

MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM OLHAR SEGUNDO AS ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS PRESENTES NOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

<http://dx.doi.org/10.4025/imagenseduc.v6i1.26697>

Marli Schmitt Zanella*

Lilian Akemi Kato**

* Universidade Estadual de Maringá – UEM. marlischmitt@hotmail.com

** Universidade Estadual de Maringá – UEM. lilianakemikato@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta uma interpretação das estratégias de ações de um grupo de seis alunos do quinto ano do ensino fundamental, de uma escola pública do Paraná, durante o desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem, na perspectiva da Educação Matemática. Sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, buscamos explicitar tais estratégias, reveladas por meio de expressões simbólicas, verbais e por indicativos de invariantes operatórios. Ademais, a Teoria dos Campos Conceituais se faz consoante com as orientações didáticas dos Parâmetros Curriculares Nacionais, no que tange as operações com números Naturais e aos significados necessários à estrutura aditiva e multiplicativa. As análises apresentadas evidenciaram que a inserção de tarefas de Modelagem favorece o desenvolvimento de diferentes estratégias de ações, pelas crianças, a partir das ferramentas matemáticas de que dispõem, bem como, explicitação e validação dos passos utilizados durante o desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem.

Palavras-chave: educação matemática, invariantes operatórios, teoria dos campos conceituais, tarefas de modelagem.

Abstract. Mathematical modeling in the early years of elementary education: a look according to didactic teaching presented in National Curriculum Parameters. This paper presents an interpretation of the action strategies of a group of six students from the fifth grade of elementary school, from a public school in Paraná State, during the development of a modeling task from the perspective of mathematics education. From the perspective of the Conceptual Fields Theory we tried to explain such strategies, developed through symbolic and verbal expressions, and indicative of operative invariants. In addition, Conceptual Fields Theory is done according to the didactic teaching of the National Curriculum Parameters, regarding operations with natural numbers and the necessary meanings for additive and multiplicative structure. The analyzes presented showed that the inclusion of modeling tasks favors the development of different strategies of actions by children, from using mathematical tools available to them, as well as explanation and validation of the steps used during the development of a modeling task.

Keywords: mathematics education, operative invariant, conceptual fields theory, modeling tasks.

Introdução

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) a aprendizagem da matemática está relacionada à compreensão do significado

do conceito estudado. Aprender o significado de um objeto matemático pressupõe, também, mobilizá-lo nos diversos contextos nos quais ele é requerido. No ensino da Matemática dois

aspectos básicos se destacam: o primeiro consiste em relacionar observações do mundo real com representações e, o segundo, consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos (BRASIL, 1997).

De acordo com Luna, Souza e Santiago (2009), o ensino da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental deve valorizar metodologias problematizadoras, em que se relaciona o conhecimento escolar com o contexto vivido pelo educando, de modo a proporcionar uma base para o desenvolvimento pleno do cidadão e do profissional. Estas são algumas das características presentes em tarefas de Modelagem Matemática¹ que, segundo Silva e Klüber (2012), podem representar uma modificação em modelos reducionistas de ensino para um modelo inovador durante os processos de ensino e de aprendizagem de matemática neste nível de ensino. Isto proporciona à criança participação ativa de seu processo de aprendizagem. A este propósito, a Modelagem, como alternativa pedagógica para as práticas de ensino e de aprendizagem em matemática procura tornar o ensino mais dinâmico, problematizador, investigativo e significativo para o aluno (Tortola, 2012).

Ademais, os pesquisadores Blum e Ferri (2009) sugerem que a Modelagem seja inserida nos anos iniciais da escolaridade do educando, pois é uma alternativa para modificar as crenças destes em relação à matemática, em que se buscam respostas únicas para situações problemas propostas em sala de aula, e até mesmo, promover uma postura crítica frente à presença da matemática na sociedade (Barbosa, 2003).

Diante do exposto, esta pesquisa objetivou elucidar algumas das potencialidades de uma tarefa de Modelagem, no atendimento das orientações didáticas presentes nos PCN, no que tange aos objetivos propostos para o ensino de matemática nos anos iniciais.

Para tanto, realizamos uma interpretação das estratégias de ações dos alunos, durante o desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem, à luz do referencial teórico proporcionado pela Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Para isso, explicitamos as resoluções dos educandos, reveladas por suas expressões simbólicas, verbais e por indicativos de invariantes operatórios. Ressaltamos que a TCC se faz consoante com as

orientações didáticas dos PCN, no que tange as operações com números naturais e aos significados necessários à estrutura aditiva e multiplicativa.

Nesse contexto, a relevância desta pesquisa caracteriza-se, também, por apresentar um estudo acerca dos invariantes operatórios relacionados à estrutura multiplicativa e aditiva, mobilizados pelas crianças, no desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem.

Teoria dos Campos Conceituais

Nesta sessão apresentamos as principais ideias da TCC, como referencial teórico, com discussão sobre definições e conceitos que a compõem. A TCC fundamentou as interpretações e inferências realizadas sobre as respostas de um grupo de alunos do ensino fundamental durante a resolução de uma tarefa de Modelagem. Ademais, esta teoria está em consonância com as orientações didáticas presentes nos PCN de matemática do ensino fundamental.

A TCC proporciona o estudo das ações dos estudantes e as condições de produção, registro e comunicação durante situações de aprendizagem. Para Vergnaud (1991), esta teoria preocupa-se com a formação e o desenvolvimento de conceitos, que emergem a partir de situações problemas que levem em consideração: a representação e o conceito e, os invariantes operatórios (conceitos e teoremas em ação) mobilizados na resolução da situação-problema.

Para uma classe de situações, o aluno tem várias decisões a tomar. A forma como o aluno age frente a diferentes situações depende dos esquemas que ele possui e mobiliza ao resolvê-las. Um esquema é a organização de uma classe de comportamentos distintos em função das peculiaridades de cada situação à qual se destina. Para Vergnaud (2009), o esquema é a organização invariante do comportamento para uma classe de situações voltadas à aprendizagem específica de um conceito, que pode indicar quais elementos cognitivos fazem com que a ação do sujeito seja operatória. Segundo Vergnaud (1993), a confiabilidade do esquema para o sujeito baseia-se no conhecimento que ele detém, das relações entre o algoritmo e as características da situação-problema que ele tem a resolver. Dessa forma, cada sujeito dispõe de vários esquemas alternativos, escolhidos em função dos valores das variáveis apresentadas em

¹Utilizaremos o termo Modelagem sempre que nos referirmos à Modelagem Matemática.

cada situação. Destaca-se que essa diversidade só é possível porque o esquema envolve:

- **invariantes operatórios** (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) que dirigem o reconhecimento, pelo sujeito, dos elementos pertinentes da situação e a tomada da informação sobre a situação a tratar;
- **antecipações da meta a atingir**, efeitos esperados e eventuais etapas intermediárias;
- **regras de ação** do tipo 'se... então...' que permitem gerar a sequência das ações do sujeito;
- **inferências** (ou raciocínios) que permitem 'calcular' as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que o sujeito dispõe (Vergnaud, 1990, p. 19, grifos nossos).

