

## MODELO DE ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA PLANA CONSIDERANDO A FLAMBAGEM E A NÃO - LINEARIDADE FÍSICA

### PLANE TRUSS FINITE ELEMENT MODEL CONSIDERING THE BUCKLING AND PHYSICAL NONLINEARITY

Luiz Antonio Farani de Souza<sup>1</sup>

**Resumo:** As treliças possuem um vasto campo de aplicação na Engenharia de Estruturas, sendo muito utilizadas na construção de pontes, em estruturas de cobertura de edificações, em torres de transmissão de energia, entre diversos outros usos. Em geral são relativamente leves e especialmente indicadas para superar grandes vãos ou suportar carregamentos elevados. Nesse contexto, as treliças tornam-se uma solução econômica e prática. Este artigo tem como objetivo avaliar o comportamento estrutural de treliças planas via Método dos Elementos Finitos considerando o comportamento pós - flambagem e a não - linearidade física. A relação constitutiva da barra é descrita por um modelo fundamentado na teoria da Mecânica do Dano Contínuo. As trajetórias de equilíbrio são fornecidas por meio de uma análise incremental e iterativa baseada no método de Newton - Raphson. Um código computacional é desenvolvido e implementado com o programa Scilab, e análises numéricas são efetuadas a partir de problemas de treliças encontrados na literatura, discutindo-se alguns aspectos envolvidos na modelagem computacional. Os resultados numéricos preditos pela modelagem proposta demonstram a potencialidade do algoritmo em estimar a capacidade resistente última da estrutura.

**Palavras-Chave:** Treliça plana. Elementos Finitos. Flambagem. Mecânica do Dano.

**Abstract:** The trusses have a wide application in Structural Engineering, being heavily used in the construction of bridges, roof structures of buildings, energy transmission towers, among many other uses. Usually they are relatively light weight and especially indicated to overcoming large spans or support high loadings. In this context, the trusses become an economical and practical solution. This paper aims to evaluate the structural behavior of plane trusses via Finite Element Method considering the post - buckling behavior and physical nonlinearity. The material constitutive relation is described by a model based on the Continuum Damage Mechanics theory. The equilibrium paths are provided through an incremental and iterative analysis based on the Newton - Raphson method. A computer code is developed and implemented with Scilab program, and numerical analyzes are performed from trusses problems found in the literature, by discussing some aspects involved in computational modeling. The predicted numerical results by proposed modeling demonstrate the capability of the algorithm to estimate the ultimate strength capacity of the structure.

**Keywords:** Plane Truss. Finite Element. Buckling. Damage Mechanics.

## 1 INTRODUÇÃO

A treliça é um elemento estrutural constituído por elementos lineares (barras) que podem estar dispostos em diversos planos - estruturas bidimensionais ou tridimensionais. Este elemento é muito utilizado na construção de pontes (rodoviárias e ferroviárias), em estruturas de cobertura de edificações, em torres de transmissão de energia, entre diversos outros usos. Usualmente são construídas em madeira ou aço, sendo relativamente leves e indicadas para superar grandes vãos ou suportar carregamentos elevados. Nesse contexto, as treliças tornam-se uma solução econômica e prática (Kripka et al., 2013).

Para efeito de projeto deseja-se conhecer o carregamento último de colapso e sua resposta deslocamento *versus* força aplicada. Dependendo das características da estrutura, essa resposta pode ser linear ou não linear. No comportamento não linear não há

---

<sup>1</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná. lasouza@utfpr.edu.br

proporcionalidade entre o carregamento aplicado e as deformações e/ou deslocamentos. De maneira geral, podem-se identificar três tipos de comportamento não linear: física, geométrica e de contato (Martins et al., 2014).

Em treliças planas ou espaciais é comum tratar-se da relação constitutiva para a barra ao invés da relação constitutiva para o material. Neste caso, há uma diferenciação de tratamento ou de comportamento entre barras tracionadas e comprimidas. As barras tracionadas podem atingir o escoamento, enquanto as comprimidas podem apresentar instabilidade para tensões inferiores ao escoamento; essas características devem estar inclusas na relação constitutiva da barra.

Os componentes de sistemas estruturais sofrem, ao longo de sua vida útil, alterações que normalmente são dependentes de fatores ambientais e das ações às quais estão submetidos. Essas alterações, denominadas danos, podem levar ao comprometimento desses componentes. É fundamental que tais danos sejam identificados e avaliados no que concerne às suas localizações e intensidades. Falhas nestas estruturas podem levar a prejuízos materiais e até mesmo à perda de vidas em casos extremos (Santos et al., 2010).

Fisicamente, o dano pode ser visto como as deformações plásticas ou deformações permanentes originadas pela deterioração das propriedades físicas do material. Conhecer o início, a propagação e as causas do dano é de extrema importância para controlá-lo, estimando assim a vida útil e evitando o colapso de uma estrutura.

Devido ao avanço tecnológico e à utilização de materiais mais resistentes, estruturas mais complexas e esbeltas vêm sendo desenvolvidas, necessitando de métodos computacionais para a sua análise, tendo em vista a dificuldade de se modelar o comportamento real das mesmas com maior precisão. Dessa forma, este artigo apresenta uma proposta de modelagem de elementos estruturais treliçados por meio do Método dos Elementos Finitos.

A relação constitutiva da barra é descrita por um modelo baseado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998), com o acoplamento do efeito de pós - flambagem e de um critério de resistência. Estudos de problemas de treliças planas encontrados na literatura são realizados, sendo considerados dois comportamentos distintos da barra comprimida pós - flambagem: a barra não absorve mais esforços (a força normal no elemento é igual a zero); e a barra absorve parte do esforço (a força normal no elemento é igual à força crítica de flambagem). A solução do sistema de equações não - lineares é obtida por um processo incremental e iterativo considerando o método de Newton - Raphson. As simulações computacionais são realizadas com a ferramenta computacional gratuita Scilab.

