

## INVESTIGANDO O CONCEITO DE SIMETRIA NAS AULAS DE MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Lidiane Schimitz Lopes\*

Gilson Leandro Pacheco Alves\*\*

André Luís Andrejew Ferreira\*\*\*

\* Universidade Federal de Pelotas – UFPel. lidischimitz@hotmail.com

\*\* Universidade Federal de Pelotas – UFPel. gilsonlalves@hotmail.com

\*\*\* Universidade Federal de Pelotas – UFPel. andrejew.ferreira@gmail.com

### Resumo

Este artigo apresenta um panorama acerca da didática da matemática e da simetria como conhecimento, além de uma proposta de atividade direcionada à educação básica. A análise é feita à luz de teorias que envolvem a didática da matemática, conhecimento e considerações sobre a relevância da (re)construção do contexto dos objetos matemáticos. Analisando padrões simétricos ao longo da história, percebe-se que a etnomatemática contempla a ligação entre o conhecimento matemático e o respectivo momento cultural. Neste trabalho, sugere-se e analisa-se a aplicação de uma abordagem das transformações geométricas na qual se utilizam materiais de baixo valor financeiro, possível de ser realizada em turmas numerosas de escolas de poucos recursos.

**Palavras-chave:** didática da matemática, investigação, simetria.

**Abstract: Investigating the symmetry concept in math classes: a proposal for the ninth year of basic education.** This article presents a view regarding the teaching of mathematics and symmetry as knowledge as well as a proposal activity aimed for elementary scholars. The analysis is using theories which embrace the mathematics teaching, knowledge and considerations about the relevance of the context (re)construction of the mathematical objects. Analyzing symmetrical standard along history it is notable that ethno mathematics beholds the liking between the mathematical knowledge and its respective cultural moment. In this paper, is suggested and is analyzed the application of an approach of the geometrical transformations in which low cost material are used which are possible to be used in big class groups in schools which have fewer resources.

**Keywords:** didactics of mathematics, investigation, symmetry.

### Introdução

Grande parte do esforço matemático se concentra em modelar, ou seja, descobrir padrões para se descrever um fenômeno, seja ele natural, como os problemas da física, ou teórico, como o comportamento das séries numéricas, por exemplo. Seja qual for o enfoque ou contexto, investigar tem como consequência esperada descobrir. Segundo Ponte et al. (2003), investigar é um termo que pode ser entendido de várias maneiras. A investigação pode ser feita por profissionais especialistas de uma

determinada área assim como por qualquer pessoa, em atividades do seu cotidiano. Nas aulas de matemática, a investigação pode se tornar uma aliada do professor para motivar o interesse dos estudantes.

Muito se especula sobre a eficácia das distintas formas de se ensinar matemática nas escolas. Com o objetivo de compreender, interpretar e descrever os fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, a Educação Matemática configura-se como uma grande área de pesquisas educacionais, seja no campo teórico ou prático. Quando se trata da

articulação entre esses dois campos, surge como tendência a didática da matemática. Segundo Pais (2011, p. 11), “todos os conceitos didáticos se destinam a favorecer a compreensão das múltiplas conexões entre a teoria e a prática e esta condição é um dos princípios dessa área de estudo”.

Algumas linhas de pesquisa, também chamadas de tendências da educação matemática, primam por dar significado ao aprendizado por meio da valorização do contexto do aprendiz e das origens do conhecimento matemático que se pretende abordar. É o caso das tendências conhecidas como História da Matemática e Etnomatemática. Essas linhas epistemológicas convergem para a aprendizagem com significado para o aluno, em oposição à mecânica, que consiste simplesmente em decorar ou reproduzir algoritmos sem aplicação prática ou mesmo sem a compreensão da teoria.

Nesse sentido, a aprendizagem pela investigação configura-se como uma alternativa para dar sentido ao conteúdo ensinado, pois o conhecimento passa a ser consequência de uma postura ativa do aluno. Claro que uma atividade envolvendo investigação exige um preparo detalhado por parte do professor, com objetivos muito bem determinados. Entretanto, o docente deve esperar que surjam circunstâncias inusitadas, ou seja, perguntas e situações inéditas para as quais ainda não hajam repostas prontas.

Neste artigo propomos e analisamos uma atividade de investigação envolvendo conceitos de simetria previstos para o ensino fundamental. Abordamos a didática envolvida, aspectos conceituais da simetria que vão além da definição matemática, a descrição da atividade e análise de sua aplicação, realizada em outubro de 2013.