Por invariantes operatórios, Vergnaud (1993) distingue três tipos: teorema em ação, conceito em ação e argumento, dos quais descreveremos apenas os dois primeiros. Um teorema em ação não é um verdadeiro teorema científico, tão pouco o conceito em ação é um conceito científico. Para o autor, discute-se a veracidade ou não destes invariantes se o fizermos cientificamente e de forma explícita, pois podem, progressivamente, tornar-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos. Os invariantes operatórios: proposição e função proposicional são explicitados e exemplificados no Quadro 01.

Quadro 01: Proposição e função proposicional.

Proposição – Teorema em ação	Função proposicional – Conceito em ação
São teoremas em ação implícitos e têm validade local, ou seja, são verdadeiros apenas para um conjunto de situações.	São conceitos em ação implícitos, que se assumem pertinentes na ação.
No conjunto dos números naturais a operação de multiplicação equivale a soma sucessiva de parcelas iguais , que sempre aumenta. Representação da proposição: Seja a e b números naturais, tal que o produto entre eles seja positivo, isto é, sejam $a, b \in \mathbb{N}$: $a \times b > 0$. Esta é uma proposição	A multiplicação é entendida como soma de parcelas iguais. Representação da função proposicional: $n \times a = \underbrace{a + a + a + a + \dots + a}_{n \text{ vezes}}$ A afirmação anterior representa um conceito em ação, pertinente à operação de multiplicação. Note que este conceito é proveniente do teorema em ação, pois

verdadeira para conjunto dos números naturais, sempre que $a \neq 1; b \neq 1$. A afirmativa de que o produto sempre aumenta torna a proposição restrita a determinados conjuntos numéricos. Quando trabalhamos com outros conjuntos numéricos, por exemplo, o conjunto dos números inteiros ou o conjunto dos números racionais, verifica-se que o produto nem sempre aumenta, e nestes casos, a proposição passa ser considerada um teorema em ação falso.	não há função proposicional sem proposição.
--	---

Fonte: Autores.

Os conceitos em ação não existem sem os teoremas em ação, mas só têm sentido em proposições verdadeiras, por meio das quais podem exercer sua função. Ademais, os conceitos são instrumentos nocionais para resolver o problema, sem possuir a necessidade de serem explicitados pelo sujeito.

Com o exposto, inferimos que os invariantes operatórios são percebidos no estudo das ações do sujeito, que se constituem como fontes de pesquisa para auxiliar o professor na compreensão da estratégia utilizada pelo aluno para resolver diferentes situações problemas.

Outro conceito amplamente teorizado em diversas pesquisas e definido por Vergnaud (1990) é a ideia de um campo conceitual, que é um conjunto de situações com ampla variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas. Isso significa que um conceito não se encontra isolado, por isso é necessário trabalhar os diferentes significados de um conceito por meio de uma variedade de problemas. A adição e a subtração são exemplos de conceitos que ganham sentido quando considerados como parte de um campo conceitual, o campo da estrutura aditiva, que é o conjunto de situações cujo domínio requer uma ou várias adições ou subtrações ou uma combinação de tais operações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações como tarefas matemáticas. Este campo é dividido em seis categorias de situações, descritas no Quadro 02, a saber: composição – de medida, de transformação e de relação, transformação – de medida e de relação, e, comparação de medida (Vergnaud, 1991).

Este autor também definiu o campo conceitual da estrutura multiplicativa, que é o conjunto de situações cujo domínio requer uma

ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações como atividades matemáticas. Vergnaud (1991) distingue duas categorias principais, o isomorfismo de medidas e o produto de medidas, descritas no Quadro 02.

A TCC valoriza os aspectos estruturais dos invariantes operatórios, analisando-os do ponto de vista dos próprios saberes constituídos. Neste artigo, utilizamos a TCC como referencial teórico para analisar uma tarefa de Modelagem desenvolvida com alunos do quinto ano do ensino fundamental. Na sequência, apresentamos brevemente uma discussão acerca das relações entre a TCC e os PCN.

Relações entre a Teoria dos Campos Conceituais e os Parâmetros Curriculares Nacionais

Os PCN, documento normativo para o currículo de matemática e demais disciplinas dos anos iniciais do ensino fundamental, estão em consonância com a TCC, utilizado na formulação das orientações didáticas. Este documento, dividido em duas partes, é um instrumento de orientação nacional que objetiva estimular a busca coletiva de soluções para as dificuldades enfrentadas por professores e alunos nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental (Brasil, 1997). Na primeira parte são apresentados os princípios norteadores da disciplina de matemática e uma breve trajetória das reformas educacionais ocorridas nas últimas décadas, em que se destacam as mudanças curriculares e teórico-metodológicas, bem como os objetivos gerais esperados para este nível de ensino. A segunda parte do documento é destinada aos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, em que são apresentados os objetivos específicos da disciplina para cada ciclo do, os blocos de conteúdos, os critérios de avaliação e algumas orientações didáticas (BRASIL, 1997).

Nos PCN são fornecidas algumas orientações para a seleção e organização de conteúdos de Matemática que devem ser contemplados nos anos iniciais do ensino fundamental, divididos em quatro blocos de conteúdos, a saber: números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; tratamento da informação.

As orientações didáticas apresentadas nos PCN para o bloco de conteúdo números e

operações estão em consonância com a TCC. O foco desta teoria é o próprio conteúdo do conhecimento e a análise conceitual do domínio desse conhecimento (Vergnaud, 1991).

