como a média ponderada do $SL_j's$ em todos os estados para cada ativo i, sendo $P_j's$ a probabilidade estimada de cada estado j. Ang (1975) explica que, utilizando os retornos *ex post*, essa probabilidade seria simplesmente de ocorrência de cada período *j*, calculada em média. Definindo-se -$SL_j = Y_j$, tem-se o risco total da carteira como:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j Y_j = Y_T = -SL_T \quad (3)$$

Dada a definição linear de risco, pode-se modificar o modelo de carteira E-S para o modelo E-SL (*expected value - semilinear deviation*), obtendo-se a função objetivo presente na Equação 4.

$$\min Y_T - \lambda \sum_{i=1}^{n} E(R_i)\, X_i \quad (4)$$

Sujeito à:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} R_{i,j}X_i - \tau\right) + Y_j = 0$$

em que *j* = 1, 2, ..., *m* estados (5)

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \quad (6)$$

$$X_i \geq 0, \forall i \quad (7)$$

$$Y_j \geq 0, \forall_j \quad (8)$$

Em que:

λ = *Trade-off* entre risco e retorno;

$E(R_i)$ = Retorno esperado para o ativo i;

X_i = Participação do ativo i na carteira;

$R_{i,j}$ = Retorno contingente para o ativo i no estado j;

τ = Retorno alvo.

O risco para cada estado j é expresso em separado como uma restrição linear.

2.2.2 Modelo de Markowitz et al. (1993)

Markowitz et al. (1993) iniciam sua metodologia, descrevendo o problema de otimização de carteiras de média-variância como o problema de programação quadrática paramétrica, ou seja:

$$\min \sum_{i,j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \quad (9)$$

Sujeito à:

$$\sum_{i=1}^{n} E(R_i)\, X_i = \tau \qquad (10)$$

$$AX = b \qquad (11)$$

$$X_i \geq 0 \quad \forall\ \tau \text{ em } [\tau_{min}, \tau_{max}] \qquad (12)$$

Em que:

X_i e X_j = Participação do ativo i e do ativo j na carteira, respectivamente;

σ_{ij} = Covariância entre os ativos i e j;

$E(R_i)$ = Retorno esperado para o ativo i;

τ = Retorno alvo;

τ_{max} = Máximo possível de τ;

τ_{min} = τ da carteira eficiente com mínima variância (*V*);

A e *b* = Matriz *m* x *n* e vetor de *m* restrições lineares, respectivamente.

Sendo R_c o retorno esperado da carteira no período t para $t = 1$ a T, segundo Markowitz et al. (1993), a semivariância abaixo do retorno alvo pode ser definida como:

$$SV(X) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} R_{ti}X_i - \tau\right)^{-}\right\}^2 \qquad (13)$$

Assumindo-se $\sum_{i=1}^{n} R_{ti}X_i - \tau$ como sendo x, se tem que $x^- = \min(x, 0)$. Considera-se R_{ti} o retorno do título i para o período histórico t com $i = 1$ a n e $t = 1$ a T.

Nesse sentido, o problema pode ser reescrito como:

$$\min SV\ (X) \qquad (14)$$

Sujeito às mesmas restrições da Equação 9. Em que todos os parâmetros têm o mesmo significado que na Equação 9, exceto que τ_{min} é o τ da carteira eficiente com mínima SV.

Após especificarem o algoritmo de linha crítica, Markowitz et al. (1993) mostram que a aplicação do mesmo diretamente ao problema média-semivariância não será computacionalmente eficiente, devido à introdução de $2T$ novas variáveis. Dessa maneira, reformula-se o problema da Equação 9, calculando-se, inicialmente, a variável Y_t, conforme a Equação 15:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{T}}\big(R_{ti} - E(R_i)\big)X_i \qquad (15)$$

para $t = 1$ a T

Em que:

R_{ti} = Retorno do título i para o período histórico t;

$E(R_i)$ = Retorno esperado para o título i;

X_i = Participação do título i na carteira.

Com base nisso e substituindo-se a restrição $\sum_{i=1}^{n} E(R_i)\, X_i = \tau$ na função objetivo $SV(X)$, reformula-se o problema, obtendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\min \sum_{t=1}^{T} (Y_t^-)^2 \qquad (16)$$

Sujeito às mesmas restrições da Equação 9, com a restrição adicional vista na Equação 15.

Para se ter uma função objetivo quadrática, tem-se $Z_t = Y_t^-$ para $t = 1$ a T, sendo o problema:

$$\min \sum_{t=1}^{T} Z_t^2 \quad (17)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{n} E(R_i)\, X_i = \tau \quad (18)$$

$$BX - Y + Z = 0 \quad (19)$$

$$AX = b \quad (20)$$

$$X_i, Y_i, Z_i \geq 0, \quad \forall\, \tau \text{ em } [\tau_{min}, \tau_{max}] \quad (21)$$

Em que *B* é uma matriz *T* x *n* definida por:

$$B = \frac{1}{\sqrt{T}} \begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{T1} & \cdots & R_{Tn} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{T}} \begin{pmatrix} \tau_1 & \cdots & \tau_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_1 & \cdots & \tau_n \end{pmatrix} \quad (22)$$

2.2.3 Modelo de Ballestero (2005)

Ballestero (2005) inicialmente define uma variável M como a carteira de mercado, que reflete o retorno sobre o mercado de ações como um todo, e o valor médio da carteira de mercado, E_M, que é determinado segundo a Equação 23.

$$E_M = \sum_{i=1}^{n} E(R_i)\, X_{iM} \quad (23)$$

Em que:

$E(R_i)$ = Retorno esperado para o ativo i;

X_{iM} = Participação do ativo i na carteira de mercado, com $i = 1, 2, \ldots, n$.

Já a variância da carteira de mercado é dada conforme a Equação 24.

$$\sigma_M^2 = (X_{1M}, \ldots, X_{iM}, \ldots, X_{nM}) \{V_{ij}\} (X_{1M}, \ldots, X_{iM}, \ldots, X_{nM})' \quad (24)$$

Em que:

$(X_{1M}, \ldots, X_{iM}, \ldots, X_{nM})$ = Vetor linha de pesos dos ativos da carteira de mercado;

$\{V_{ij}\}$ = Matriz de covariâncias;

$(X_{1M}, \ldots, X_{iM}, \ldots, X_{nM})'$ = Vetor transposto de pesos dos ativos da carteira de mercado.