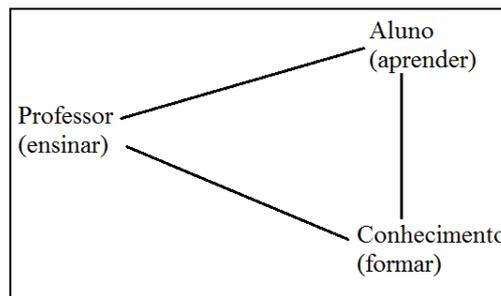
## A didática da matemática: a transposição do saber científico para a sala de aula

Todos os dias letivos, em diferentes escolas e salas de aula, acontecem diversos momentos envolvendo professores, alunos e o conhecimento a ser ensinado. Há aqueles que não envolvem esses três elementos simultaneamente, como reuniões de professores e desses com seus alunos, grupos de estudo e pesquisas. Entretanto, situações que compreendem professores, alunos e saber com o

objetivo de ensinar pertencem ao campo da didática.

Segundo Brousseau (2006), para Comenius, a didática, em seu aspecto amplo, pode ser dita como a arte de ensinar. Trata-se, portanto, das relações entre professor, aluno e saber. Segundo Pimenta (2013), essas relações podem ser explicitadas no triângulo:

**Figura 1:** Esquema das relações entre professor, aluno e conhecimento.



**Fonte:** Autores. Adaptado de Pimenta (2013).

De acordo com Pais, é possível definir a didática da matemática como

[...] uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2011, p. 11).

É inegável que são necessárias várias mudanças nos objetos matemáticos para adaptá-los do mundo da pesquisa para o ambiente escolar. A essas transformações dá-se o nome de ‘transposição didática’. Tal conceito pode ser entendido “[...] como um caso especial da transposição dos saberes, sendo esta entendida no sentido da evolução das ideias, no plano histórico da produção intelectual da humanidade” (PAIS, 2011, p. 17). Segundo Silva (2008, p. 153), o conceito estabelecido por Chevallard para transposição didática, ao afirmar que “não se ensina o saber científico, mas sim uma versão transposta dele, um saber adaptado para ser ensinado”, constitui um conceito clássico de didática.

Enquanto o saber científico está associado às universidades, é registrado em uma linguagem

codificada, validado pelos paradigmas da área e o meio acadêmico busca desligá-lo do contexto, o saber escolar está condicionado pelas relações entre professor, aluno e saber, bem como representa o conjunto dos conteúdos das diferentes disciplinas escolares e envolve simulações de descobertas, valorizando e buscando o contexto, além de fugir de termos teóricos e formais. Segundo Pais (2011, p. 22), “na passagem do saber científico ao saber previsto na educação escolar, ocorre a criação de vários recursos didáticos, cujo resultado prático ultrapassa os limites conceituais do saber matemático”.

Outro ponto a ser destacado é a diferença entre conhecimento e saber. Se, por um lado, o saber está ligado ao plano histórico da produção de uma área disciplinar, o conhecimento, por sua vez, está submetido aos vínculos da dimensão pessoal do sujeito dedicado em entender um saber. Assim, o conhecimento é considerado mais próximo do fenômeno da cognição (PAIS, 2011).

No processo da transposição didática, a aliada para a estruturação de uma educação matemática com significado é a contextualização. Segundo Pais (2011, p. 27), “a contextualização do saber é uma das mais importantes noções pedagógicas [...]. Trata-se de um conceito didático fundamental para a expansão do significado da educação escolar”. Ainda de acordo com o autor, há um acréscimo no valor educacional de uma disciplina no momento em que o estudante percebe e compreende as relações entre o conteúdo estudado e um contexto entendido por ele. Tendências como a História da Matemática e a Etnomatemática são opções para o docente (re)criar/apresentar um contexto para os objetos ensinados em suas aulas.

Nesse sentido, D’Ambrósio (2012, p. 29) destaca que “do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta” e, como consequência disso, de acordo com Silva (2008), são diagnosticados altos índices de alunos do ensino médio e fundamental que não conseguem adquirir os conhecimentos matemáticos apropriados para cada faixa etária. Assim, “o desafio didático consiste em fazer essa contextualização, sem reduzir o significado das ideias matemáticas que deram origem ao saber ensinado” (PAIS, 2011, p. 26).

Ainda sobre a contextualização, o professor de matemática, ao contrário do cientista que busca desvincular-se do contexto com o objetivo de atingir níveis mais amplos de generalidade, deve recontextualizar o conteúdo ensinado, tentando relacioná-lo a situações que sejam mais compreensíveis aos alunos. Entretanto, Pais (2011) salienta que esse contexto reconstituído não é o mesmo daquele em que o saber foi inicialmente elaborado. “Enquanto para o pesquisador, o saber matemático é o seu principal objeto de estudo, na prática pedagógica, o saber escolar é um instrumento educacional para a promoção existencial do aluno” (PAIS, 2011, p. 32-33).