## 2 MODELO DO ELEMENTO FINITO DE BARRA

A matriz de rigidez ( $\mathbf{k}$ ) e o vetor de força interna ( $\mathbf{f}$ ) para o elemento finito de barra são escritos no sistema de coordenadas locais por, respectivamente:

$$\mathbf{k} = \frac{(1-d)E_0A_0}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{f} = \frac{(1-d)E_0A_0}{L_0} \begin{bmatrix} u_i - u_j \\ 0 \\ -u_i + u_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Em que  $L_0$  é o comprimento indeformado da barra,  $d$  é o dano,  $A_0$  é a área indeformada,  $E_0$  é o módulo de elasticidade longitudinal, e  $u_i$  e  $u_j$  são os deslocamentos nodais. A força normal  $N$  na barra é determinada por:

$$N = \sigma A_0 = (1 - d)E_0 \varepsilon A_0 = (1 - d) E_0 \frac{\Delta L}{L_0} A_0 \quad (3)$$

Em que  $\sigma$  é a tensão normal,  $\varepsilon$  é a deformação específica, e  $\Delta L = L - L_0$  é o alongamento ou encurtamento da barra.

No sistema de coordenadas globais, a matriz de rigidez ( $\mathbf{K}$ ) e o vetor de força interna ( $\mathbf{F}$ ) são determinados por, respectivamente:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}\mathbf{k}\mathbf{T}^T = \frac{(1 - d)E_0A_0}{L_0} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{f} = \frac{(1 - d)E_0A_0}{L_0} (u_i - u_j) \begin{bmatrix} C \\ S \\ -C \\ -S \end{bmatrix} \quad (5)$$

Sendo  $\mathbf{T}$  a matriz de rotação, e as variáveis  $S$  e  $C$  denotam  $\sin(\alpha)$  e  $\cos(\alpha)$ , respectivamente.

Para descrever o comportamento constitutivo da barra, utiliza-se o modelo proposto por Manzoli (1998) fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo. A formulação deste modelo é descrita de maneira sucinta a seguir.

Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  é expressa por (Rodrigues, 2011):

$$\bar{\sigma} = E_0 \varepsilon \quad (6)$$

O limite de dano inicial  $r_0$  é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão limite de proporcionalidade  $f_0$  da seguinte forma:

$$r_0 = B_1 \frac{f_0}{\sqrt{E_0}} \quad (7)$$

Em que  $B_1$  é um parâmetro do modelo. Define-se a norma da tensão efetiva  $\tau(\bar{\sigma})$  por:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{E_0}} \quad (8)$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano é dado pelo máximo valor da variável  $\square$  durante o processo de carregamento, tal que:

$$r = \text{máx}(r_0, \tau) \quad (9)$$

A partir das Equações (6) e (8),  $\square$  pode ser expresso em termos da deformação  $\varepsilon$  por:

$$\tau(\varepsilon) = \sqrt{E_0} \varepsilon \quad (10)$$

A tensão normal  $\sigma$  no material é obtida da seguinte forma:

$$\sigma = (1 - d)E_0 \varepsilon \quad (11)$$

Em que o dano  $d$  é escrito em função do módulo  $H$  e do limite de dano  $r$ :

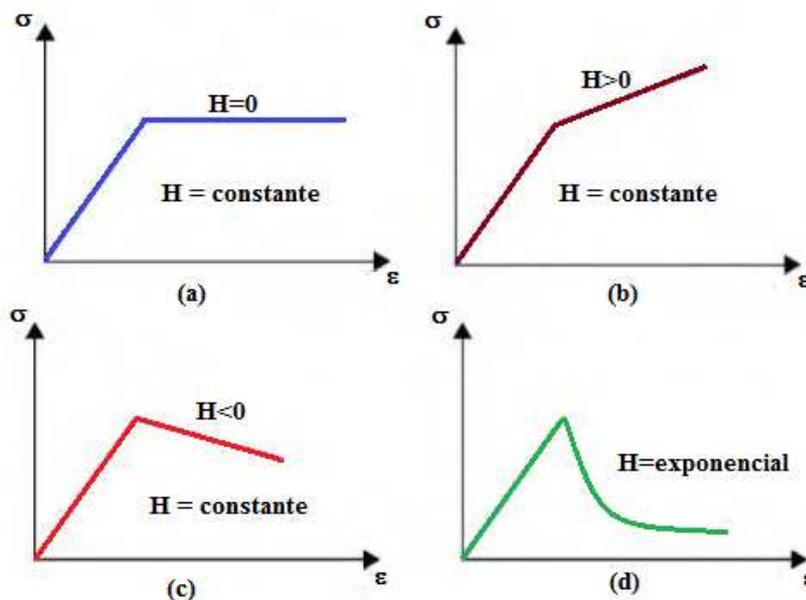
$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)} \quad (12)$$

Para o caso de um procedimento incremental, o dano  $d$  no passo de força  $t$  é obtido a partir da deformação específica da barra, a cada iteração  $i$ , pelo algoritmo do modelo constitutivo de dano diferenciado à tração e à compressão descrito no Quadro 1.