Destacamos que no bloco números e operações é dada ênfase aos diferentes significados da adição, subtração, multiplicação e divisão entre números naturais, e neste caso, os PCN sugerem que sejam trabalhadas situações que envolvem estes significados, separados em quatro grupos para a estrutura aditiva e outros quatro para a estrutura multiplicativa, apresentadas na primeira coluna do Quadro 02. Na segunda coluna deste quadro, estão descritas as categorias de situações problemas para as estruturas aditiva e multiplicativa, organizadas de acordo com a TCC.

Quadro 02: Semelhanças entre situações problemas sugeridas nos PCN e as categorias descritas pela TCC para as estruturas aditiva e multiplicativa.

Situações envolvendo adição e subtração – PCN (Brasil, 1997, p. 70-71).	Categorias segundo a TCC (Vergnaud, 2009, p. 200).
Estrutura aditiva	
Situações associadas à ideia de combinar dois estados para obter um terceiro, ação de juntar.	1ª categoria: duas medidas se compõem para resultar em uma terceira. 6ª categoria: dois estados relativos (relações) se compõem para resultar em um estado relativo.
Situações associadas à ideia de transformação, ou seja, alteração de um estado inicial, que pode ser positiva ou negativa.	2ª categoria: uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida. 5ª categoria: uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em um estado relativo.
Situações associadas a ideia de comparação.	3ª categoria: uma relação liga duas medidas.
Situações que supõem a compreensão de mais de uma transformação (positiva ou negativa).	4ª categoria: duas transformações se compõem para resultar em uma transformação.
Estrutura Multiplicativa	
Situações envolvendo multiplicação e divisão – PCN (Brasil, 1997, p. 71-73).	Categorias segundo a TCC (Vergnaud, 2009, p. 239-253).
Situações associadas à multiplicação comparativa.	Isomorfismo de medidas: Na multiplicação conhecemos o valor unitário e outras duas quantidades, em dois tipos de medidas (operador vertical ou horizontal).
Situações associadas à comparação entre razões, que envolvem a ideia de proporcionalidade.	Na divisão : busca do valor unitário ou busca da quantidade de unidades.
Situações associadas à configuração retangular.	Poderia ser interpretada como isomorfismo de

	medidas.
Situações associadas à ideia de combinatória.	Produto de medidas: Na multiplicação se busca a medida-produto, conhecendo-se as medidas elementares. Na divisão se deseja encontrar as medidas elementares, conhecendo-se uma medida elementar e a medida produto. Estão subdivididas: produto discreto-discreto, produto contínuo-contínuo e noção de média.

Fonte: Adaptado de Brasil (1997) e Vergnaud (2009).

Com relação aos recursos metodológicos para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, os PCN sugerem o uso da resolução de problemas, a história da matemática, as tecnologias da informação e jogos (Brasil, 1997, p. 32-33). Ressaltamos que no item destinado à resolução de problemas este documento evidencia alguns princípios norteadores para sua utilização em sala de aula, que estão intimamente relacionados à TCC, entre eles destacamos:

- A exploração de situações que os alunos necessitem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-la, ou seja, a situação problema é distinta de um exercício, em que o aluno aplica um processo operatório de forma mecânica;
- As aproximações sucessivas realizadas para chegar a um conceito são construídas pelo aluno quando ele resolve um certo tipo de problema, e quando o estudante utiliza este conceito em outras situações pode realizar retificações, filiações e rupturas deste conhecimento;
- Um aluno constrói um campo de conceitos que tomam sentido a partir de uma diversidade de situações problemas, e não em resposta a apenas um problema, pois um conceito matemático é construído na articulação entre outros conceitos, por meio de retificações e generalizações.

A partir destes princípios, os PCN (Brasil, 1997) elencam também algumas características para as situações problemas, entre elas, a necessidade da realização de uma sequência de ações ou operações para se obter um resultado, o que corrobora com a concepção de situação-problema defendida por Vergnaud (1991). Segundo os PCN (Brasil, 1997, p. 33), resolver um problema pressupõe que o aluno: “elabore um ou vários procedimentos de resolução

(como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos; valide seus procedimentos”.

Os PCN sugerem sete objetivos do ensino de matemática para os anos iniciais do ensino fundamental:

- identificar os **conhecimentos matemáticos** como meios para **compreender e transformar o mundo à sua volta** e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o **espírito de investigação** e o desenvolvimento da **capacidade para resolver problemas**;
- fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); **selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente**;
- **resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos**, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- **comunicar-se matematicamente**, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes **representações matemáticas**;
- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
- sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções;
- **interagir com seus pares de forma cooperativa**, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (Brasil, 1997, p. 37, grifos nossos).

Diante do exposto e considerando o objetivo deste artigo, apresentamos na próxima seção o referencial teórico utilizado sobre Modelagem, bem como algumas de suas características para elucidar relações com as orientações didáticas presentes nos PCN, no que tange aos objetivos propostos para o ensino de Matemática neste nível escolar.

Modelagem matemática na educação matemática

Recentemente, os documentos curriculares orientadores da educação básica, como as Orientações Curriculares Nacionais (Brasil, 2006) também incluíram a Modelagem como um caminho possível para os processos de ensino e de aprendizagem da matemática. No Estado do Paraná, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) sugerem a Modelagem como uma das tendências metodológicas que devem fundamentar a prática docente, desde os anos finais do ensino fundamental ao ensino médio (Paraná, 2008).

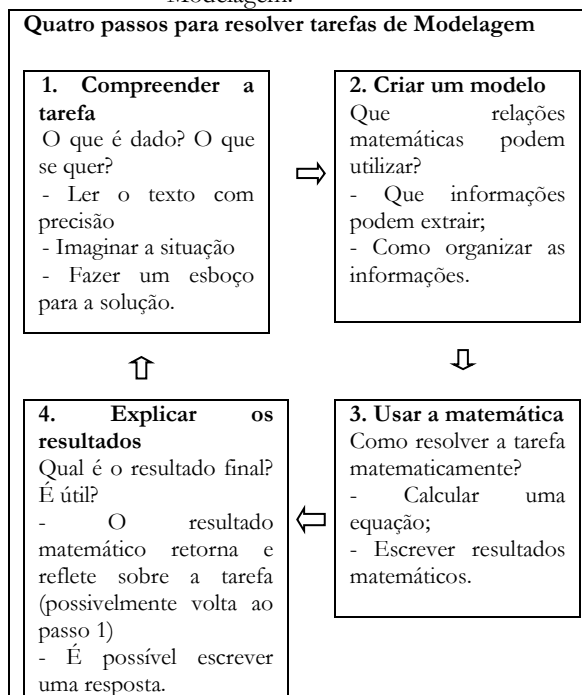
No contexto da educação matemática o termo Modelagem não possui um significado único, entretanto, de maneira geral, pode-se dizer que a Modelagem é a utilização da matemática para compreender e resolver situações problemas, que podem ter origem em áreas externas à matemática ou em situações do dia a dia (Barbosa, 2003; Luna, 2007).