Sem dúvidas, é evidente que a reconstituição de contextos está diretamente ligada à concepção epistemológica que o professor tem da sua disciplina. Entende-se a epistemologia do docente como “as concepções referentes à disciplina com que trabalha esse professor, oriundas do plano estrito de sua compreensão e que conduzem uma parte essencial de sua postura pedagógica” (PAIS, 2011, p. 34). Muitas crenças, originadas em conhecimentos empíricos e perpetuadas pelo tempo, podem gerar uma visão puramente pessoal sobre a ciência ensinada. Nesse momento, nasce um conflito entre a visão subjetiva e a intenção de objetividade que deve caracterizar a aprendizagem escolar. Segundo Pais (2011, p. 34), “mesmo que haja a intenção de uma permanente aproximação entre a compreensão do professor e a essência objetiva do conceito, é preciso estar atento às possíveis divergências entre esses dois níveis”.

Um dos pontos que requerem atenção especial do docente é o tempo de aprendizagem. Diferente em essência do tempo didático, que é estabelecido por programas e livros didáticos em cumprimento a uma exigência legal, o tempo de aprendizagem está vinculado aos rompimentos e conflitos do conhecimento, necessitando de uma reorganização de informações. O ato de aprender é justamente caracterizado por esses conflitos. Assim, pode-se afirmar que o tempo de aprendizagem é diferente para cada sujeito e não sequencial, pois cada um pode ter a necessidade de retomar concepções precedentes e reorganizá-las, transformando-as em um novo conhecimento.

## A sequência didática

Uma sequência didática, segundo Pais (2011), constitui-se de diferentes momentos em aula, executados em um mesmo dia ou não, cujas atividades são planejadas e analisadas previamente com a intenção de observar situações de aprendizagem. “Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigado” (PAIS, 2011, p. 102). Assim, considera-se sequência didática como um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa; sua organização está intimamente ligada aos objetivos que se deseja alcançar com os alunos, e envolve práticas para a aprendizagem e avaliação.

No geral, sequências didáticas são compostas por sete etapas com diferentes durações, estabelecidas de acordo com o conteúdo que se quer trabalhar. São elas: definição do público alvo, conteúdos, duração, objetivos geral e específicos, material necessário para a execução, descrição das situações de ensino e avaliação.

A elaboração de sequências didáticas configura-se como um excelente ponto de partida para o planejamento de atividades interdisciplinares, pois permite a visão da ação pedagógica como um todo e, mediante disso, o desenvolvimento de situações didáticas para cada encontro.

No caso da simetria, a sequência pode contemplar a trajetória histórica que esse conceito trilhou até os dias de hoje, bem como sua presença nas manifestações culturais de diferentes povos do passado e em nosso dia-a-dia. Por fim, as atividades elaboradas devem ser direcionadas ao conceito matemático como o reconhecemos atualmente.

## A simetria através dos tempos: aspectos históricos e culturais

Percebe-se que as grandes construções que perpetuaram e transmitem a herança cultural dos povos apresentam padrões de simetria no decorrer dos tempos. Rooney (2012, p. 73) destaca que “os primeiros contatos com a geometria são anteriores aos sistemas de números e escritos” e que os povos antigos deixaram inúmeras evidências de seus interesses por padrões repetidos e simetria de formas em objetos, decorações e estruturas. Alguns dos

registros mais antigos datam do Período Neolítico, considerado último período da Idade da Pedra e cujo início ocorreu por volta de 8.000 a. C.. Segundo Boyer e Merzbach,

o homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar e aparecem em todos os continentes (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 26).

**Figura 2:** Exemplo de arte do período neolítico.



**Fonte:** Google Imagens

Na civilização egípcia antiga é evidente o uso de um padrão em suas criações. Buscando criar figuras de fácil compreensão, os egípcios valiam-se do equilíbrio e da simetria para criar composições altamente organizadas. Segundo Enright (2013), os artistas desenhavam grades formadas por linhas verticais e horizontais para criar proporções exatamente iguais. Durante esse mesmo período, na Mesopotâmia, os sumérios desenvolveram igualmente o senso de proporções, porém suas composições não eram tão elaboradas quanto as egípcias.

**Figura 3:** Exemplo de arte egípcia.



**Fonte:** Google Imagens

**Figura 4:** Exemplo de arte suméria.

Fonte: Google Imagens

A arte da Grécia Antiga, por volta do século V a.C., estabelece um sistema de proporções ideais, possibilitando a construção de grandes obras como, por exemplo, o Partenon. Na Roma Antiga, o arquiteto Marco Vitruvius Polion desenvolveu a obra intitulada *De architectura libri decem*, contendo informações sobre a construção de cidades, considerando as necessidades de proteção e conforto da população.

Durante a Idade Média, as composições artísticas eram marcadas pela religiosidade tendo a simetria como base. Na arquitetura isso se tornou mais evidente e característico na construção de grandes igrejas.

A estética da *proportio* era verdadeiramente a estética da Idade Média por excelência. O princípio de simetria, também nas suas expressões mais elementares, era um critério instintivo de tal modo radicado no espírito medieval que era susceptível de determinar a própria evolução do repertório iconográfico. Este provinha da Bíblia, da liturgia, [...] mas, frequentemente, exigências de simetria levavam a modificar uma cena que a tradição tinha transmitido em termos bem definidos, e até a violar os hábitos e a verdade histórica mais comum (ECO, 1989, p. 53).