**Quadro 1.** Algoritmo do modelo constitutivo de dano.

|   |  |
|---|--|
| Entrada: $E_0, H_c, H_t, r_{0c}, r_{0t}, \varepsilon^{(i)}$ |  |
| 1)  | Calcular $\tau^{(i)} = \sqrt{E_0}  \varepsilon^{(i)} $         |
| 2)  | Se $\varepsilon^{(i)} > 0$ (tração)                            |
|   | Se $\tau^{(i)} > r_{0t}$                                       |
|   | $r^{(i)} = \tau^{(i)}$   |
|   | senão  |
|   | $r^{(i)} = r_{0t}$   |
|   | Fim  |
|   | Calcular $d^{(i)} = \frac{r^{(i)} - r_{0t}}{r^{(i)}(1 + H_t)}$ |
|   | Fim  |
| 3)  | Se $\varepsilon^{(i)} < 0$ (compressão)                        |
|   | Se $\tau^{(i)} > r_{0c}$                                       |
|   | $r^{(i)} = \tau^{(i)}$   |
|   | senão  |
|   | $r^{(i)} = r_{0c}$   |
|   | Fim  |
|   | Calcular $d^{(i)} = \frac{r^{(i)} - r_{0c}}{r^{(i)}(1 + H_c)}$ |
|   | Fim  |
| 4)  | Se $\varepsilon^{(i)} = 0, d^{(i)} = 0$ , Fim                  |
| 5)  | Se $d^{(i)} > 1, d^{(i)} = 1$ , Fim                            |
| 6)  | Se $d^{(i)} < 0, d^{(i)} = 0$ , Fim                            |
| Saída: $d^{(i)}$  |  |

No algoritmo, os subíndices "c" e "t" referem-se à compressão e à tração, respectivamente. Variando-se a função que descreve o módulo H, tem-se na Figura 1 em: (a) o regime elastodegradável perfeito; (b) o encruamento linear positivo (endurecimento); (c) o encruamento linear negativo (abrandamento); e (d) o abrandamento exponencial.



**Figura 1.** Comportamentos distintos de endurecimento e abrandamento. Fonte: adaptada de Rodrigues (2011).

### 3 MÉTODO NUMÉRICO PARA ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR

Para solucionar o sistema de equações não lineares adota-se o processo incremental e iterativo de Newton - Raphson. Para o passo de força no tempo  $t$  e iteração  $i$ , tem-se:

$${}^t\Delta\mathbf{R}^{(i)} = {}^t\mathbf{R} - {}^t_0\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (13)$$

$${}^t\mathbf{K}^{(i-1)} {}^t\Delta\mathbf{u}^{(i)} = {}^t\Delta\mathbf{R}^{(i)} \quad (14)$$

$${}^t\mathbf{u}^{(i)} = {}^t\mathbf{u}^{(i-1)} + {}^t\Delta\mathbf{u}^{(i)} \quad (15)$$

com as condições iniciais:

$${}^t\mathbf{u}^{(0)} = {}^{t-\Delta t}\mathbf{u} \quad (16)$$

$${}^t\mathbf{K}^{(0)} = {}^{t-\Delta t}_0\mathbf{K} \quad (17)$$

$${}^t\mathbf{F}^{(0)} = {}^{t-\Delta t}\mathbf{F} \quad (18)$$

Em que  ${}^t\mathbf{R}$  é o vetor de forças externas no passo de força  $t$ ,  ${}^t\mathbf{F}^{(i-1)}$  é o vetor de forças internas no passo de força  $t$  determinado em função dos deslocamentos da iteração  $i-1$  ( ${}^t\mathbf{u}^{(i-1)}$ ), e  ${}^t\mathbf{K}^{(i-1)}$  é a matriz de rigidez a qual é atualizada a cada iteração e avaliada em função do módulo de elasticidade  $E_0$  e do dano  $d$ .

O critério de convergência é determinado em função dos deslocamentos e deve obedecer a seguinte desigualdade:

$$\| \| \mathbf{u}^{(i)} \| - \| \mathbf{u}^{(i-1)} \| \| < u_{tol} \quad (19)$$

Sendo  $u_{tol}$  a tolerância,  $\mathbf{u}^{(i)}$  o vetor de deslocamentos na iteração  $i$ , e  $\mathbf{u}^{(i-1)}$  o vetor de deslocamentos na iteração  $i-1$ .

### 4 MODELOS DE PÓS - FLAMBAGEM

O comportamento pós - flambagem das barras da treliça sujeitas à força normal de compressão é avaliado neste trabalho por dois modelos:

#### a) Modelo 1

Quando a força normal na barra  $i$  ( $N_i$ ) atinge a força crítica de flambagem ( $N_{cr}$ ), supõe-se que a mesma não absorve esforço, não contribuindo para a rigidez da estrutura. A totalidade do esforço que ela deveria absorver é redistribuída para as demais barras da estrutura. Este modelo é descrito por:

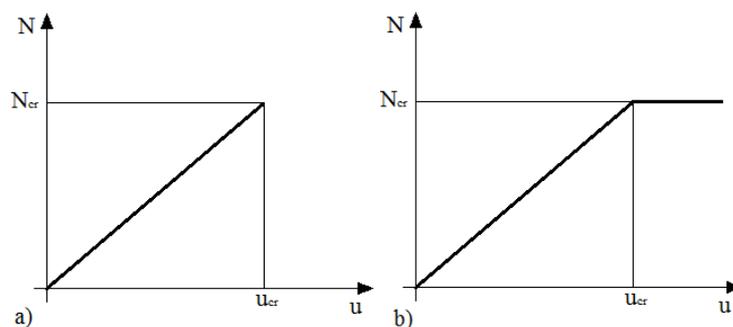
$$\text{Se } N_i \geq N_{cr}, E_i = 0 \text{ e o vetor de força interna é } \mathbf{f}_i^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

#### b) Modelo 2

No momento que o valor da força normal na barra é igual à força  $N_{cr}$ , a barra absorve parte do esforço, sendo a força normal igual à força crítica de flambagem. Este modelo é descrito para o elemento  $i$  por:

$$\text{Se } N_i \geq N_{cr}, \text{ o vetor de força interna é } \mathbf{f}_i^T = [N_{cr} \quad 0 \quad -N_{cr} \quad 0].$$

Na Figura 2 são apresentados os gráficos esquemáticos do deslocamento ( $u$ ) *versus* força normal na barra ( $N$ ) para os dois modelos de pós - flambagem.