Para que se chegue a semivariância abaixo do valor médio $SV_{ij}(<)$, precisa-se primeiro encontrar a semivariância da carteira de mercado acima do valor médio. Assim, os *n* retornos mensais observados para a carteira de mercado são classificados em dois grupos: o primeiro daqueles maiores que o valor médio E_M, ou seja, com retornos que satisfaçam $\tilde{R}_M > E_M$; e o segundo, daqueles menores ou iguais ao valor médio E_M. Para cada retorno satisfazendo $\tilde{R}_M > E_M$, tem-se:

$$\Delta = \left(\tilde{R}_M - E_M\right)^2 \quad (25)$$

Em que:

$\tilde{R}_M$ = Retorno aleatório da carteira de mercado.

Em seguida, define-se a semivariância da carteira de mercado acima do valor médio com base na Equação 26, sendo a soma estendida a todos os retornos acima do valor médio E_M.

$$\mathrm{SV_M}\left(\tilde{\mathrm{R}}_\mathrm{M} > \mathrm{E_M}\right) = \sum {}^{\Delta}/_{\mathrm{n}} \quad (26)$$

Um pressuposto considerado por Ballestero (2005) é a validade da equação de regressão beta de Sharpe (1964), o β do CAPM, obtido por:

$$\beta_i = {}^{cov(i,M)}\Big/_{\sigma_M^2} \quad (27)$$

Em que:

$Cov(i, M)$ = Covariância de cada ativo i-ésimo com a carteira de mercado;

σ_M^2 = Variância da carteira de mercado.

Considera-se que cada i-ésimo ativo tem uma covariância com a carteira de mercado, denotado pela Equação 28.

$$Cov(i,M) = (X_{1M}, \dots, X_{iM}, \dots, X_{nM})\left\{V_{ij}\right\} \quad (28)$$

Assim sendo, a matriz de semivariância abaixo do valor médio da carteira é dada pela Equação 29:

$$\left\{SV_{ij}(<)\right\} = \{V_{ij}\} - \beta_i\beta_j SV_M\left(\tilde{R}_M > E_M\right) \quad (29)$$

Desse modo, sendo $X_1, \dots, X_j, \dots, X_n$ o vetor de pesos da carteira, o modelo de programação quadrática paramétrica é especificado de acordo com a Equação 30:

$$\min(X_{1M}, \dots, X_{iM}, \dots, X_{nM})\left\{SV_{ij}(<)\right\} \quad (30)$$
$$(X_{1M}, \dots, X_{iM}, \dots, X_{nM})'$$

Sujeito à:

$$\sum_{i=1}^{n} E(R_i)\, X_i = \tau \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \quad (32)$$

$$X_i \leq X_0 \quad (33)$$

Para todos os i-ésimos e j-ésimos ativos, juntamente com as restrições de não-negatividade, em que:

X_i = Participação do ativo i na carteira;

X_j = Participação do ativo j na carteira;

$E(R_i)$ = Retorno esperado para o ativo i;

$E(R_j)$ = Retorno esperado para o ativo j;

τ = Retorno alvo;

X_0 = Parâmetro que garante um nível desejável de diversificação da carteira;

$\left\{SV_{ij}(<)\right\}$ = Matriz de cosemivariâncias, equivalente à matriz de covariância no modelo E-V.

Neste trabalho, X_0 será considerado como 100%, ou seja, assume-se uma restrição de investimento total. Assim, no modelo de média-semivariância proposto por Ballestero (2005) cada coeficiente de $\left\{SV_{ij}(<)\right\}$

representa as covariâncias no modelo E-V.

2.2.4 Modelo de Estrada (2008)

O modelo de Estrada (2008), inicialmente, descreve a cosemivariância (CS), baseada em Hogan e Warren (1974), conforme a Equação 34.

$$CS_{i,j} = E[(R_i - R_f) \cdot Min\,(R_j - R_f, 0)] \quad (34)$$

Em que:

R_f = Retorno do ativo livre de risco;

R_i e R_j = Retorno do ativo i e retorno do ativo j, respectivamente;

Entretanto, Estrada (2008) simplifica a Equação 34, além de assumir um retorno alvo qualquer, τ, ao invés do retorno do ativo livre de risco, R_f. Assim, o modelo de Estrada (2008) é dado pelas Equações 35 e 36, com as quais pretende-se a correção do problema de matriz de cosemivariância endógena e assimétrica.

$$CS_{i,j} = E\{Min(R_i - \tau, 0) \cdot Min\,(R_j - \tau, 0)\} \quad (35)$$

$$CS_{i,j} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[Min(R_{it} - \tau, 0) \cdot Min\,(R_{jt} - \tau, 0)] \quad (36)$$

Em que:

T = Número de observações;

τ = Retorno alvo;

R_i e R_j = Retorno do ativo i e retorno do ativo j, respectivamente;

R_{it} e R_{jt} = Retorno do ativo i e retorno do ativo j, respectivamente, para t observações.

Assim, segundo Estrada (2008), a minimização da semivariância é dada conforme a Equação 37, porém, utilizando-se a formulação da matriz de cosemivariância dada pelas Equações 35 e 36.

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} CS_{ij}\, X_i X_j \quad (37)$$

Sujeito à:

$$\sum_{i=1}^{n} E(R_i)\, X_i = \tau \quad (38)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \quad (39)$$

$$X_i \geq 0, \forall\, i \quad (40)$$

Em que:

$E(R_i)$ = $E(R_{it})$ = Retorno esperado para o ativo i;

X_i = Participação do ativo i na carteira;

τ = Retorno alvo.

2.2.5 Modelo de Cumova e Nawrocki (2011)

Para Cumova e Nawrocki (2011), a semivariância da carteira pode ser escrita como:

$$SV = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j CS_{ij} \quad (41)$$

Em que:

X_i e X_j = Participação do ativo i e do ativo j na carteira, respectivamente;

CS_{ij} = Cosemivariância entre os títulos i e j.