Percebe-se que, muito além de um conceito matemático como é conhecido hoje, a simetria na Idade Média era requisito primordial para a beleza artística.

No Renascimento houve a valorização e retomada da arte da Antiguidade Clássica, além da valorização do homem e visão científica da natureza. O desenvolvimento nas artes plásticas,

especialmente, buscava a beleza por meio de proporções e simetrias, de acordo com os parâmetros ditados pelo belo clássico.

Boyer e Merzbach (2012, p. 211) destacam que “o Renascimento poderia perfeitamente ter desenvolvido a geometria pura na direção sugerida pela arte e pela perspectiva”, entretanto, a criação da geometria algébrica modificou o interesse dos matemáticos da época.

Desde tempos remotos até a atualidade, a arte islâmica é baseada em traços simétricos, com padrões de repetição. As formas poligonais simétricas utilizadas para a criação desses padrões podem ser infinitamente estendidas, repercutindo conceitos da geometria moderna. Os árabes são os criadores dos mosaicos geométricos.

Evidencia-se aqui, por meio de alguns exemplos, que o conceito de simetria atravessa várias culturas de diferentes povos em épocas distintas. Hoje se entende simetria como um fundamento ou propriedade matemática, mas, ao analisá-la historicamente, constata-se que a percepção simétrica precede e/ou não necessita de formalismo matemático.

### A cultura nas formas e a Etnomatemática nela envolvida

Não é difícil perceber e relacionar o desenvolvimento cultural das civilizações com sua herança arquitetônica. Nos povos mais conhecidos da antiguidade (egípcios, gregos e romanos) a herança histórica material mais evidente são suas grandiosas edificações que atravessaram os milênios. As pirâmides no Egito, o Partenon na Grécia e o Coliseu em Roma são exemplos e símbolos da força cultural, econômica e militar vivida por esses povos.

A sustentação dessas civilizações como centro de poder, cada uma em seu tempo, muito se deu pela detenção do conhecimento científico, em especial o matemático. A matemática de cada civilização, local e temporalmente específica, colaborou para a resolução de seus problemas mais básicos, como alimentação e proteção, mas também se fez presente na manifestação cultural desses povos mediante a construção e do embelezamento de suas edificações.

É impossível se referir à beleza arquitetônica sem falar em simetria. Por sua vez, não se pode explicar a simetria detendo-se apenas à assepsia das formas geométricas ideais como o triângulo,

a circunferência ou os sólidos de Platão. Até mesmo porque a perfeição dessas formas pode ser considerada uma condição abstrata só concebível no nível do pensamento, enquanto a harmonia nas formas de um edifício é algo sensível.

No entanto, mesmo ideal ou abstrata, a geometria ou matemática das formas, é um dos pilares da engenharia e arquitetura de resultados tão concretos.

Ainda em relação à simetria, pode-se dizer que a identificamos em muitas coisas concretas à nossa volta. Na natureza, também a percebemos, mas não se pode ter certeza se as formas naturais se fizeram simétricas ou se simplesmente nossos olhos, viciados em matemática, reconhecem nelas tal característica. As asas de uma bela borboleta são simétricas ou atribuí-se simetria matemática a algo que é naturalmente belo?

Como em relação às formas naturais essa dúvida não será facilmente superada, convém focar nas construções humanas, tais como a própria matemática. Não são necessários profundos conhecimentos de engenharia e arquitetura para saber que desenho e construção estão intimamente ligados: normalmente na elaboração do projeto. E o desenho, sendo a representação das formas, nos remete à geometria. De forma simplificada, fecha-se o enlace entre arquitetura e matemática.

**Figura 5:** Coliseu



**Fonte:** Site Só História

É sabido que, ao analisar uma edificação antiga, os pesquisadores da área de arquitetura não têm dificuldade em dizer para que se prestava e qual período histórico fora construída e utilizada. Se as formas de um prédio, estrada, ponte, monumento ou de qualquer outra construção são capazes de revelar seu contexto, isso também revela que existe uma matemática específica, ou seja, uma etnomatemática envolvida.

Estudos na linha da Etnomatemática destacam que houve uma geometria a serviço da engenharia, da arquitetura e das construções artísticas de diferentes civilizações e grupos sociais (D'AMBRÓSIO, 2007). Seja essa matemática genuína da sociedade que a utilizou ou carregada de influências estrangeiras, foi o senso de proporções e simetrias que possibilitou tais construções.

Segundo Santos (2007), a verdadeira beleza é sempre a natural ou geométrica. Em seu trabalho intitulado *A Matemática da Arquitetura Ideal*, essa pesquisadora faz referência a Vitruvius<sup>1</sup>, como sendo o primeiro a relacionar e tomar como padrão para o belo, referindo-se às formas, às proporções e simetria do corpo humano. Ressalta, ainda, que o conceito de simetria de Vitruvius é diferente do usualmente adotado hoje em matemática. Para ele, simetria é a relação entre os vários elementos do plano e cada um desses elementos com os do corpo humano. Essa correlação ou comparação também pode ser entendida como proporção.