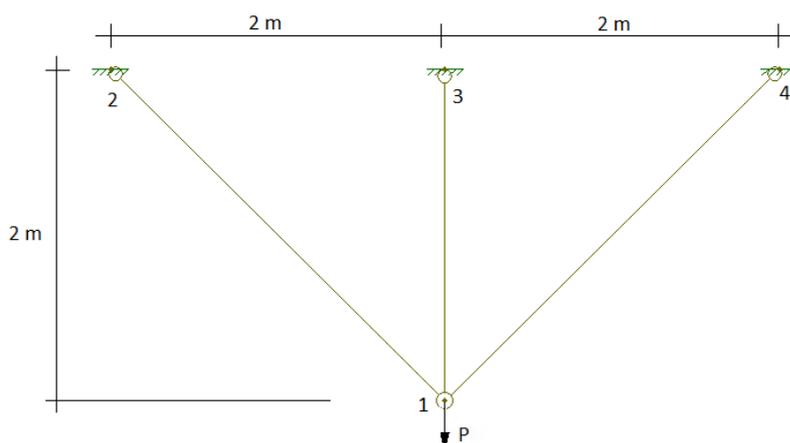
**Figura 2.** Curvas deslocamento *versus* força normal na barra para os modelos de pós - flambagem: a) modelo 1; e b) modelo 2.

## 5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos obtidos com a modelagem proposta a partir de problemas de treliça plana encontrados na literatura, com o objetivo de verificar a sua potencialidade quanto à análise estrutural considerando a pós - flambagem e a não - linearidade física. Admite-se, nas simulações, que os sistemas e elementos estruturais estão contraventados fora do plano e o peso próprio é desprezado nos mesmos.

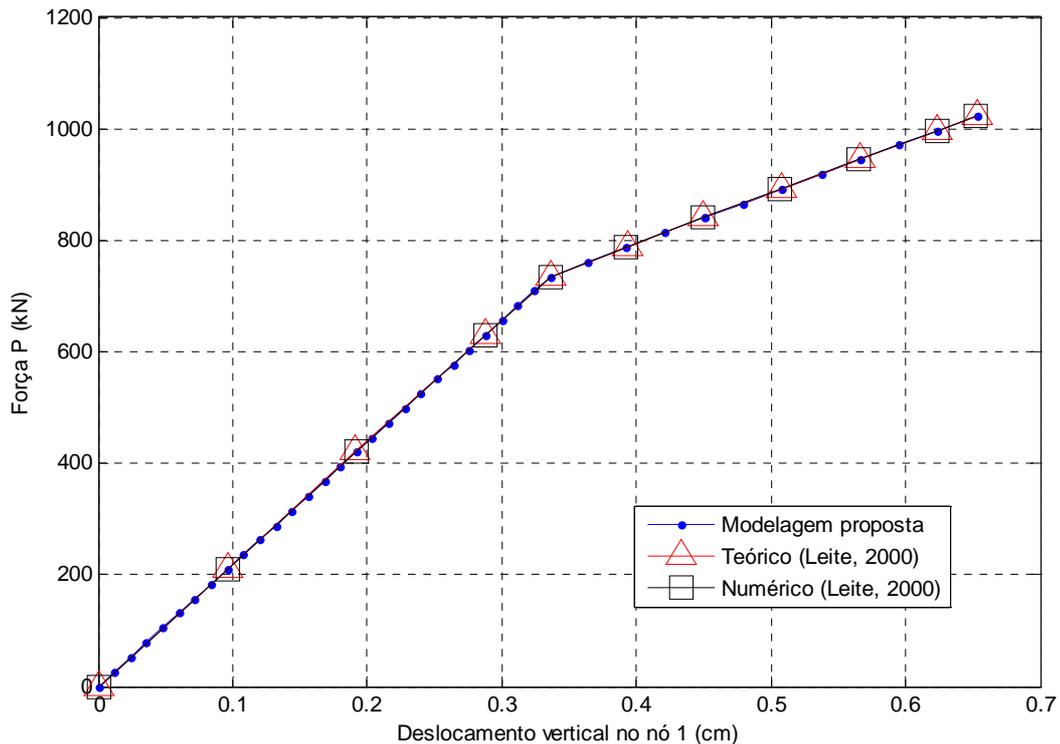
### 5.1 SIMULAÇÃO 1

Este exemplo numérico tem por objetivo verificar o modelo de treliça plana quanto à não - linearidade física. A treliça de três barras indicada na Figura 3 foi estudada por Leite (2000). As barras têm módulo de elasticidade  $E_0 = 20500 \text{ kN/cm}^2$ , tensão limite de escoamento  $f_0 = 34,50 \text{ kN/cm}^2$ , e área da seção transversal  $A_0 = 12,51 \text{ cm}^2$ . Uma força concentrada  $P$  é aplicada no nó 1. Considera-se o encruamento linear positivo para o comportamento físico da barra (modelo de dano isotrópico proposto por Manzoli (1998)), cujos módulos de endurecimento  $H_c$  e  $H_t$  são constantes e iguais a  $10^{-6}$  e  $B_1 = 1,0$ . O incremento de força utilizado é igual a  $26,25 \text{ kN}$ .



**Figura 3.** Esquema estrutural da treliça plana com três barras. Fonte: adaptada do programa Ftool.

Na Figura 4 são apresentadas as curvas deslocamento vertical no nó 1 *versus* força, comparando os resultados obtidos pela modelagem proposta com os resultados teóricos e numéricos apresentados por Leite (2000).