Assumindo-se τ um determinado retorno alvo, R_{it} o retorno do ativo i no período t e a cosemivariância entre os títulos i e j representada pela Equação 42, tem-se que $CS_{ij} \neq CS_{ji}$.

$$CS_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \tau)[Min(R_{jt} - \tau, 0)] \quad (42)$$

Após a prova de Markowitz et al. (2006) de existência de uma solução analítica para o problema da matriz de assimétrica, Cumova e Nawrocki (2011) apresentaram a forma de transformação da matriz assimétrica para simétrica, o que consiste na seguinte prova:

$$x'Ax = x'\left[\frac{A + A'}{2}\right]x \quad (43)$$

Ademais, para o caso da semivariância, pode-se afirmar que *A* representa a matriz de cosemivariâncias entre os ativos da carteira, que passa a ser dada por $\left[\frac{A+A'}{2}\right]$ para o cálculo da Equação 41.

Além disso, segundo Cumova e Nawrocki (2011), calcula-se o retorno esperado para a carteira, τ, conforme a Equação 44.

$$\sum_{i=1}^{n} E(R_i)\, X_i = \tau \quad (44)$$

Em que:

$E(R_i)$ = Retorno esperado para o ativo i;

X_i = Participação do ativo i na carteira.

Ao encontrar a matriz de cosemivariância simétrica e exógena, o problema de programação quadrática apresentado por Cumova e Nawrocki (2011) pode ser declarado como:

$$\min \alpha = SV - \lambda E(\tau) \quad (45)$$

Sujeito à:

$$\sum X_i = 1 \quad (46)$$

$$X_i \geq 0 \quad (47)$$

Em que:

$E(\tau)$ = Parâmetro positivo que especifica o retorno alvo esperado para a carteira;

λ = dS / dE, inclinação da fronteira eficiente de uma carteira específica;

X_i = Participação do ativo i na carteira.

2.3 COMPARAÇÃO ENTRE ALTERNATIVAS PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA MATRIZ DE COSEMIVARIÂNCIA

As carteiras formadas na primeira parte do trabalho foram comparadas através do *Root Mean Squared Dispersion Index* (RMSDI), proposto por Grootveld e Hallerbach (1999), conforme a Equação 48. Os resultados do índice estão entre 0 e 1, sendo carteiras muito semelhantes e carteiras nada semelhantes, respectivamente.

$$RMSDI = \sqrt{\frac{1}{t \cdot n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{t}(x_{ij}^{M_x} - x_{ij}^{M_y})^2} \quad (48)$$

Em que:

t = Tamanho da amostra;

n = Número de ativos na carteira;

$x_{ij}^{M_x}$ e $x_{ij}^{M_y}$ = Proporção de cada ativo na carteira utilizando o modelo *x* e o modelo *y*, respectivamente.

Após isso, foram formadas 100 carteiras para cada metodologia de risco simétrico e assimétrico, iniciando pela carteira com menor retorno até a carteira com maior retorno quando utilizada a metodologia de média-variância, para a determinação de cada fronteira eficiente, que indicou qual foi capaz de minimizar o risco para dado retorno esperado.

2.4 FORMAÇÃO DAS CARTEIRAS

Como mencionado anteriormente, esta parte do trabalho está baseada no estudo de Lohre, Neumann e Winterfeldt (2010). Assim, buscou-se minimizar os riscos de acordo com a respectiva definição de risco simétrico ou assimétrico, com as exigências de que todas as soluções de otimização excedessem a expectativa de retorno do *benchmark* e satisfizessem um determinado limite máximo de *tracking error*. O limite trimestral de *tracking error* considerado foi de 5%, representado pela restrição $\tau(x) = \sqrt{(x - x_{BM})^T C (x - x_{BM})} \leq \tau_{max}$, para um dado vetor de pesos da carteira de *benchmark*, x_{BM}, e de pesos otimizados, *x*. Já o retorno esperado médio de cada carteira otimizada, $E(R_t)$, teve que ser maior ou igual ao retorno esperado do *benchmark* (R_{BM}), o que impõe a seguinte restrição: $E(R_t) \geq R_{BM}$.

A análise do grau em que as diferentes abordagens de otimização obtiveram sucesso na mitigação do *downside risk* foi feita com base na comparação da estratégia otimizada inicialmente com o *benchmark*, verificando se este é superado em termos de dimensão de risco que deve ser minimizado. Para tanto, calculou-se uma taxa de redução de risco, que expressa o quanto o risco foi reduzido nas carteiras otimizadas em relação ao IBRX 50 para as mesmas medidas de risco (pleno e *downside*); uma taxa de acerto, que demonstra a porcentagem de períodos em que o risco das carteiras otimizadas apresentou valores inferiores ao do IBRX 50, ou seja, em quantos dos 16 trimestres analisados foi possível reduzir o risco em relação ao *benchmark*; e uma taxa de ganho, no intuito de captar a porcentagem de períodos (trimestres) em que o retorno das carteiras otimizadas foi superior ao retorno do IBRX 50. Dado que as medidas utilizadas possuem crescimento distinto, não podendo ser comparadas diretamente, a comparação das estratégias de risco simétrico e assimétrico entre si foi feita através do cálculo de *tracking errors* mútuos das mesmas.

A medida tradicional utilizada trata-se da variância, apresentada segundo o modelo de Markowitz (1952), enquanto as medidas de *downside risk* incluem: semidesvio, semivariância, assimetria padronizada, assimetria robusta, VaR, CVaR, *Loss Penalty* e *Maximum Drawdown*, cujas funções objetivo pretendiam minimizá-las. As restrições adicionadas às otimizações incluem restrições de: investimento total, ou seja, a soma dos pesos deve ser igual a 1; não-negatividade, que indica que não existe alavancagem/venda a descoberto nesse processo; nos problemas de otimização com VaR e CVaR, adota-se o quantil ao nível de *p*=0,75; e, por fim, na otimização com a assimetria (padronizada ou robusta), deve-se restringir a volatilidade para $\sigma(x) = \sqrt{x^T C x} \leq \sigma_{BM}$.

3 ANÁLISE DOS DADOS

3.1 COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS

No que se refere a comparação dos modelos, as fronteiras eficientes e os pesos comparados através do RMSDI foram obtidos considerando 100 portfólios, com os 17 ativos da amostra. A Tabela 1 evidencia o RMSDI entre a composição das carteiras com os cinco modelos analisados.

Tabela 1 – RMSDI para cada metodologia.