Dessa forma, entende-se que a matemática de um povo também se revela culturalmente pela arquitetura e pela arte, se é que é possível separá-las. E por que não se perguntar simplesmente pela matemática utilizada e sim pela etnomatemática envolvida? D'Ambrósio (2007), ao definir a etnomatemática como a matemática dos distintos grupos sociais, não descarta a matemática europeia, tão influente no ensino acadêmico, de ser apenas mais um tipo de etnomatemática. Pela abordagem histórica que foi feita e pela opção de se evidenciar as culturas de distintos povos em diferentes épocas, considera-se conveniente a adoção do termo e da abordagem etnomatemática.

### Investigando a simetria em sala de aula

<sup>1</sup> Vitruvius fez um dos mais conhecidos estudos sobre simetria dos templos e apresenta a proporção entre as partes do corpo tal qual a cabeça seria  $\frac{1}{8}$  da altura do corpo, os pés seriam  $\frac{1}{6}$  do corpo e a face  $\frac{1}{10}$  do corpo. Essa regra indica espantosa diferença com a natural harmonia corporal, como fazem alguns comentários da renascença, que muitos estimulam a correção. Assim, Leonardo da Vinci, informa para a largura do busto como  $\frac{1}{4}$  da altura do corpo, cuja razão aplica-se sobre os ombros. Da Vinci também reduziu o pescoço de  $\frac{1}{15}$  do corpo humano para  $\frac{1}{24}$  e o pé de  $\frac{1}{6}$  da altura do corpo para  $\frac{1}{7}$  (SANTOS, 2007, p. 4).

Investigar, para Ponte et al. (2003), é um termo que pode ser empregado de várias maneiras. Para algumas pessoas, trata-se de um trabalho realizado apenas por investigadores profissionais. Para outras, é uma atividade que pode ser desenvolvida no dia-a-dia de pessoas das mais diferentes esferas sociais. Em sala de aula, a investigação pode ser aliada na formação dos alunos e prática dos professores. “Para os matemáticos, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE et al., 2003, p.13).

Apresenta-se, neste trabalho, uma proposta para a introdução do conteúdo 'Simetrias', aplicada em uma escola da rede particular de ensino na cidade de Bagé, RS. Em geral, os livros didáticos apresentam este conteúdo com o nome de *Transformações Geométricas* e é direcionado a alunos do 9º ano do ensino fundamental.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de matemática (PCN) (BRASIL, 1998), encontram-se como objetivos para a disciplina em sala de aula: “identificar características de figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções” (BRASIL, 1998, p. 56), bem como a “identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, etc.” (BRASIL, 1998, p. 60). O documento traz, também, a relevância de desenvolver atitudes como a sensibilidade para observar simetrias e outras formas geométricas em construções, nas artes e na natureza.

## A proposta de atividade

A sequência didática organizada para a execução dessa proposta considerou como objetivo introduzir o conteúdo 'Simetria' por meio de atividades direcionadas que relacionassem os conceitos ensinados com situações da vida dos estudantes. A sequência didática está organizada em quatro etapas, planejada para 4 horas-aula.

Nas três primeiras etapas dessa atividade, os alunos poderão ser dispostos em duplas ou trabalhar de forma individual. Para o desenvolvimento dessa proposta, cada estudante (ou dupla) precisará dos seguintes materiais.

- 2 folhas de papel quadriculado;
- 1 folha de papel carbono;
- 2 folha de papel ofício.
- Lápis;
- Borracha;
- Régua.

Na quarta etapa, se os estudantes já tiverem trabalhando individualmente nas etapas anteriores, passarão a trabalhar em duplas. Caso a disposição inicial dos alunos tenha sido em duplas, serão organizados em quartetos para a execução da quarta etapa.

## Primeira etapa: investigando a simetria por reflexão

A proposta desta etapa é de que os alunos criem figuras simétricas espontaneamente, com base em um desenho livre.

Uma folha de papel ofício deverá ser dobrada ao meio, marcando a linha que divide a folha. Os alunos deverão unir a folha de papel ainda aberta com o papel carbono, de modo que o 'lado que escreve' do carbono esteja em contato com a folha. Ao refazer a dobra, o carbono deve permanecer no seu interior, conforme a figura 6.