Blum e Ferri (2009) compreendem por tarefas de Modelagem aquelas que requerem traduções substanciais entre a realidade e a matemática. Segundo Blum (2006), a Modelagem é uma tarefa matemática não rotineira, pois solicita ao aluno uma interpretação matemática de uma situação do mundo real, e desta forma, o educando tem a possibilidade de formular uma descrição matemática para desenvolver uma estratégia de resolução, ao invés de fornecer apenas um número como resposta, obtido por um procedimento único. Além disso, os alunos podem desenvolver um modelo que descreve uma situação extraída de um contexto real. Estes modelos podem incentivá-los a resolver, descrever, simplificar, revisar e refinar suas ideias (validar), bem como, utilizar uma variedade de meios de representação para explicar as estratégias utilizadas. Nesta pesquisa, adotamos os trabalhos de Blum (2006) e Blum e Ferri (2009) como perspectiva teórica para o desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem, que possibilita ao aluno descrever as estratégias de resolução e validar ou não sua resposta, além

de explicitar como os alunos pensam em uma dada situação (Blum & Ferri, 2009).

De acordo com Blum (2006), uma tarefa de Modelagem desenvolvida pelos alunos pode ser interpretada pelo professor, em termos de competências que os alunos desenvolvem durante a resolução, por meio de quatro passos, descritos no Quadro 03.

Quadro 03: Passos para resolver uma tarefa de Modelagem.



Fonte: Adaptado de Blum (2006, p. 21).

Estes quatros passos descritos por Blum (2006) para resolver atividades de Modelagem são provenientes do ciclo de Modelagem definido pelo autor em trabalhos anteriores.

O passo 1, 'compreender a tarefa', refere-se à primeira ação do educando, ou seja, ler a situação-problema e compreender a tarefa. O modelo da situação é o resultado de um interpretativo processo que irá fornecer a base para outras operações cognitivas, tais como: raciocínio formal, lógico, outros tipos de inferência e atividades de resolução de problemas, e com isto um novo modelo para a situação é construído. O passo 2, 'simplificar', consiste na simplificação da estrutura e da situação do modelo real. Em muitos casos, há processos puramente reducionistas. O passo 3, 'usar a matemática', envolve o processo de matematizar as informações contidas na situação-problema. É uma tradução das informações contidas no modelo real em um modelo matemático específico. Este processo é

realizado por meio da utilização de ferramentas ou operações matemáticas conhecidas. O passo 4, 'explicar os resultados', envolve os processos de interpretação e validação do modelo criado para a situação-problema. Nesta etapa, o aluno realiza uma tradução do modelo matemático desenvolvido em linguagem real para verificar o resultado, ou seja, para validar ou não o modelo construído.

A importância do conhecimento, pelo professor, do processo da Modelagem revela-se na sua compreensão dos diferentes papéis que professor e aluno exercem numa tarefa de Modelagem. Embora esses passos não sejam rígidos, eles orientam o processo de condução do desenvolvimento deste tipo de atividade. Na sequência, apresentamos o desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem por um grupo de alunos do ensino fundamental.

Análise e discussão de um episódio de modelagem matemática: identificando as categorias de Vergnaud

Objetivamos neste artigo elucidar algumas das potencialidades de tarefas de Modelagem com alunos dos anos iniciais do ensino fundamental, no atendimento das orientações didáticas presentes nos PCN, no que tange aos objetivos propostos para o ensino de matemática neste nível escolar.

Fundamentados nos referenciais teóricos aqui apresentados, buscamos identificar na resolução de uma tarefa de Modelagem, as categorias definidas por Vergnaud (2009) envolvendo a estrutura aditiva e multiplicativa.

Desta forma, optamos por uma abordagem predominantemente qualitativa, em consonância com os pressupostos teóricos definidos por Bogdan e Biklen (1994), com intuito de auxiliar na descrição dos dados coletados durante a pesquisa.

Apresentamos no Quadro 04 a atividade de Modelagem intitulada 'O pé grande', adaptada de Blum e Ferri (2009). Na sequência, descrevemos a abordagem realizada pelos estudantes em resposta a problemática proposta, e buscamos elucidar, nos registros escritos e orais, elementos da TCC, que fundamentam nossas inferências em relação aos objetivos deste trabalho.

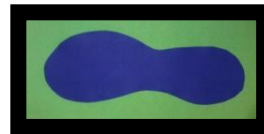
Quadro 04: Atividade 'O pé grande'.

O Pé Grande

Problemática: Saiu no jornal a seguinte notícia:

"Uma joalheria foi roubada na noite passada e todas as joias foram levadas pelo meliante. A polícia não conseguiu

capturar o ladrão. A única pista que os policiais encontraram na cena do roubo foi uma grande pegada deixada pelo ladrão, como você pode ver na foto" (Blum & Ferri, 2009).



De acordo com a notícia do jornal, ajude a polícia determinar a altura do ladrão. Não se esqueça de justificar a resposta.

Fonte: Autores.

A fonte de coleta de dados de nossa pesquisa constituiu-se de registros escritos e registros orais transcritos de áudio, produzidos por seis alunos do quinto ano do ensino fundamental, em uma instituição pública de ensino em Maringá, Paraná, durante o desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem. A descrição dos dados e registros obtidos durante a investigação foi utilizada para ilustrar e substantiar as análises dos pesquisadores.

Os alunos trabalharam em dois grupos, os quais foram nomeados de Grupo 1 e Grupo 2. Para a transcrição de áudio, a identificação dos alunos é representada pela letra maiúscula A, seguido da numeração de 1 até 6. Assim, quando ilustramos a fala do aluno 1, este será representado por A1. A nomenclatura Pesq. é utilizada para representar a fala da pesquisadora.

A atividade foi realizada em dois encontros, em 24/04/2014 e 08/05/2014, totalizando 140 minutos. Esta escola oferece ensino em tempo integral, e a investigação foi realizada durante a oficina de matemática, em contra turno aos das atividades regulares. Nas datas em que desenvolvemos esta tarefa, do total de 15 alunos que participam das atividades em tempo integral, apenas seis estavam presentes. Na sequência, apresentamos os resultados obtidos durante o desenvolvimento da atividade de Modelagem 'O pé grande'.