Modelos	Ang (1975)	Markowitz et al. (1993)	Ballestero (2005)	Estrada (2008)	Cumova e Nawrocki (2011)
Ang (1975)	-				
Markowitz et al. (1993)	0,007601	-			
Ballestero (2005)	0,012134	0,010231	-		
Estrada (2008)	0,013945	0,007850	0,013261	-	
Cumova e Nawrocki (2011)	0,010466	0,003679	0,010305	0,006997	-

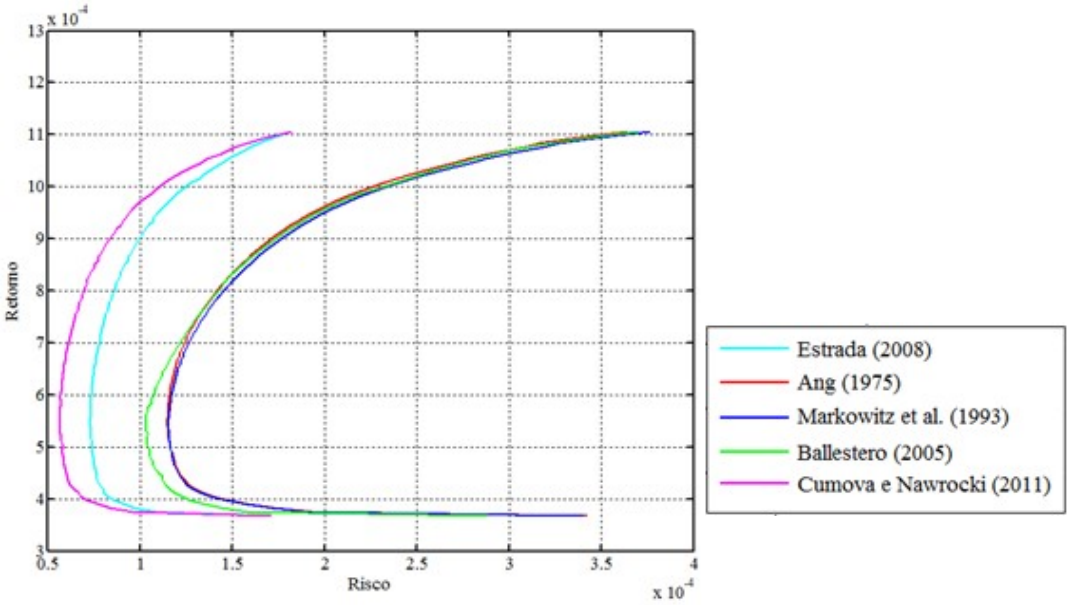
Fonte: elaboração própria.

No período analisado, percebe-se o menor grau de diferenciação entre as carteiras nos modelos de Markowitz et al. (1993) e Cumova e Nawrocki (2011), cujo índice foi de cerca de 0,0037, e o maior grau entre Ang (1975) e Estrada (2008), que apresentou valor de 0,0139. É interessante perceber essas diferenças, pois ambos os modelos conceituam como risco somente o lado das perdas, o que demonstra que a forma de se chegar até a função objetivo pode realmente afetar os resultados das composições das carteiras, apresentando alocações diferentes. Chega-se a essa conclusão, visto que não se pode afirmar que a diferença entre os RMSDI's esteja relacionada aos retornos das carteiras, dado que os mesmos foram fixados em uma mesma escala para todos os modelos. Contudo, de forma geral, percebe-se que o RMSDI apresentou valores bem mais próximos a zero do que a um, o que indica que as metodologias formaram carteiras muito semelhantes.

Ao contrário da afirmação de Estrada (2008), de que não há diferenças nas carteiras otimizadas ao mudar-se a medida de risco utilizada, percebeu-se que seu modelo não apresentou as carteiras mais semelhantes às carteiras dos demais modelos. Esse resultado pode indicar possíveis problemas relacionados ao modelo proposto por Estrada (2008), o que já era evidenciado na literatura, como Cheremushkin (2009), que afirmou que a cosemivariância de Estrada (2008) trata-se de uma má especificação da medida original de Hogan e Warren (1972). Por outro lado, isso pode indicar que o modelo de Nawrocki e Cumova (2011) não possui viés errôneo da medida original de cosemivariância, visto que o mesmo também é derivado do modelo de Hogan e Warren (1972) e apresentou baixos RMSDI's.

Além do RMSDI, foram formadas fronteiras eficientes para cada uma das metodologias, no intuito de reforçar quais os modelos são mais semelhantes e mais diferentes e quais são capazes de minimizar mais o risco, dado um mesmo nível de retorno. A Figura 1 apresenta a comparação das fronteiras eficientes das abordagens *expected value - semivariance* (E-S) dos cinco modelos.

Figura 1 – Fronteiras Eficientes para todas as metodologias.



Fonte: elaboração própria.

De forma complementar, para auxiliar a análise das diferenças entre os modelos, pode-se ver o retorno e o menor risco para cada modelo por meio da Tabela 2, na qual se percebe o risco inerente a cada modelo para um mesmo nível de retorno (0,0569%), no caso de uma única carteira formada.

Tabela 2 – Carteira de mínimo *downside risk* para cada metodologia.

	Ang (1975)	Markowitz et al. (1993)	Ballestero (2005)	Estrada (2008)	Cumova e Nawrocki (2011)
Risco	0,0115%	0,0116%	0,0104%	0,0073%	0,0057%

Fonte: elaboração própria.

Ao se observar o nível de risco nos gráficos das fronteiras eficientes da Figura 1 conjuntamente com os valores da Tabela 2, percebe-se que a metodologia média-semivariância foi mais eficaz quando utilizado o modelo de Cumova e Nawrocki (2011), que foi capaz de atingir um nível de risco de 0,0057% para um mesmo nível de retorno (0,0569%). Essa diferença revela que um investidor de preferências assimétricas em relação ao risco pode garantir uma maior proteção de seus investimentos, ao utilizar a abordagem de média-semivariância de Cumova e Nawrocki (2011) para definir os portfólios eficientes. Dada a evolução dos modelos, esse resultado já era esperado, visto que o modelo de Cumova e Nawrocki (2011) trata-se de uma especificação derivada do modelo de Hogan e Warren (1972), que já havia sido comparado com o de Ang (1975) e reformulado por Estrada (2008), ou seja, subtende-se que seja uma forma melhorada dos demais trabalhos. Esse resultado está de acordo com os achados de Araújo e Montini (2012), que também evidenciaram uma superioridade do modelo de Cumova e Nawrocki (2011) em relação ao modelo de Estrada (2008).