**Figura 6:** Dobra do papel e carbono



Fonte: Autores

Ao desenhar uma figura qualquer em um dos lados do papel quadriculado (Figura 8), os alunos criarão duas figuras simétricas por reflexão na parte interna da folha (Figura 9). O professor pode estimular o raciocínio dos alunos com algumas questões como: ‘o que aconteceu na parte de dentro da folha?’; ‘as figuras criadas são parecidas ou são iguais?’; ‘há diferenças entre elas? Quais?’; ‘vemos isso acontecer na nossa vida?’; ‘quando estamos na frente do espelho, o que acontece?’; ‘se fizermos um desenho longe da dobra do papel, como ele fica na parte de

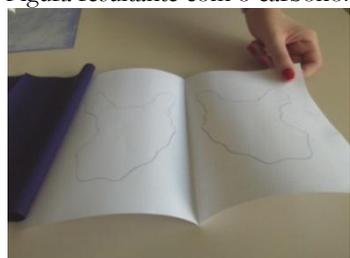
dentro?'; e se fizermos um bem próximo à linha da dobra, o que acontece?'

**Figura 7:** Desenho com a folha dobrada e carbono no meio.



**Fonte:** Autores

**Figura 8:** Figura resultante com o carbono.



**Fonte:** Autores

Com a análise dessa figura, os alunos, com a mediação do professor, perceberão que a linha do meio divide o desenho em dois lados iguais, ou seja, a marca da dobra do papel representa um eixo que divide o desenho em dois lados simétricos. Assim, os estudantes construirão o conceito de eixo de simetria.

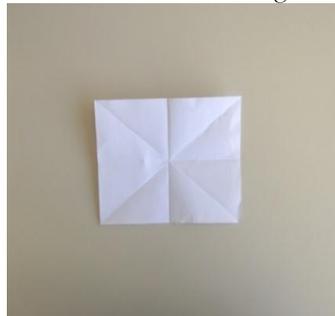
## Segunda etapa: investigando os eixos de simetria

A proposta dessa consiste em levar os alunos a perceberem que uma figura simétrica pode ter um ou mais eixos de simetria.

Os alunos deverão dividir a folha branca em duas partes, ficando com duas folhas menores. A primeira será trabalhada da forma que está: um retângulo. A segunda folha deverá ser cortada de modo a formar um triângulo.

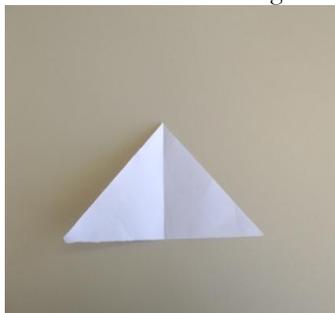
Por meio da realização de dobraduras, os alunos deverão descobrir quantas e de quais maneiras pode-se dividir a folha retangular em duas partes iguais. Serão encontradas quatro formas distintas, conforme a figura 9. No caso do triângulo, há apenas um eixo de simetria, conforme a figura 10.

**Figura 9:** Eixos de simetria do retângulo.



**Fonte:** Autores

**Figura 10:** Eixo de simetria do triângulo.



**Fonte:** Autores

## Terceira etapa: criando figuras simétricas e assimétricas a partir de comandos numéricos.

A proposta dessa etapa é que, mediante sequências numéricas com comandos pré-estabelecidos, os alunos criem figuras simétricas e assimétricas. Também faz parte dessa etapa investigar quais os tipos de sequências geram figuras simétricas e assimétricas.

Os alunos deverão analisar figuras criadas a partir dessas sequências e classificá-las em simétricas ou assimétricas. Nas figuras simétricas, deverão identificar o(s) eixo(s) de simetria.

As figuras serão criadas em papel quadriculado mediante comandos numéricos, girando sempre  $90^\circ$ . Quando o número for positivo, o giro será no sentido horário. Se o número for negativo, o giro será no sentido anti-horário. Os números representam a quantidade de quadradinhos que se deve andar em cada direção. O primeiro movimento é sempre do ponto de origem para cima. São exemplos de comandos as seguintes sequências:

a) 4, 9, 6, 8, 5, 7, 4, 6, 3, 3, 9 →



da proposta, os estudantes participaram ativamente, realizando as atividades com interesse e dedicação.

## Investigando a simetria por reflexão: análise da aplicação

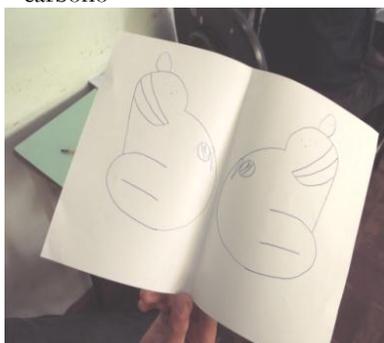
A primeira etapa foi executada com curiosidade, pois os estudantes não sabiam o que esperar, o que encontrariam ao abrir a folha dobrada ao meio. Muitos se empenharam em fazer desenhos bonitos e elaborados. Ao abrir a folha, ficaram surpresos ao perceberem o desenho criado com o carbono.