Descrição e análise do Grupo 1

Este grupo, composto pelos alunos A2, A3 e A5, adotou como estratégia a comparação das medidas do pé e da altura de cada integrante. Após a leitura da problemática, iniciaram a discussão acerca da tarefa. No Quadro 05, estão descritas as medidas que o grupo identificou e registrou.

Quadro 05: Medidas do Grupo 1

Identificação	Medida pé	Medida da altura
A5	21 cm	1,35 m
A2	20 cm	1,40 m
A3	22 cm	1,42 m

Fonte: Autores.

A primeira discussão realizada pelos estudantes mostra um equívoco sobre o número do calçado e a medida do pé.

A5: Gente, mas é só vocês medirem esse pé. (referindo-se ao molde do pé na folha de instruções).

A2: Mas, na verdade, esse pé mede 40 centímetros. Nós já medimos.

A4: Agora, temos que descobrir o tamanho dele.

A5: Que pezão.

A6: Aquele pezão tem 40 centímetros!

A2: Então, é por isso que está sendo difícil.

[...]

A4: Então, o pé dele é 40. E aí tem que achar a altura dele. Mas para isso, tem que achar uma pessoa que calça 40.

Pesq.: Mas nesse caso, o pé é de 40 centímetros ou é um pé que calça 40?

A4: É o pé que calça o número 40.

Pesq.: Mas vocês mediram o pé de vocês? Quanto deu a medida do seu pé?

A4: A minha deu 25.

Pesq.: Mas 25, o quê?

A4: É 25 centímetros.

A5: Eu posso medir o meu agora?

Pesq.: Sim. Mas que número você calça? É 25?

A4: Eu calço 36.

A6: Eu calço 31/32.

Pesq.: ok. Mas, e o teu pé mede?

A4: 25.

Pesq.: Está vendo que é diferente? A medida do pé e o número do calçado?

A4: Sim.

A2: Ah! Eu pensei... eu tentei descobrir que tamanho ele podia calçar, porque, somou o pé de cada um do grupo, e aí, a gente marcou o número que cada um calçava. Se o tamanho do pé do ladrão fosse o mesmo número, até chegar o tamanho do calçado, fosse o mesmo de todos, aí da para achar a altura. Só que não deu.

Neste diálogo entre os alunos, inicia-se o desenvolvimento do passo um do ciclo de Modelagem, em que discutem sobre a tarefa e buscam compreendê-la. Se os estudantes não tivessem esclarecido, entre eles, como iriam trabalhar, o entendimento sobre a tarefa não seria possível. Eles definiram entre si que deveriam trabalhar com a medida do pé (em centímetros), pois a informação do número do calçado não os auxiliaria. A partir disso, iniciam o passo 2 do ciclo de Modelagem, ou seja, começam a desenvolver uma estratégia para

determinar um 'modelo' para a resolução da atividade.

A segunda estratégia desenvolvida por este grupo é aquela em que se utiliza a multiplicação por contagem (Vergnaud, 1993), ou seja, o aluno usa a adição de parcelas iguais para resolver a multiplicação, como podemos extrair a partir do diálogo entre os alunos:

A2: Já sei, por que se tivesse aqui um pé, de alguém aqui, que era de 20 centímetros, mas você tem o pé 'piquitinho', por que se tivesse o pé pequeno era fácil para dar 40 centímetros.

A5: Olha, mas tem um pé de 20 centímetros e aí acabou.

A2: Então, se colocasse 20+20, vai dar 40. Ai, pegava a A5, quanto você mede? Aí, media ela, por exemplo, 1 e 36, mais 1 e 36.

Pesq.: Então vamos fazer esta estratégia?

A2: A5 agora vamos medir o meu pé. [...]

A2: A, não creio que meu pé ...é 20. (com empolgação)

A5: Você colocou o seu pé na folha, certinho?

A2: Não.

As crianças medem novamente.

A2: Meu pé é 20 (com muita felicidade). Vamos medir mais uma vez. Para ter certeza.

Pesq.: Isso, coloca o pé, no chão, e risca.

A5: Onde está a fita? Coloca aqui A2.

A2: Yes, o meu deu 20.

A5: É, deu 20.

Neste caso, os estudantes apresentaram a resolução a partir da medida do pé de um dos integrantes, representado na Figura 01. Como estratégia, somaram duas parcelas de 20 centímetros, que representa a medida do pé do aluno A2, para obter 40 centímetros, correspondente à medida do pé do ladrão. Na sequência, realizaram o mesmo procedimento com a altura do aluno A2, e obtiveram uma possível altura para o ladrão, medindo 2 metros e 80 centímetros. Essa abordagem exemplifica como desenvolveram um modelo para a resolução da atividade e percorrem o passo 3 do ciclo de Modelagem, em que utilizam a matemática para obter uma solução.

Figura 01

$$\begin{array}{r} 20 \\ + 20 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1.40 \\ + 1.40 \\ \hline 2.80 \end{array}$$

Fonte: Autores.

Observamos que nesta resolução os alunos apresentaram um resultado em que utilizaram o invariante operatório pertencente a estrutura aditiva, e tentaram resolver a questão proposta, que corresponde à estrutura multiplicativa, com recursos e modelos de estruturas aditivas. Esta estratégia apresenta indicativos de um teorema em ação.

Este grupo também discutiu sobre a validade desse resultado, fizeram questionamentos sobre a existência de uma pessoa com esta altura, o que explicita o início de uma discussão a respeito da validade do modelo desenvolvido pelo grupo, ou seja, iniciam o passo 4 do ciclo de Modelagem:

A5: Se o cara for um pé grande, ele vai ser alto.
 A3: Dois metros e 80?
 A5: É sim, se ele for um pé grande. [...]
 Pesq.: Como vocês fizeram?
 A2: Eu somei, 1 metro e 40, que é a minha altura, mais 1 metro e 40.
 A5: Esse cara é um pé grande.
 Pesq.: Isso mesmo, olha a pegada na folha. Então, a altura dele deu esse valor?
 A2: Isso, 2 metros e 80. Está certo, professora?
 Pesq.: O que vocês acham?