**Figura 4.** Curvas deslocamento vertical *versus* força P considerando a não - linearidade física.

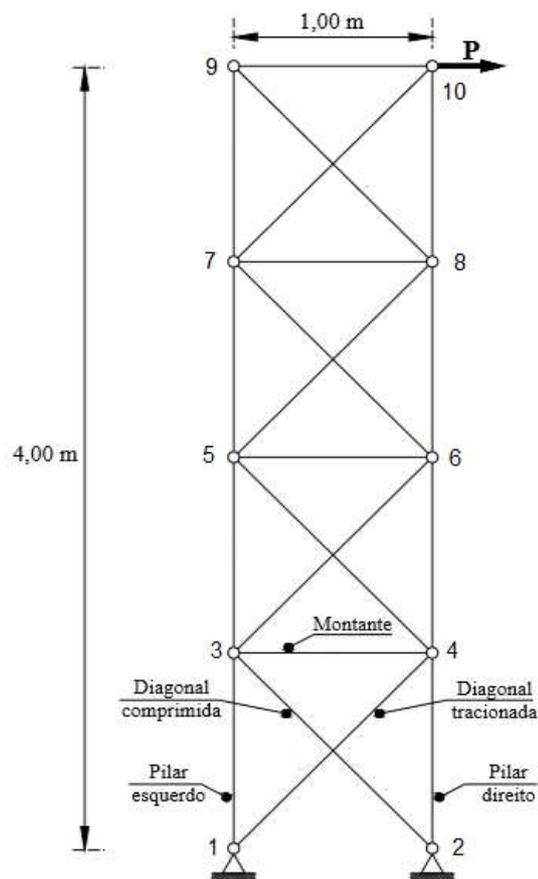
Vê-se na Figura 4 que há boa concordância entre as curvas. Todas as barras trabalham em regime elástico linear ( $d = 0$ ) até cerca de 70% da força aplicada ( $P \approx 735,00$  kN). A partir desse incremento de força somente a barra 1-3 escoou ( $d > 0$ ) diminuindo a rigidez do sistema, conforme indica a mudança de inclinação das curvas numéricas. Considera-se que a treliça falha no momento em que ocorre o escoamento das três barras. Assim, a convergência na simulação acontece para  $P \approx 1029,00$  kN, aproximadamente.

## 5.2 SIMULAÇÃO 2

Nesta simulação, apresenta-se um estudo do comportamento elástico - linear de uma treliça plana hiperestática, proposta por Almeida (2006), com a adição do efeito de pós - flambagem para as barras comprimidas. A treliça tem largura de 1,0 m, altura total de 4,0 m, e está submetida a uma força concentrada horizontal P aplicada no topo, conforme é mostrado na Figura 5.

O material adotado para as barras é o aço cujo módulo de elasticidade ( $E_0$ ) é igual a 20500 kN/cm<sup>2</sup>. Na Tabela 1 são apresentados os parâmetros das barras referentes à seção transversal ( $A_0$ ), aos índices de esbeltez ( $\lambda$ ), e às forças teóricas de escoamento ( $N_0$ ) e críticas de flambagem elástica ( $N_{cr}$ ). Na análise da estrutura, o incremento de força utilizado é igual a 15,625 kN, e a tolerância admitida no final de cada iteração é  $u_{tol} = 10^{-9}$ .

Pode-se observar na Tabela 2 que os valores das forças normais nas barras 2-3 (diagonal comprimida) e 1-4 (diagonal tracionada) são aproximadamente iguais para todos os modelos até o valor de força  $P = 93,75$  kN. A partir desse incremento, para o modelo proposto 2, ocorre a flambagem das barras das diagonais comprimidas e as mesmas não absorvem força normal além da força de flambagem crítica ( $N_{cr} = 68,29$  kN). Dessa forma, os esforços excedentes são transferidos para as demais barras (diagonais tracionadas).



**Figura 5.** Treliça plana hiperestática. Fonte: adaptada de Almeida (2006).

**Tabela 1.** Parâmetros materiais e geométricos das barras da treliça.

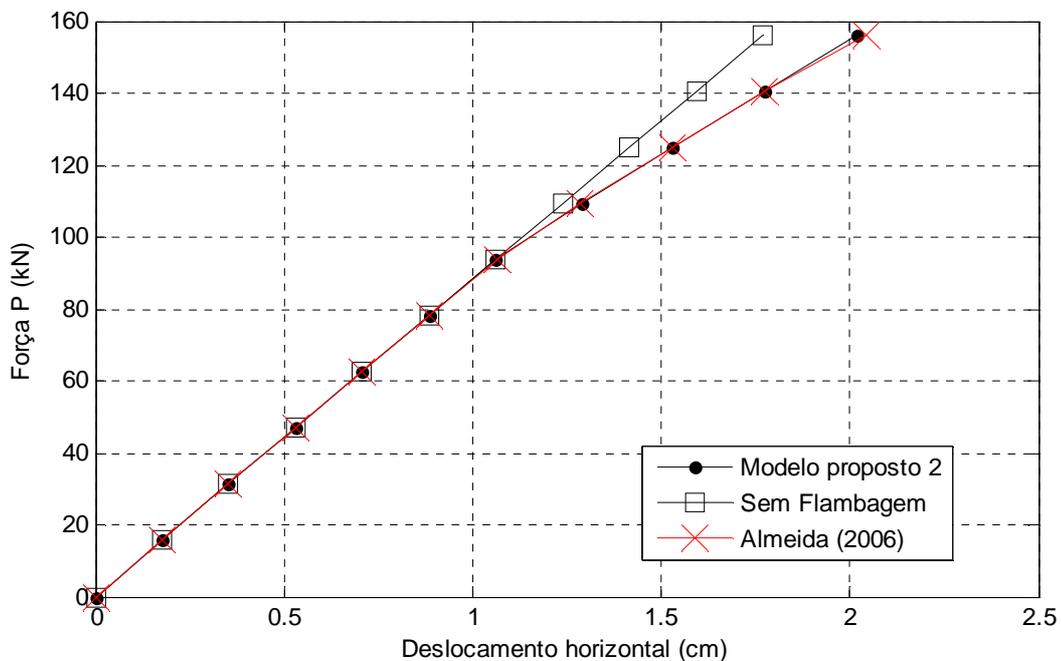
| Tipo de elemento | Seção Transversal $A_0$ (cm <sup>2</sup> ) | Esbeltez ( $\lambda$ ) | Força de escoamento $N_0$ (kN) | Força crítica de flambagem $N_{cr}$ (kN) |
|------------------|--|------------------------|--------------------------------|--|
| <b>Pilares</b>   | 5,0 x 5,0                                  | 69,28                  | 625,00                         | 1053,79                                  |
| <b>Montantes</b> | 4,0 x 4,0                                  | 86,60                  | 400,00                         | 431,63                                   |
| <b>Diagonais</b> | 3,0 x 3,0                                  | 163,30                 | 225,00                         | 68,29                                    |