**Figura 13:** Aluno desenhando na realização da 1ª etapa.



Fonte: Autores

**Figura 14:** Resultado do desenho após retirar o carbono



Fonte: Autores

Durante os questionamentos previstos na sequência didática ('o que aconteceu na parte de dentro dessa folha?'; 'as figuras criadas são parecidas ou são iguais?'; 'há diferenças entre elas? Quais?'; 'vemos isso acontecer na nossa vida?'; 'quando estamos na frente do espelho, o que acontece?'), os estudantes afirmaram que as figuras criadas nos dois lados da folha eram iguais, mas estavam 'viradas'. Um deles questionou se as figuras poderiam ser

consideradas diferentes só porque estavam viradas. Nesse momento, uma aluna afirmou: 'O que aconteceu aqui é o que acontece no espelho: um reflexo!'.

Quando perguntados sobre desenhos distantes e próximos da linha da dobra ('se fizermos um desenho longe da dobra do papel, como ele fica na parte de dentro?'; 'e se fizermos um bem próximo à linha da dobra, o que acontece?'), os estudantes fizeram pequenas figuras em diferentes pontos do papel, para observar onde eles ficariam na parte interna. Um dos meninos afirmou que a dobra 'era do meio papel', por isso os desenhos próximos a ela ficavam no centro da folha na parte interna.

**Figura 15:** Desenho de uma aluna próximo da linha central (dobra do papel)



Fonte: Autores

Com essas deduções, mediadas pelo professor, foi possível que os alunos desenvolvessem o conceito de eixo de simetria.

## Investigando os eixos de simetria: análise da aplicação

A segunda etapa constituiu em dobrar um retângulo e um triângulo a fim de identificar os eixos de simetria dessas figuras.

**Figura 16:** Início das dobraduras para encontrar eixos de simetria no retângulo.



Fonte: Autores

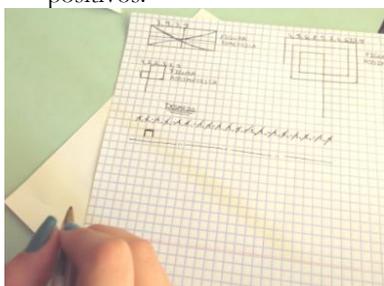
Durante a execução dessa etapa, os estudantes tiveram facilidade em realizar as dobraduras e perceberam que, nem sempre, um eixo fará partes iguais se sobrepossem, como no caso das diagonais de um retângulo. Entretanto, no momento da contagem dos eixos, os estudantes tiveram dificuldades e acabavam contando o mesmo eixo duas vezes (na parte de cima e de baixo da figura). Para superar essa dificuldade não planejada, foi solicitado que os alunos desenhassem uma reta por cima de cada eixo, o que facilitou a contagem e superou o problema.

### Criando figuras simétricas e assimétricas a partir de comandos numéricos: análise da aplicação

A terceira etapa foi repensada dias antes da aplicação. Nessa ocasião, decidiu-se que seriam usados apenas comandos positivos (girar no sentido horário). Dependendo do desempenho e aceitação dos estudantes a esses comandos, seriam apresentadas as figuras construídas a partir de números positivos e negativos.

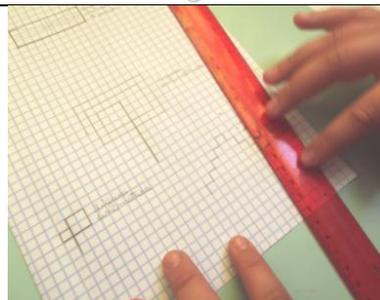
Entretanto, no momento que a terceira etapa da sequência didática iniciou, percebeu-se que esses foram os momentos mais motivadores da proposta. Os estudantes receberam muito bem a atividade, sentiram-se desafiados a resolver cada um dos comandos e encontrar a figura. A terceira sequência numérica apresentada envolveu comandos positivos e negativos.

**Figura 17:** Criação de figuras a partir de comandos numéricos apenas com números positivos.



Fonte: Autores

**Figura 18:** Criação de figuras a partir de comandos numéricos com números positivos e negativos.



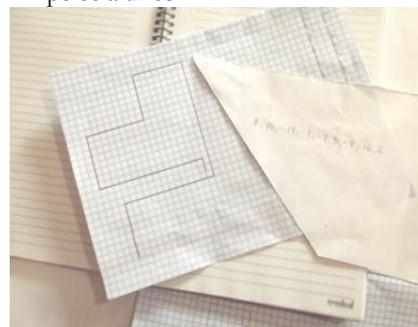
Fonte: Autores

Essa etapa da sequência didática foi trabalhada com mais empenho e concentração por parte dos estudantes do que as anteriores.

### Criando sequências e figuras simétricas: análise da aplicação

A quarta etapa da sequência didática foi encarada como uma competição. Cada um dos alunos queria construir a figura mais interessante e a sequência mais elaborada para trocar com o colega.

**Figura 19:** Desenho e sequência numérica criada pelos alunos



Fonte: Autores

O desafio gerou motivação e empenho dos alunos. Entretanto, um ponto complicado foi a existência da regra de não poder levantar o lápis do papel para desenhar. Isso gerou algumas dúvidas nos alunos, solucionadas com o auxílio dos professores.