Isso demonstra que obter resultados reais não é o fim do ciclo de Modelagem, mas sobretudo, é relevante a discussão entre os alunos do grupo acerca da validação deste resultado, isto porque, conforme cita Ferri (2010, p. 21), “a comparação entre a Matemática e a realidade é um aspecto central na modelação”.

A terceira estratégia que o grupo apresentou foi comparar as medidas que tinham com a medida de um homem alto, visto que o ladrão deveria ser um homem e muito alto, já que tinha uma pegada muito grande, se essa fosse uma pista verdadeira, pois o ladrão poderia estar usando um pé de palhaço. Assim, as crianças se dirigem ao secretário da escola para identificar a altura e a medida do pé.

A2: A gente está investigando, para descobrir a altura do ladrão, que roubou a joalheria. Quanto você mede?
 Sec.: Eu tenho 1 metro e 84.
 A2: Sério?
 A5: E o seu pé? Senta, para gente medir. Olha, seu pé é 30.
 Sec.: Meu pé é 30 centímetros?
 A5: Sim. Não deu certo, né?

A2: Não, a única coisa que deu certo foi a que nós fizemos.

Sec.: Vocês querem saber quanto eu peso?

A5: É que a gente tinha que descobrir a altura do ladrão.

Sec.: Que ladrão?

A2: É que a gente está fazendo a atividade de matemática, e tinha o pé do ladrão, aí a gente tinha que achar a altura dele.

A5: O pé dele deu 40 centímetros.

Sec.: Então ele vai ser bem grande.

A5: Sim, ele vai ser muito alto.

A2: E a gente fez as contas, a altura dele vai dar 2 metros e 80.

Sec.: Nossa! Muito alto.

A5: Então, obrigada. Não deu certo.

Embora o pé do secretário medisse 30 centímetros, que corresponde a 75% ou $\frac{3}{4}$ da medida do pé do ladrão, o grupo não mobilizou outra abordagem contendo estas informações para identificar a altura do ladrão a partir da altura do secretário. Os participantes indicaram que esta medida não era útil para a tarefa, mas sim aquela desenvolvida anteriormente, a partir da medida de um dos alunos do grupo. Na sequência, descrevemos e analisamos as estratégias desenvolvidas pelo Grupo 2.

Descrição e análise do Grupo 2

Este grupo, composto pelos alunos A1, A4 e A6, iniciou a atividade anotando a medida dos pés e a altura de cada participante, como mostra o Quadro 06.

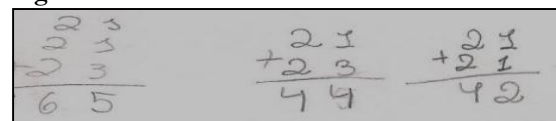
Quadro 06: Medidas dos alunos do Grupo 2.

Identificação	Medida pé	Medida da altura
A1	21 cm	1,35 m
A6	21 cm	1,40 m
A4	23 cm	1,48 m

Fonte: Autores.

Estes alunos realizaram uma composição de medidas com os valores obtidos para os pés de cada um, registrados no Quadro 06, e apresentaram várias tentativas, como mostra a Figura 02.

Figura 02



Fonte: Autores.

Embora tenham encontrado valores próximos de 40 centímetros, os estudantes preocupam-se em determinar valores exatos, como mostra o diálogo a seguir.

A4: Olha professora, eu estava vendo aqui: $1+1$ é 2, e $2+2$ é 4, deu 42, só que não deu a altura.

A6: Passou um pouquinho.

Pesq.: Mas, essa medida é a altura dele (do ladrão)?

A6: Do pé.

A4: Olha, aqui vai dar 44 (se fizer $21+23$).

A1: Deixa-me fazer a conta para ver.

A4: Não, eu estava falando só desses dois, eu não estava falando desses três.

A1: Ok.

A4: A A6 vai fazer, ela precisa aprender. Cada um vai fazer uma conta.

A6: Mas, eu não sei fazer continha de mais.

A1: Olha aqui, $1+3$ é: 1, 2, 3, 4? ... Conta nos dedos.

A4: É fácil, olha, você tem $3 + 1$, dá 4. Viu?

A1: Mas por que você colocou 5 aí? É 4!

A4: Olha, 3 coloca mais 1, fica 4.

Pesq.: E então, A6.

A1: Vai dar 44 professora!

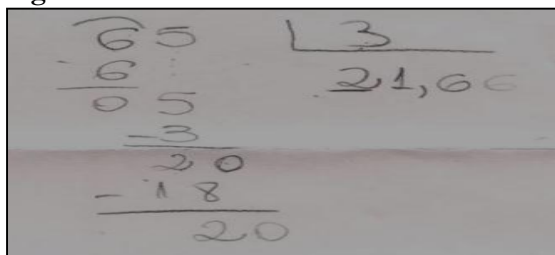
A6: Ok. Vou arrumar.

A4: Agora, $2+2$, é quanto? Conta nos dedos.

A6: É 4.

Outra estratégia desenvolvida foi definir uma média entre a medida dos pés dos participantes, tal como indicado na Figura 03, em que concluíram que esta média seria de 21,6 centímetros.

Figura 03



Fonte: Autores.

A abordagem apresentada por este grupo até aqui, é pertinente para a problemática inicial e se verifica a compreensão da atividade pelos alunos, o que permite afirmar que realizaram os passos 1, 2 e 3 do ciclo de Modelagem. Entretanto, não conseguiram dar sequência a este raciocínio, portanto não apresentaram um

modelo para tal tarefa. Na sequência, este grupo mobilizou outra estratégia para resolver a problemática, e neste caso, fizeram a composição de medidas entre a altura e a medida do pé dos alunos, conforme mostra o diálogo a seguir e representado na Figura 04.

A4: Professora, eu fiz aqui os resultados, e fiz $44+42$, para dar a altura do cara e deu 86.

Pesq.: E esses 86, correspondem a quê?

A4: À altura do pé.

A6: A1 quanto você tem de altura?

A1: O meu deu 1,37.

Pesq.: E qual relação entre a medida do pé e a altura?

A4: Não tem né. [...]

A1: Professora, você sabe a resposta?

A4: É claro né.

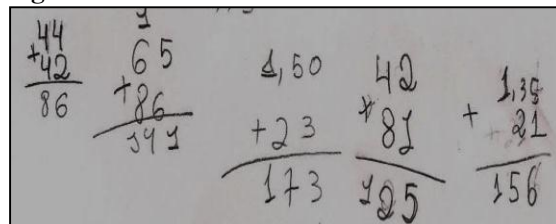
Pesq.: Mas, não existe uma única resposta.