É interessante observar a magnitude da diferença entre as fronteiras eficientes. Dado que o RMSDI indica isoladamente as semelhanças/diferenças entre as proporções de capital investidas em cada ativo, ou seja, compara a alocação de investimentos nas carteiras, e a fronteira eficiente leva em consideração, também, o risco e o retorno das carteiras, o RMSDI pode complementar a

análise das fronteiras eficientes, indicando se há diferenças em escolher um ou outro modelo.

Assim, verificou-se que os modelos mais semelhantes, cujas fronteiras eficientes localizaram-se mais próximas uma da outra, foram Ang (1975) e Markowitz et al. (1993), que também localizaram-se bastante próximas a de Ballestero (2005), e, mais à esquerda do gráfico, as fronteiras obtidas pelos modelos de Estrada (2008) e Cumova e Nawrocki (2011), que foram mais eficientes. Por outro lado, as maiores diferenças em relação às fronteiras foram entre dois grupos de modelos, o primeiro consta de Cumova e Nawrocki (2011) e Estrada (2008), que se localizou no extremo esquerdo do gráfico (sendo mais eficientes) e o segundo, Ang (1975) e Markowitz et al. (1993), cujas fronteiras localizaram-se no extremo direito do gráfico (sendo menos eficientes). Além disso, com base na Figura 1, confirmam-se as diferenças encontradas pelo RMSDI entre os modelos de Ang (1975) e Estrada (2008). Apesar disso, os resultados indicam que um investidor com aversão ao risco assimétrico não teria grandes diferenças ao tomar como base qualquer um dos cinco modelos para sua decisão de investimento.

3.2 COMPARAÇÃO ENTRE AS MEDIDAS DE RISCO

Para a comparação entre as medidas de risco utilizadas nas otimizações, foram calculadas três taxas: a taxa de redução de risco, a taxa de acerto e a taxa de ganho, cujos resultados estão mostrados na Tabela 3.

Tabela 3 – Comparação das abordagens com o *benchmark.*

Medida	IBRX 50	Carteiras Otimizadas	Taxa de redução de risco	Taxa de Acerto	Taxa de Ganho
Variância	0,000171	0,000077	-33%	94%	68,75%
VaR	0,007611	-0,022196	-401%	100%	75,00%
CVaR	0,051369	-0,141955	-394%	100%	12,50%
Semidesvio	-0,004898	-0,013931	194%	100%	6,25%
Semivariância	0,000086	0,000017	-65%	94%	87,50%
Loss Penalty	1,000084	1,000037	-200%	0%	87,50%
Assimetria Padronizada	-0,054719	-1,502510	72%	100%	12,50%
Assimetria Robusta	-0,073900	-0,019035	-68%	44%	0,00%
Maximum Drawdown	0,057874	0,029115	-42%	94%	37,50%

Fonte: elaboração própria.

Ao analisar a Tabela 3, observa-se que variância média diária do IBRX 50 em todos os trimestres é de 0,0171%, enquanto a carteira otimizada apresenta uma variância de 0,0077%. Isso representa uma taxa de redução de risco média de 33%, sendo a variância a medida que menos superou o *benchmark* em termos de redução de risco, quando comparada com as demais medidas. Esse resultado (superioridade das medidas de *downside risk* no que tange à redução do risco) vai ao encontro dos resultados encontrados por Hogan e Warren (1972), Bawa (1975), Bawa e Lindenberg (1977), Ang e Chua (1979), Price, Price e Nantell (1982), Bond e Satchell (2002), Bertsimas, Lauprete e Samarov (2004), Jarrow e Zhao (2006), Lai, Yu e Wang (2006), Li, Qin e Kar (2010), Aracioğlu, Demircan e Soyuer (2011), Boasson, Boasson e Zhou (2011), Hamrin (2011), Beardsley, Field e Xiao (2012), Briec, Kerstens e Woestyne (2013), Ditraglia e Gerlach (2013), Pla-Santamaria e Bravo (2013), Bae (2014), Cumova e Nawrocki (2014) e Gao et al. (2014).

Por outro lado, as maiores reduções do risco estiveram relacionadas ao VaR e ao CVaR, que reduziram cerca de 400% mais o risco em relação ao IBRX 50. Levando-se em consideração distribuições conjuntas de retornos assimétricas, há algumas críticas na literatura com relação à utilização do VaR, visto que, apesar de definir a perda máxima que uma carteira de investimentos pode sofrer com um determinado nível de confiança, a

mesma não fornece informações sobre a extensão da cauda das distribuições. O CVaR é considerado uma boa medida alternativa para o VaR, pois representa a expectativa de perdas excedentes ao mesmo, dado um certo nível de confiança. Contudo, tanto o VaR quanto o CVaR apresentaram um desempenho satisfatório na redução do risco das carteiras com ativos brasileiros, o que reflete a sua ampla utilização no mercado.

A semivariância, medida que se esperava ter melhor desempenho, dado os resultados obtidos, sobretudo na literatura internacional, reduziu, em média, 65% do risco, em relação ao *benchmark*. Apesar de não ter sido a maior redução, a semivariância apresentou-se superior à variância, como esperado que sua minimização acarretasse em uma maior proteção em relação à perda, o que está de acordo com os resultados de trabalhos semelhantes nacionais, como Andrade (2006), Araújo e Montini (2011, 2012) e Pinheiro, Matsumoto e Tabak (2008) e internacionais, como Bond e Satchell (2002), Estrada (2008) , Lohre, Neumann e Winterfeldt (2010), Boasson, Boasson e Zhou (2011), Cumova e Nawrocki (2011), Beardsley, Field e Xiao (2012), Pla-Santamaria e Bravo (2013), Cumova e Nawrocki (2014) e Gao et al. (2014). Ademais, com exceção da *loss penalty* e da assimetria robusta, as medidas obtiveram uma taxa de acerto média próxima a 100%, o que indica que, em quase todos os trimestres, o risco das carteiras otimizadas foi menor do que o do IBrX 50.