### Considerações finais

Tomando-se a didática da matemática como o conjunto de conceitos e teorias voltadas à especificidade do ensinar matemática, entende-se o quanto o planejamento do docente, bem como as concepções que ele carrega da sua disciplina, influenciam a tríade professor-aluno-saber. Além disso, é inegável a necessidade de algumas

transformações no objeto matemático com a finalidade de adaptá-lo para a escola. Um caminho que pode ser escolhido pelo professor em seu planejamento, e na definição de tais adequações, é a (re)construção do contexto do objeto matemático a ser ensinado.

A intenção dessa (re)construção em sala de aula está longe de promover que os estudantes revivam situações de épocas passadas ou culturas que lhe são estranhas. O objetivo é tentar relacionar o conteúdo ensinado a situações que sejam mais compreensíveis aos alunos, ampliando suas ideias sobre o que estão aprendendo. Nesse processo, a Etnomatemática e a História da Matemática configuram-se como recursos valiosos para o professor.

Com um olhar histórico, é possível perceber que a ideia de simetria, conteúdo trabalhado nesta proposta, antecede a linguagem matemática formal. A percepção de padrões simétricos em traços arquitetônicos e nas artes é reflexo da produção cultural de uma sociedade. Aliado a isso, salientam-se as matemáticas locais, ou etnomatemáticas, que possibilitaram criações envolvendo padrões de simetria, desde cestos e tapetes até grandes e imponentes edificações.

Até meados do século XV, primava-se pela perfeição simétrica na construção de grandes templos, visando a agradar os deuses. A partir do Renascimento, o homem voltou-se para si próprio e a simetria continuou garantindo em suas obras o padrão de beleza almejado na época.

Admitindo-se a necessidade e relevância do estudo das transformações geométricas na educação básica, em virtude do reconhecimento dessa característica geométrica na arquitetura, nas artes e até nas formas da natureza, julga-se válida a iniciativa de procurar formas diferenciadas para o ensino escolar dessa propriedade matemática.

Nessa linha de raciocínio, a investigação proporciona ao aluno um envolvimento com o conhecimento matemático em questão muito além do contato superficial com a teoria. Atividades como a apresentada neste trabalho, possível em classes numerosas ou não, são propostas de baixo custo financeiro sem, no entanto, decréscimo de qualidade e viabilidade pedagógica.

A análise da aplicação da sequência didática construída para trabalhar com simetrias no 9º ano do ensino fundamental, realizada em outubro de 2013, possibilitou aparar arestas da

proposta e perceber os ganhos pedagógicos do trabalho com investigação. O planejamento e (re)construção do contexto, ancorados na didática da matemática, foram indispensáveis para o sucesso na aplicação.

## Referências

- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3 ed. São Paulo: Blücher, 2012.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BROUSSEAU, G. **Didática e teoria das situações didáticas em matemática**. São Paulo: PUC, 2006. Disponível em: <[http://www.pucsp.br/pensamentomatematico/TSDMF4\\_Brousseau\\_2006.pdf](http://www.pucsp.br/pensamentomatematico/TSDMF4_Brousseau_2006.pdf)> Acesso: 20 dez. 2013.
- D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. 2. ed. 3ª. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 23 ed. Campinas: Papirus, 2012. Coleção Perspectivas em Educação Matemática.
- ECO, U. **Arte e beleza na estética medieval**. Lisboa: Presença, 1989.
- ENRIGHT, C. **Técnicas de arte no Egito antigo**. Disponível em: <[http://www.ehow.com.br/tecnicas-egito-antigo-info\\_6935/](http://www.ehow.com.br/tecnicas-egito-antigo-info_6935/)>. Acesso: 09 jan. 2013.
- PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- PIMENTA, S. G. **Para uma re-significação da didática: ciências da educação, pedagogia e didática (uma revisão conceitual e uma síntese provisória)**. Disponível em: <[www.geocities.ws/byrooney/arquivos/arquivo\\_s/resigdid.doc](http://www.geocities.ws/byrooney/arquivos/arquivo_s/resigdid.doc)> Acesso: 28 dez. 2013.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

ROONEY, A. **A História da Matemática:** desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil, 2012.

SANTOS, M. M. **A matemática da arquitetura ideal.** Curitiba: Graphica, 2007. Disponível em: <[http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs\\_degraf/artigos\\_graphica/A%20MATEMATICA%20DA%20ARQUITETURA%20IDEAL.pdf](http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/artigos_graphica/A%20MATEMATICA%20DA%20ARQUITETURA%20IDEAL.pdf)>. Acesso: 15 jan. 2013.

SILVA, V. A. Relação com o saber na aprendizagem de matemática: uma contribuição para a reflexão didática sobre as práticas educativas. **Revista Brasileira de Educação.** v. 13, n. 37, p. 150-190, jan./abr. 2008.

*Recebido em: 12/09/2014*

*Aceito em: 21/01/2015*