Na Figura 6 são apresentadas as curvas deslocamento horizontal no nó 10 *versus* força aplicada, comparando os resultados obtidos com a modelagem proposta sem e com o efeito de pós - flambagem (modelo proposto 2) e os apresentados no trabalho de Almeida (2006). Vê-se nessa figura que, após a ocorrência da flambagem das diagonais comprimidas, há uma mudança de inclinação das retas obtidas indicando que a treliça torna-se mais flexível (menor rigidez), uma vez que essas barras passaram absorver menos esforço.

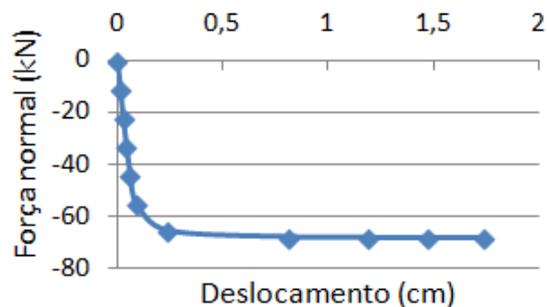
A curva numérica apresentada por Almeida (2006) foi obtida considerando grandes deslocamentos na análise (não - linearidade geométrica), e o modelo de comportamento de pós - flambagem da barra comprimida é descrito na Figura 7 pela curva deslocamento horizontal no ponto médio da barra *versus* força normal, justificando assim a pequena diferença nas repostas previstas pelos modelos para os últimos incrementos de força.

**Tabela 2.** Forças normais nas diagonais 2-3 (comprimada) e 1-4 (tracionada) da treliça em kN.

| Força P (kN) | Modelo elástico - linear sem flambagem |           | Modelo elástico - linear com flambagem (modelo proposto 2) |           | Almeida (2006) |           |
|--------------|--|-----------|--|-----------|----------------|-----------|
|              | Barra 2-3                              | Barra 1-4 | Barra 2-3  | Barra 1-4 | Barra 2-3      | Barra 1-4 |
| 15,6250      | -11,049                                | 11,048    | -11,049  | 11,048    | -11,05         | 11,05     |
| 31,2500      | -22,098                                | 22,096    | -22,098  | 22,096    | -22,10         | 22,09     |
| 46,8750      | -33,147                                | 33,144    | -33,147  | 33,144    | -33,16         | 33,14     |
| 62,5000      | -44,196                                | 44,193    | -44,196  | 44,193    | -44,21         | 44,18     |
| 78,1250      | -55,245                                | 55,241    | -55,245  | 55,241    | -55,25         | 55,24     |
| 93,7500      | -66,294                                | 66,289    | -66,294  | 66,289    | -65,82         | 66,76     |
| 109,3750     | -77,342                                | 77,337    | -68,290  | 86,390    | -68,28         | 86,37     |
| 125,0000     | -88,391                                | 88,385    | -68,290  | 108,487   | -68,52         | 108,19    |
| 140,6250     | -99,440                                | 99,433    | -68,290  | 130,584   | -68,61         | 130,16    |
| 156,2500     | -110,489                               | 110,482   | -68,290  | 152,681   | -68,66         | 152,34    |