Em relação à taxa de ganho, os resultados mostram que as abordagens que apresentaram retorno superior ao do IBrX 50 em um maior número de períodos foram a semivariância e *loss penalty*, que superaram o retorno do índice, em média, em 87,5% dos períodos analisados. O percentual para o VaR também foi elevado (75%), o que, analisado juntamente com os resultados para as taxas de redução de risco e de acerto, pode indicar que essa medida foi importante para formação de carteiras com objetivo de redução de risco, no Brasil, no período analisado. A variância obteve um bom percentual, em média 68,75%, porém, assim como nas demais taxas, seus resultados foram superados por medidas de *downside risk*, nesse caso, o VaR, a semivariância e a *loss penalty*.

Dada a impossibilidade de comparar as várias estratégias de redução de risco diretamente e a necessidade de escolher uma única medida, quando encontrada mais de uma medida que consegue reduzir significativamente o *downside risk*, podendo-se analisar se as diferentes medidas de risco podem levar a carteiras muito semelhantes, foram calculados os *tracking errors* mútuos das carteiras otimizadas. Assim, na Tabela 4, foram computados os *tracking errors* entre várias estratégias.

Tabela 4 – *Tracking errors* mútuos das abordagens.

	IBRX50	Variância	VaR	CVaR	Semi		*Loss Penalty*	Assimetria		*Maximum Drawdown*
					Desvio	Variância		Padronizada	Robusta	
IBRX50	-									
Variância	0,6997	-								
VaR	2,4698	2,3044	-							
CVaR	1,8571	1,6799	1,5546	-						
Semidesvio	2,9483	2,7966	1,8574	1,6248	-					
Semivariância	0,7852	0,2556	2,3790	1,7522	2,8427	-				
Loss Penalty	0,4878	0,4864	2,4852	1,8555	2,9463	0,5705	-			
Assimetria Padronizada	0,7100	0,1255	2,2871	1,6663	2,7835	0,2670	0,4993	-		
Assimetria Robusta	0,9444	0,8012	2,1911	1,6481	2,7394	0,8908	0,9464	0,8221	-	
Maximum Drawdown	0,8105	0,6518	1,9572	1,3312	2,5031	0,7721	0,8244	0,6322	0,6407	-
Média	1,3014	1,0890	2,1651	1,6633	2,5602	1,1683	1,2335	1,0881	1,2916	1,1248

Fonte: elaboração própria.

Ao se analisar a primeira coluna, que fornece os *tracking errors* em relação ao *benchmark*, percebe-se que as medidas que apresentaram maiores diferenças foram o VaR, o CVaR e o semidesvio, enquanto a *Loss Penalty* foi a menos diferente. Contudo, as demais medidas também não apresentaram grandes diferenças entre os valores para as carteiras otimizadas e para o IBrX 50.

Percebe-se que as medidas com maiores *tracking errors* em relação à variância são o VaR, o CVaR e o semidesvio, assim como para o *benchmark*. Isso mostra que há diferenças nas carteiras formadas ao se utilizar a variância ou alguma dessas outras medidas na otimização e, em uma análise conjunta com as taxas calculadas na Tabela 3, pode ser mais um indicativo da superioridade de medidas de *downside risk*. Em relação ao VaR, todos os *tracking errors* foram maiores que 1%, sendo que as carteiras mais diferentes das formadas pelo mesmo foram as do IBrX 50, como já havia sido relatado, e da *Loss Penalty*. O CVaR também apresentou valores maiores que 1%, mas muito próximos para todas as medidas, porém o *tracking error* não chegou a 2% em nenhum caso, como chegou para o caso do VaR. Esse resultado encontrado para o VaR e pelo CVaR pode estar relacionado ao fato de suas taxas de redução de risco terem apresentado as maiores médias, como visto na Tabela 3, de forma que há uma indicação de que essas medidas sejam um pouco superiores do que as demais quando no escopo da redução do risco. O semidesvio foi a medida que apresentou maior *tracking error* mútuo médio com as demais (2,5602%), seguido pelo VaR (2,1651%).

Assim, tomando-se como ponto de partida a taxa de redução de risco mostrada na Tabela 3, um investidor que estivesse em dúvidas sobre qual medida de risco utilizar para otimizar suas carteiras, analisando os *tracking errors* perceberia que não haveria grandes diferenças em escolher qualquer uma das medidas que apresentaram maiores redução de risco. Nesse sentido, um investidor que, por exemplo, esteja em dúvida se utiliza o VaR ou o CVaR como estratégia de investimento (medidas que apresentaram maior taxa de redução de risco), perceberia, analisando o *tracking error* mútuo (1,5546%), que não há

grandes diferenças em utilizar qualquer uma dessas duas medidas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve por objetivo analisar a eficácia da variância e de medidas de *downside risk* para formação de carteiras de investimentos no mercado de ações brasileiro. Para isso, foram analisados os modelos de Ang (1975), Markowitz et al. (1993), Ballestero (2005), Estrada (2008) e Cumova e Nawrocki (2011) e, inspirando-se nos trabalhos de Markowitz (1952) e Lohre, Neumann e Winterfeldt (2010), foram comparadas as seguintes medidas de risco: variância, semidesvio, semivariância, assimetria padronizada, assimetria robusta, VaR, CVaR, *Loss Penalty* e *Maximum Drawdown*.

Os resultados indicados pelas fronteiras eficientes mostram que o modelo de Cumova e Nawrocki (2011) obteve melhor desempenho ao minimizar o risco assimétrico. Esses resultados podem estar ligados ao fato de que esse modelo já é um modelo melhorado, desenvolvido a partir da formulação de Hogan e Warren (1972), não possuindo viés errôneo da medida original de cosemivariância. Por outro lado, apesar das críticas ao modelo de Estrada (2008) encontradas na literatura, sobretudo a crítica de Cheremushkin (2009), de que o modelo está mal especificado, percebeu-se, sobretudo quando plotadas as fronteiras eficientes em uma única figura, que não houve grandes diferenças entre o modelo de Estrada (2008) e o de Cumova e Nawrocki (2011), advindos do mesmo modelo base, Hogan e Warren (1972). Contudo, apenas em uma análise mais detalhada poderia ser afirmado que o modelo de Estrada (2008) apresenta uma má especificação. Ainda assim, há uma superioridade do modelo de Cumova e Nawrocki (2011) em relação ao modelo de Estrada (2008), o que está de acordo com os achados de Araújo e Montini (2012).