A1: Não entendi.

Pesq.: Por exemplo, a resposta que o grupo de vocês vai determinar não será a mesma resposta que do outro grupo.

A4: Só se a gente copiar.

Figura 04



Fonte: Autores.

Destacamos que esta estratégia apresenta indicativos de um teorema em ação falso, pois não há relações estabelecidas entre altura de uma pessoa, que somada à medida do pé resulte em outra altura comparativa com aquela dada inicialmente. O que os estudantes fizeram, foi adicionar os valores que tinham encontrado, de maneira aleatória, conforme exemplificado no diálogo a seguir.

A6: Professora, eu estava pensando: nós podemos somar o pé de A1 com a sua altura.

Pesq.: E o que acontece se somar a altura e o tamanho do pé?

A1: A6, você tem colocar o número maior em cima, primeiro a altura, depois o tamanho do pé.

Pesq.: Olha, na montagem da soma, como você está fazendo, você tem que somar unidade com unidade, dezena com dezena. Da forma como você fez, você somou

unidades e depois, somou dezena e unidade. Tem que cuidar.

A1: Professora, você tem que fazer para nós.

Pesq.: Vamos lá A6, 5+1?

A6: 6; 3+2=5 (conta nos dedos).

Pesq.: isso.

A6: Professora, dá 156.

Pesq.: E esse 156, está em centímetros, em metros? O que ele representa?

A6: Está em centímetros.

Pesq.: Vejam, se uma pessoa tem 21 centímetros de comprimento de pé e tem 135 centímetros de altura, como podemos obter a altura de uma pessoa que tem 40 centímetros de pé? O que acontece de 21 centímetros para chegar em 40?

A1: Mas, olha só professora, você pode falar se é de mais?

Pesq.: Mas, olha só, vocês precisam pensar para decidir.

A1: É de mais? É de vezes?

A4: Vamos fazer 21 dividido por 1.

Pesq.: Mas, quanto é 21 dividido por 1?

A6: 21 dividido por 1, dá 1.

A1: (sussurra) dá 21.

A4: A5 se quiser nos ajudar, aceitamos.

A1: Olha A6, quanto é 1 vezes 21?

A6: Dá 21.

A1: Professora, ajuda a gente.

Pesq.: E se vocês fizessem uma média do comprimento do pé de vocês?

A1: Professora, sabia que um dia me perguntaram: quanto é 1 vezes 1? E eu falei 2.

A4: Eu também já falei que era 2.

Pesq.: E aí, como vocês vão fazer?

A4: É de adição, é de multiplicação.

Pesq.: Não adianta eu dizer para vocês o que fazer, vocês tem que tentar e discutir juntos. Por exemplo, o outro grupo fez uma média. E o que isso significa? Vamos ver? Por favor, A2, quais os comprimentos dos pés de vocês?

Os alunos deste grupo apresentaram muitas dúvidas com relação aos cálculos. Em cada passagem do desenvolvimento da atividade, solicitavam a presença da pesquisadora para verificar se o que haviam feito estava correto. Novamente, as crianças se reuniram para realizar os cálculos. Quando tentaram realizar a operação de divisão, apresentaram ainda mais dúvidas. Nesse ponto, a professora fez uma intervenção para explicar como realizar a divisão de 65 por 3. Passados 5 minutos, e depois de a professora questionar os alunos sobre uma possível resposta para a problemática, eles não conseguiram formalizar uma resposta. Após

mais um tempo de discussão, a aula termina e este grupo não finaliza a tarefa.

Algumas discussões e encaminhamentos

A tarefa de Modelagem 'O pé grande' contempla conceitos matemáticos, que segundo Vergnaud (1993), pode ser categorizado como proporção simples, pertencente a estrutura multiplicativa. Nessa categoria se insere a lei de composição binária, e uma relação entre os números e as operações (multiplicação – comutativa).

As situações correspondentes a essa categoria podem ser representadas mediante tabelas numéricas e estão associadas a uma função linear – 'multiplicar por' ou 'dividir entre' (Silva, 2010), o que conduz a realização de uma multiplicação, uma divisão, ou uma regra de três, ou seja, buscam a quarta posicional. O esquema proposto por Vergnaud (1993) para esta classe de situações é representado no Quadro 07.

Quadro 07: Representação do esquema de proporção simples.

Comprimento do pé (centímetros)	Comprimento da altura (centímetros)
20	135
40	x

Fonte: Autores.

Nesta situação, representada no Quadro 07, se utiliza apenas um domínio de grandeza e uma relação funcional multiplicativa entre estes. Frequentemente, nos problemas desta categoria tem-se a impressão de que só intervêm dois números, na verdade, também intervêm a unidade, embora com frequência ela não apareça explicitamente.

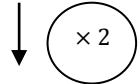
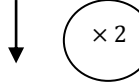
Para resolver esta problemática, a abordagem pode passar pelas propriedades de linearidade da função linear associada; pela multiplicação por um escalar ou pela aditividade. Uma equação correspondente à situação é a que segue:

$$\frac{20}{40} = \frac{135}{x} \Rightarrow 20 \cdot x = 40 \cdot 135 \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 135}{20} \Rightarrow x = 2 \cdot 135 \Rightarrow x = 270.$$

Com isto, a altura do 'Pé grande' é de 270 centímetros, ou 2,7 metros, de acordo com os dados utilizados pelo Grupo 2. O cálculo relacional desta situação ocorre por divisão de valores. De acordo com Vergnaud (2009), o operador vertical é um operador sem dimensão

ou escalar, que permite passar, de uma linha à outra, na mesma categoria de medidas, como representado no Quadro 08.

Quadro 08: Representação do operador vertical.

20 centímetros  40 centímetros	135 centímetros  x centímetros
---	---

Fonte: Autores.

Essas observações suscitaram reflexões quanto as diferentes abordagens mobilizadas pelos estudantes do quinto ano do ensino fundamental, pois embora a atividade pertença a estrutura multiplicativa, as resoluções ocorreram pela aplicação de procedimentos advindos da estrutura aditiva. De acordo com os PCN (Brasil, 1997) ao observar as estratégias de solução empregadas pelos alunos, evidencia-se que os problemas não se classificam em função unicamente das operações a eles relacionadas a priori, e sim em função dos procedimentos utilizados por quem os soluciona.