**Figura 6.** Curvas numéricas deslocamento horizontal no nó 10 *versus* força P.

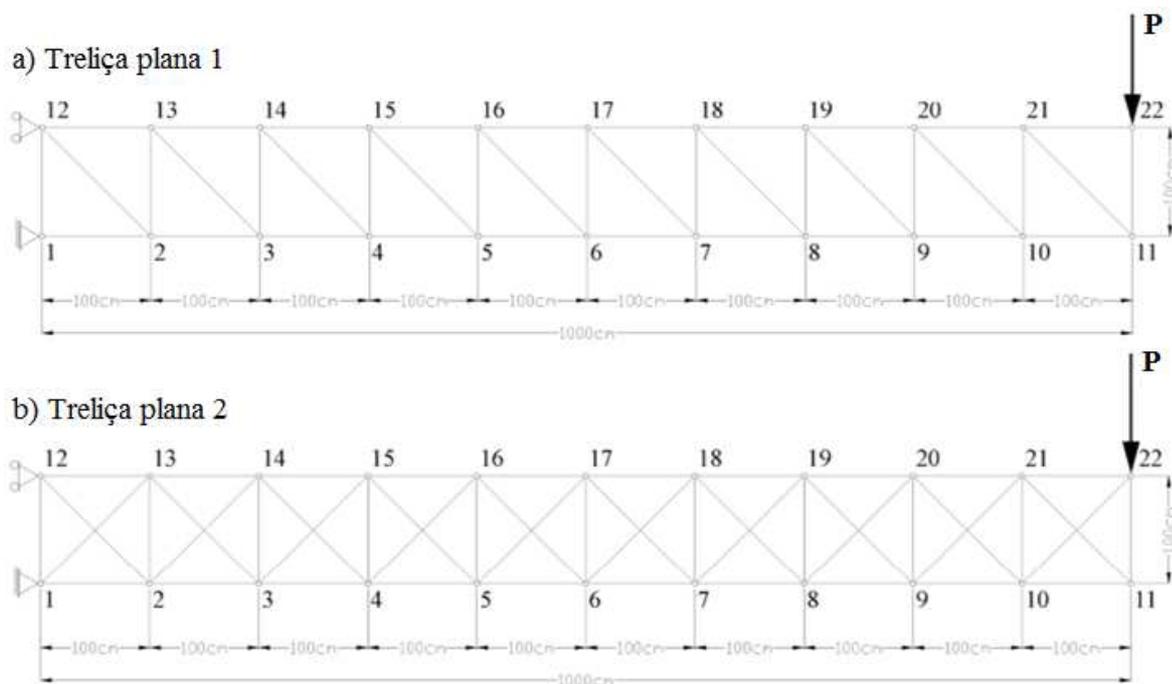


**Figura 7.** Comportamento pós - flambagem da diagonal comprimida proposta por Almeida (2006).

### 5.3 SIMULAÇÃO 3

Sejam as treliças planas, mostradas na Figura 8, cujas barras são constituídas por perfis laminados em cantoneira de abas iguais 4" x 4" x 1/4" ( $A_0 \cong 12,51 \text{ cm}^2$ ) nos banzos superior e inferior, e por perfis laminados em cantoneira de abas iguais 1 1/2" x 1 1/2" x 3/16" ( $A_0 \cong 3,42 \text{ cm}^2$ ) nas diagonais e montantes. A diferença entre as treliças consiste no número de diagonais - a treliça 1 apresenta diagonais simples, enquanto que a treliça 2 diagonais duplas. As propriedades materiais das barras são: módulo de elasticidade longitudinal não danificado  $E_0 = 205 \text{ GPa}$ , tensão normal máxima  $\sigma_{\text{máx}} = 400 \text{ MPa}$ , e a tensão de escoamento  $f_0 = 250 \text{ MPa}$  (propriedades do aço ASTM A36).

As barras dos banzos possuem força limite de escoamento teórica  $N_0 = 312,75 \text{ kN}$  e força crítica de flambagem elástica  $N_{\text{cr}} = 1012,44 \text{ kN}$ . As diagonais e os montantes possuem força limite de escoamento teórica  $N_0 = 85,50 \text{ kN}$ , e força crítica de flambagem  $N_{\text{cr}} = 38,20 \text{ kN}$  e  $N_{\text{cr}} = 19,10 \text{ kN}$ , respectivamente.



**Figura 8.** Esquema estrutural das treliças planas em balanço. Fonte: adaptada de Leite (2000).

Na Tabela 3 são apresentados os valores das forças normais nas barras 2-12 (diagonal tracionada) e 1-13 (diagonal comprimida) da treliça 2 comparando os resultados obtidos pelos modelos propostos 1 e 2 com os de Leite (2000). Em adição, são apresentados os valores da força normal na barra 2-12 para a treliça 1.

Observa-se na Tabela 3 que as forças normais nas diagonais 2-12 e 1-13 obtidas com os modelos propostos 1 e 2 são iguais até  $P = 24 \text{ kN}$ ; no entanto, quando as diagonais comprimidas atingem a força crítica de flambagem ( $N_{\text{cr}} = 19,10 \text{ kN}$ ), no caso do modelo 2, as mesmas absorvem parte do esforço ( $N = N_{\text{cr}}$ ), sendo que os acréscimos de força são distribuídos para as outras barras (na sua maioria, para as diagonais tracionadas) caracterizando o comportamento pós - flambagem da estrutura.

Quando se considera no modelo que a barra comprimida deixa de trabalhar no momento em que ocorre a flambagem (modelo 1), observa-se que a treliça 2 (com diagonais duplas) apresenta o mesmo comportamento estrutural da treliça 1 (com diagonais simples). Apesar da ocorrência da flambagem nessas barras, não ocorre o colapso da estrutura como um todo.