As diferenças encontradas mostram que, apesar de levar em consideração o *downside risk*, a forma de alcance da função objetivo pode alterar os resultados das alocações dos ativos nas carteiras, podendo fazer com que alguns modelos superem outros ao reduzir o risco assimétrico, para um mesmo retorno esperado da carteira. Todavia, o RMSDI indicou que os modelos formam carteiras mais semelhantes que distintas, ainda que minimizem o risco de formas diferentes e com intensidades diferentes. Assim, uma segunda

análise seria saber qual medida de *downside risk* pode reduzir ainda mais o risco assimétrico. Para isso, tomou-se como base o modelo de Cumova e Nawrocki (2011), o qual apresentou a melhor fronteira eficiente (com menor risco assimétrico), como forma de comparar a semivariância com as demais medidas de risco.

Na comparação entre as medidas de risco, usando como *benchmark* o IBRX 50, analisando as taxas calculadas juntamente com os *tracking errors* mútuos das carteiras otimizadas, há um indicativo de que existe impacto ao utilizar-se o VaR e o CVaR como estratégia de redução do risco, pois, além de serem mais eficazes reduzindo o risco, formam as carteiras mais distintas das formadas pelas demais medidas, inclusive pela variância, no período analisado. Parte desse resultado já era esperado, visto que indica que medidas de *downside risk* apresentam desempenho superior à variância para minimizar risco. Esses resultados estão de acordo com os trabalhos de Ang e Chua (1979), Bond e Satchell (2002), Bertsimas, Lauprete e Samarov (2004), Boasson, Boasson e Zhou (2011), Hamrin (2011), Ditraglia e Gerlach (2013), Pla-Santamaria e Bravo (2013) e Gao et al. (2014), além dos trabalhos brasileiros de Andrade (2006) e Araújo e Montini (2011, 2012).

Os resultados indicaram que, ao empregar a semivariância como medida de risco assimétrico, caso o investidor tenha condições de utilizar modelos mais requintados para resolução do problema da matriz de semivariância-cosemivariância assimétrica, será mais eficaz o modelo de Cumova e Nawrocki (2011), um modelo mais recente e já derivado de outras formulações. Porém, caso o investidor não possua tais meios, não haverá grande prejuízo em utiliza-se quaisquer dos modelos. Além disso, apesar de superior à variância, a semivariância não se apresentou como melhor medida de *downside risk* no mercado brasileiro, o que reduz o trabalho que o investidor teria, caso fosse utilizá-la. De forma geral, com os resultados encontrados, confirma-se a hipótese desta pesquisa, de que medidas de *downside risk* são mais eficazes na otimização de carteiras de ações no mercado acionário brasileiro em relação à abordagem tradicional de média-variância.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, F. W. M. Alocação de ativos no mercado acionário brasileiro segundo o conceito de downside risk. **Revista de Gestão USP**, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 27-36, 2006.

ANG, J. A note on the E, SL portfolio selection model. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 10, n. 5, p. 849-857, 1975.

ANG, J. S.; CHUA, J. H. Composite Measures for the Evaluation of Investment Performance. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 14, n. 2, p. 361-384, 1979.

ARACIOĞLU, B.; DEMIRCAN, F.; SOYUER, H. Mean-Variance-Skewness-Kurtosis Approach to Portfolio Optimization: An Application in Istanbul Stock Exchange. **Ege Academic Review**, v. 11, p. 9-17, 2011.

ARAÚJO, A. C.; MONTINI, A. de Á. Teoria do portfólio: comparações entre modelos alternativos para alocação de recursos em ativos de risco. *In*: XXXV ENCONTRO DA ANPAD - ENANPAD, 25, 2011, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: ENANPAD, 2011.

ARAÚJO, A. C.; MONTINI, A. de Á. Análise de medidas de risco downside na formação de carteiras de ações. *In:* XII Encontro Brasileiro de Finanças, 2012, São Paulo/SP. **Anais...** São Paulo: Encontro Brasileiro de Finanças, 2012.

ATHAYDE, G. **Building a mean-downside risk portfolio frontier**. In: Managing Downside Risk in Financial Markets. Edited by f. Sortino and Satchell eds. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.

BAE, K. COMMENT ON "SKEWNESS-AWARE ASS*ET AL*LOCATION". **Mathematical Finance**, v. 24, n. 2, p. 403–410, 2014.

BALLESTERO, E. Mean-Semivariance Efficient Frontier: A Downside Risk Model for Portfolio Selection. **Applied Mathematical Finance**, v.12, n.1, p.1-15, 2005.

BARONE-ADESI, G. Arbitrage Equilibrium with Skewed Asset Returns. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 20, n. 15, p. 299-313, 1985.

BAWA, V. S. Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects. **Journal of Financial Economics**, v. 2, n. 1, p. 95-121, 1975.

BAWA, V.; LINDENBERG, B. Capital market equilibrium in a mean, lower partial moment framework. **Journal of Real Estate Portfolio Management**, v. 5, n. 2, p. 189-200, 1977.

BEARDSLEY, X. W.; FIELD, B.; XIAO, M. Mean-Variance-Skewness-Kurtosis Portfolio Optimization with Return and Liquidity. **Communications in Mathematical Finance**, v. 1, n. 1, p. 13-49, 2012.

BERTSIMAS, D.; LAUPRETE, G. J.; SAMAROV, A. Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications. **Journal of Economic Dynamics & Control**, v. 28, n. 7, p. 1353-1381, 2004.

BOASSON, V.; BOASSON, E.; ZHOU, Z. Portfolio optimization in a mean-semivariance framework. **Investment Management and Financial Innovations**, v. 8, n. 3, p. 58-68, 2011.

BOND, S. A.; SATCHELL, S. E. Statistical properties of the sample semi-variance. **Applied Mathematical Finance**, v. 9, n. 4, p. 219-239, 2002.

BRIEC, W.; KERSTENS, K.; WOESTYNE, I. V. Portfolio selection with skewness: A comparison of methods and a generalized one fund result. **European Journal of Operational Research**, v. 230, n. 2, p. 412-421, 2013.