Esta atividade proporcionou, aos estudantes, a mobilização de diferentes possibilidades para a solução do problema proposto, que, por suas características, não tem uma resposta única, mas necessita que cada resposta seja coerente com os dados apresentados e as hipóteses adotadas. Esta é uma das características da Modelagem que favorece a aprendizagem da matemática com vistas à formação do pensamento criativo.

Com relação à tarefa de Modelagem desenvolvida, destacamos que ambos os grupos realizaram o passo 1 do ciclo de Modelagem definido por Blum (2006). A compreensão da tarefa permitiu aos alunos extrair informações, dados e representações a partir de atividades da vida real. Além disso, puderam traduzir para a linguagem matemática as informações do problema. Estas características presentes em tarefas de Modelagem correspondem ao primeiro objetivo do ensino de matemática para os anos iniciais:

Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e

o desenvolvimento da **capacidade para resolver problemas** (Brasil, 1997, p. 37).

Esta abordagem encaminhou os alunos do Grupo 1 para o desenvolvimento do passo 2, pois a tarefa de simplificar consistiu na hipótese inicial dos alunos sobre a relação entre a altura de um homem e a medida do comprimento do seu pé. A estratégia de ação refere-se a um modelo real, para na sequência realizar a matematização. Esta é outra característica de uma tarefa de Modelagem, que corresponde ao segundo objetivo do ensino de matemática: “selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente” (Brasil, 1997, p. 37).

No passo 3, o Grupo 1 realizou o processo de matematizar, que apresentou semelhança estrutural com a construção de teoremas em ação de Vergnaud, o que exigiu o desenvolvimento de competências matemáticas, uma vez que os alunos mobilizaram ações que privilegiaram aqueles conhecimentos que já dominavam. Na tarefa ‘o pé grande’ a relação entre medida da altura e a medida do comprimento do pé de um homem são informações consideradas pertinentes pelo estudante durante a resolução da tarefa. Assim, a elaboração de um modelo matemático envolve também a atividade de trabalhar matematicamente com os dados da situação-problema. Esta característica da Modelagem é semelhante ao terceiro objetivo do ensino de matemática “resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos” (Brasil, 1997, p. 37).

O passo 4, ‘explicar os resultados’, desenvolvido pelo Grupo 1, envolveu os processos de interpretação e uma discussão sobre a existência de um sujeito com a altura de 270 centímetros. Este processo é semelhante ao quarto objetivo do ensino de matemática para os anos iniciais do Ensino fundamental: “comunicar-se matematicamente e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas” (Brasil, 1997, p. 37).

Em seguida, apresentamos um resumo das ações de resolução dos estudantes para a tarefa ‘O pé grande’. Ações dos grupos na atividade:

Grupo 1:

Mediram o pé de cada participante.

Dobram a medida do pé (20 cm), e a altura do aluno (135 cm) para determinar a altura do ladrão.
Discutiram sobre o resultado encontrado.

Grupo 2:

Mediram o pé de cada participante.
Obtiveram a média dessas medidas.
Não definiram como determinar a altura do ladrão.

Do exposto e considerando os objetivos deste trabalho, as análises apresentadas evidenciam que tarefas de Modelagem favorecem o desenvolvimento de ações, pelas crianças, que são consoantes com as orientações didáticas presentes nos PCN, no que tange aos objetivos propostos para o ensino de matemática neste nível escolar. Nesse sentido, destacamos a relevância de estudos acerca da inclusão de tarefas de Modelagem nos anos iniciais do ensino fundamental, visto que um dos objetivos do ensino, em qualquer nível ou área de conhecimento, é levar o aluno a construir sua própria relação com o saber que lhe é ensinado, e a Modelagem pode permear esse processo.

Referências

- Barbosa, J. C. (2003). Modelagem matemática na sala de aula. *Perspectiva*, 27(980), 65-74.
- Blum, W. (2006). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer. In A. U. A. Büchter (Hrsg.). *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis* (s.8-23). Franzbecker: Hildesheim.
- Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Modellieren – Schon in der Grundschule? In A. Peter-Koop, G. Lilitakis & B. Spindeler (Hrsg.). *Lernungen – ein Weg zum kompetenzorientierten mathematikunterricht in der Grundschule*. (s. 142-153). Offenburg: Mildnerberger.
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. (M. J. Alvarez, S. B. Santos & T. M. Baptista Trad.) Portugal: Porto Editora.
- Brasil (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF.
- Brasil. (2006). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações curriculares para o ensino médio. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias* (Vol. 2). Brasília: MEC.
- Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de matemática. *Educação e Matemática*, 110, 19-25.
- Luna, A. V. A. (2007). Modelagem matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: um estudo de caso no 1º ciclo. *Anais da Conferência Interamericana de Educación Matemática*. Santiago de Querétaro, México, 12.
- Luna, A. V. A., Souza, E. G., & Santiago, A. R. C. M. (2009). A modelagem matemática nas séries iniciais: o germém da criticidade. *Alexandria – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 135-157.
- Paraná. (2008). Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica: matemática*. Curitiba: SEED.
- Silva, S. R. F. (2010). *Um estudo das estruturas multiplicativas nos Guias de Planejamento e Orientações Didáticas do Programa Ler e Escrever*. Dissertação de mestrado, Universidade Bandeirante, São Paulo, SP, Brasil.
- Silva, V., & Klüber, T. E. (2012). Modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: uma investigação imperativa. *Revista Eletrônica de Educação*, 6(2), 228-249. Recuperado em 10 fevereiro, 2016, de <http://www.reveduc.ufscar.br>
- Tortola, E. (2012). *Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches didactiques des mathématiques* (Vol. 10.2.3). Grenoble: Ed. La pensée sauvage.
- Vergnaud, G. (1991). A teoria dos campos conceptuais. In J. Brun. (Org.). *Didáctica das Matemáticas*. (M. J. Figueiredo, Trad.). Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos. (Obra original publicada em 1990).

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos
Conceituais. (1993). *Anais do Seminário
Internacional de Educação Matemática do Rio de
Janeiro*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1.

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática e a
realidade: problemas do ensino da matemática na escolar
elementar*. (M. L. F. Moro, Trad., M. T. C. Soares,
Rev.). Curitiba: Editora da UFPR.

Recebido em: 24/02/2015

Aceito em: 22/04/2015