CASTRO JUNIOR, F. H. F.; SILVEIRA, H. P. Modelagem das distribuições das taxas de retorno dos índices Ibovespa e S&P500. **Revista de Administração Mackenzie**, v. 10, n. 1, 2009.

CHEREMUSHKIN, S. V. Why D-CAPM is a big mistake? The incorrectness of the cosemivariance statistics. **Working Paper** Series. Fevereiro, 2009. Disponível em: < http://ssrn.com /abstract=1336169>. Acesso em: 02/07/2014.CUMOVA, D.; NAWROCKI, D. A symmetric LPM model for heuristic mean-semivariance analysis. **Journal of Economics Business**, v. 63, n. 3, p. 217-236, 2011.

CUMOVA, D.; NAWROCKI, D. Portfolio optimization in an upside potentialand downside risk framework. **Journal of Economics and Business**, v. 71, p. 68-89, 2014.

DITRAGLIA, F. J.; GERLACH, J. R. Portfolio selection: An extreme value approach. **Journal of Banking and Finance**, v. 37, n. 2, p. 305-323, 2013.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. Risk reduction and portfolio size: an analytical solution. **Journal of Business**, v. 50, n. 3, p. 415-437, 1977.

ELTON, E.; GRUBER, M.; PADBERG, M. Simple criteria for optimal portfolio selection. **Journal of Finance**, v. 31, n. 5, p. 1341-1357, 1976.

ESTRADA, J. Mean-semivariance optimization: a heuristic approach. **Journal of Applied Finance**, v. 18, n. 1, p. 57-72, 2008.

EVANS, J. L.; ARCHER, S. H. Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis. **Journal of Finance**, v. 23, n. 5, p. 761-767, 1968.

FISHBURN, P. C. Mean-Risk Analysis with Risk Associated With Below-Target Returns. **The American Economic Review**, v. 67, n. 2, p. 116-126, 1977.

FISHER, L.; LORIE, J. H. Some Studies of Variability of Returns on Investments in Common Stocks. **Journal of Business**, v. 43, n. 2, p. 99-134, 1970.

GAO, J.; ZHOU, K.; LI, D.; CAO, X. Dynamic Mean-LPM and Mean-CVaR Portfolio Optimization in Continuous-Time. **International Review of Financial Analysis**, v. 21, p. 90-107, 2014.

GILLI, M.; KËLLEZI, E. A Heuristic Approach to Portfolio Optimization. Fame research paper series, **International Center for Financial Asset Management and Engineering**, Department of Econometrics, University of Geneva, Switzerland, 2000.

GROOTVELD, H.; HALLERBACH, W. Variance vs downside risk: is there really that much difference? **European Journal of Operational Research**, v. 114, n. 1, p. 304-319, 1999.

HAMRIN, E. A. **Heuristic Downside Risk Approach to Real Estate Portfolio Structuring.** Department of Real Estate and Construction Management. 2011. 42f. Tese – Master Thesis Number 107, Stockholm, June 2011.

HARLOW, W. M. Asset allocation in a Downside-Risk Framework. **Financial Analysis Journal**, n. 47, p. 28-40, 1991.

HOGAN, W. W.; WARREN, J. M. Computation of the efficient boundary in the E-S portfolio selection model. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 7, p. 1881-1896, 1972.

HOGAN, W. W.; WARREN, J. M. Toward the development of an equilibrium capital-market model based on semivariance. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**. v. 9, n. 1, p. 1-11, 1974.

JARROW, R.; ZHAO, F. Downside loss aversion and portfolio management. **Management Science**, v. 52, n. 4, 2006.

KOLM, P. N.; TÜTÜNCÜ, R.; FABOZZI, F. J. 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 356-371, 2014.

LAI, K. K.; YU, L; WANG, L. Mean-variance-skewness-kurtosis based portfólio optimization. **International Multi-Symposiums on Computer and Computational Sciences**, v. 2, p. 292-297, 2006.

LI, X.; QIN, Z.; KAR, S. Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns. **European Journal Of Operational Research**, v. 202, n. 1, p. 239-247, 2010.

LOHRE, H.; NEUMANN, T.; WINTERFELDT, T. Portfolio Construction with Downside Risk. **Social Science Electronic Publishing**, 2010.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MARKOWITZ, H. **Portfolio Selection:** Efficient Diversification of Investments. New Haven: Yale University Press, 1959.

MARKOWITZ, H. M.; TODD, P.; XU, G.; YAMANE, Y. Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm. **Annals of Operations Research**, v. 45, n. 5, p. 307-317, 1993.

NAWROCKI, D. A comparison of risk measures when used in a simple portfolio selection heuristic. **Journal of Business Finance and Accounting**, v. 10, n. 2, p. 183-194, 1983.

NAWROCKI, D.; STAPLES, K. A Customized LPM Risk Measure for Portfolio Analysis. **Applied Economics**, v. 21, p. 205-218, 1989.

PINHEIRO, C. A. O.; MATSUMOTO, A. S.; TABAK, B. M. An application of the mean-semivariance approach to the portfolio allocation problem: the case of Brazil. **Journal of International Finance and Economics**, v. 8, n. 4, p. 132-135, 2008.

PLA-SANTAMARIA, D.; BRAVO, M. Portfolio optimization based on downside risk: a mean-semivariance efficient frontier from Dow Jones blue chips. **Annals of Operations Research**, v. 205, n. 1, p.189-201, 2013.

PRICE, K.; PRICE, B.; NANTELL, T. J. Variance and Lower Partial Moment Measures of Systematic Risk: Some Analytical and Empirical Results. **Journal of Finance**, v. 37, p. 843-855, 1982.

RISKMETRICS. Technical Document. **Banco J.P. Morgan**, New York, J.P. Morgan/Reuters, 4 ed., 1996.

ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Optimization of Conditional Value-at-Risk. **Journal of Risk**, v. 3, n. 2, p. 21-41, 2000.

ROY, A. D. Safety First and the Holding of Assets. **Econometrica**, v. 20, n. 3, p. 431-449, 1952.

Endereço dos Autores:

Universidade Federal da Paraíba
Cidade Universitária - Campus I
Castelo Branco, - João Pessoa/PB
CEP: 58059-900