**Tabela 3.** Valores das forças normais nas barras 2-12 (diagonal tracionada) e 1-13 (diagonal comprimida).

| P<br>(kN) | Treliça 1                      |                       |                            | Treliça 2                  |                            |                            |                            |
|-----------|--------------------------------|-----------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
|           | Ftool                          | Leite (2000)          |                            | Modelo proposto 1          |                            | Modelo proposto 2          |                            |
|           | Barra<br>2-12                  | Barra<br>1-13         | Barra<br>2-12              | Barra<br>1-13              | Barra<br>2-12              | Barra<br>1-13              | Barra<br>2-12              |
| 2         | 2,8284                         | -1,59                 | 1,24                       | -1,5892                    | 1,2392                     | -1,5892                    | 1,2392                     |
| 4         | 5,6569                         | -3,18                 | 2,48                       | -3,1785                    | 2,4784                     | -3,1785                    | 2,4784                     |
| 6         | 8,4853                         | -4,78                 | 3,71                       | -4,7677                    | 3,7176                     | -4,7677                    | 3,7176                     |
| 8         | 11,3137                        | -6,37                 | 4,95                       | -6,3570                    | 4,9567                     | -6,3570                    | 4,9567                     |
| 10        | 14,1421                        | -7,97                 | 6,18                       | -7,9462                    | 6,1959                     | -7,9462                    | 6,1959                     |
| 12        | 16,9706                        | -9,57                 | 7,41                       | -9,5355                    | 7,4351                     | -9,5355                    | 7,4351                     |
| 14        | 19,7990                        | -11,17                | 8,64                       | -11,1247                   | 8,6743                     | -11,1247                   | 8,6743                     |
| 16        | 22,6274                        | -12,78                | 9,87                       | -12,7139                   | 9,9135                     | -12,7139                   | 9,9135                     |
| 18        | 25,4558                        | -14,38                | 11,10                      | -14,3032                   | 11,1527                    | -14,3032                   | 11,1527                    |
| 20        | 28,2843                        | -15,99                | 12,33                      | -15,8924                   | 12,3918                    | -15,8924                   | 12,3918                    |
| 22        | 31,1127                        | -17,60                | 13,56                      | -17,4817                   | 13,6310                    | -17,4817                   | 13,6310                    |
| 24        | 33,9411                        | -                     | 33,08                      | -19,0709                   | 14,8702                    | -19,0709                   | 14,8702                    |
| 26        | 36,7696                        | -                     | 36,80                      | 0                          | 36,7696                    | -19,1000                   | 16,1094                    |
| 28        | 39,5980                        | -                     | 39,64                      | 0                          | 39,5980                    | -19,1000                   | 18,2497                    |
| 30        | 42,4264                        | -                     | 42,47                      | 0                          | 42,4264                    | -19,1000                   | 20,7582                    |
| 32        | 45,2548                        | Falha da<br>estrutura | Falha da<br>estrutu-<br>ra | Falha da<br>estrutu-<br>ra | Falha da<br>estrutu-<br>ra | -19,1000                   | 23,3853                    |
| 34        | Simulação<br>interrom-<br>pida | -                     | -                          | -                          | -                          | Falha da<br>estrutu-<br>ra | Falha da<br>estrutu-<br>ra |

Na Figura 9 são apresentadas as curvas numéricas deslocamento vertical no nó 22 *versus* força aplicada para os modelos propostos 1 e 2 comparando-as com os resultados obtidos por Leite (2000) e o programa Ftool. O incremento de força utilizado é igual a 2 kN e a tolerância admitida no final de cada iteração ( $u_{tol}$ ) é  $10^{-6}$ . Nas simulações, considera-se que a falha da treliça 2 ocorre com o início do escoamento da barra 1-2 localizada no banzo inferior (barra mais solicitada), sendo utilizado o critério de resistência da Força Máxima no qual o colapso da barra  $i$  ocorre quando a seguinte inequação é satisfeita:

$$\left(\frac{N_i}{N_{0i}}\right)^2 \geq 1 \quad (20)$$

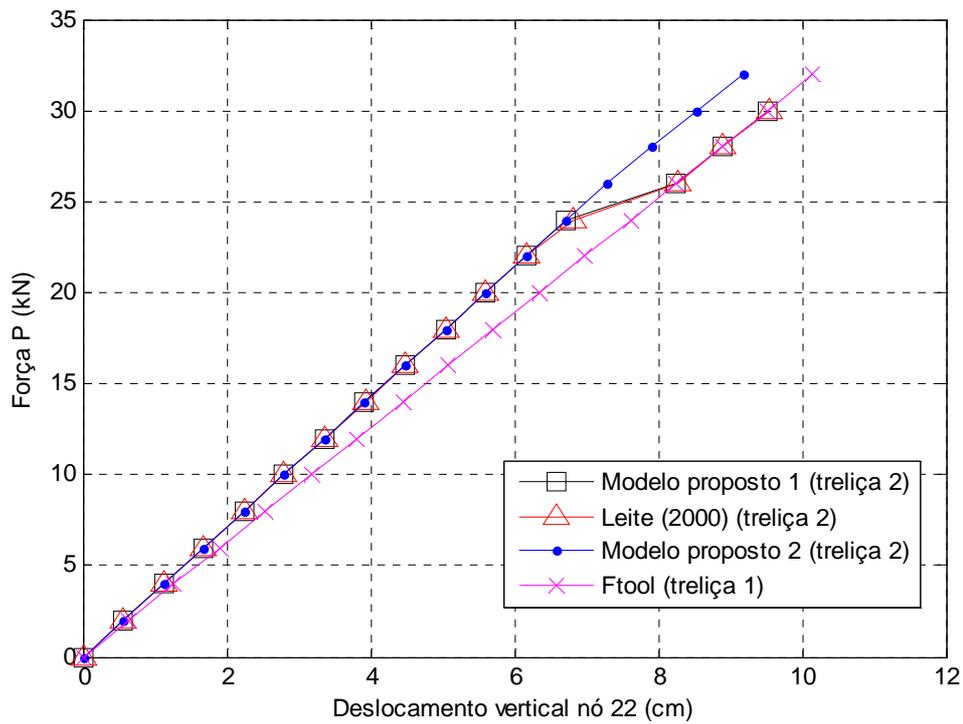
Em que  $N_i$  é a força normal na barra  $i$ , e  $N_{0i}$  é a força normal de escoamento na mesma.

Supondo nos modelos propostos 1 e 2 a não - linearidade física no comportamento da barra a partir do modelo de dano proposto por Manzoli (1998), na Figura 10 são apresentadas as curvas numéricas deslocamento vertical no nó 22 *versus* força aplicada  $P$  para a treliça 2. Os valores numéricos da força máxima  $P$  e o deslocamento vertical no nó 22 correspondente, bem como o modo de falha da estrutura, estão apresentados na Tabela 4.

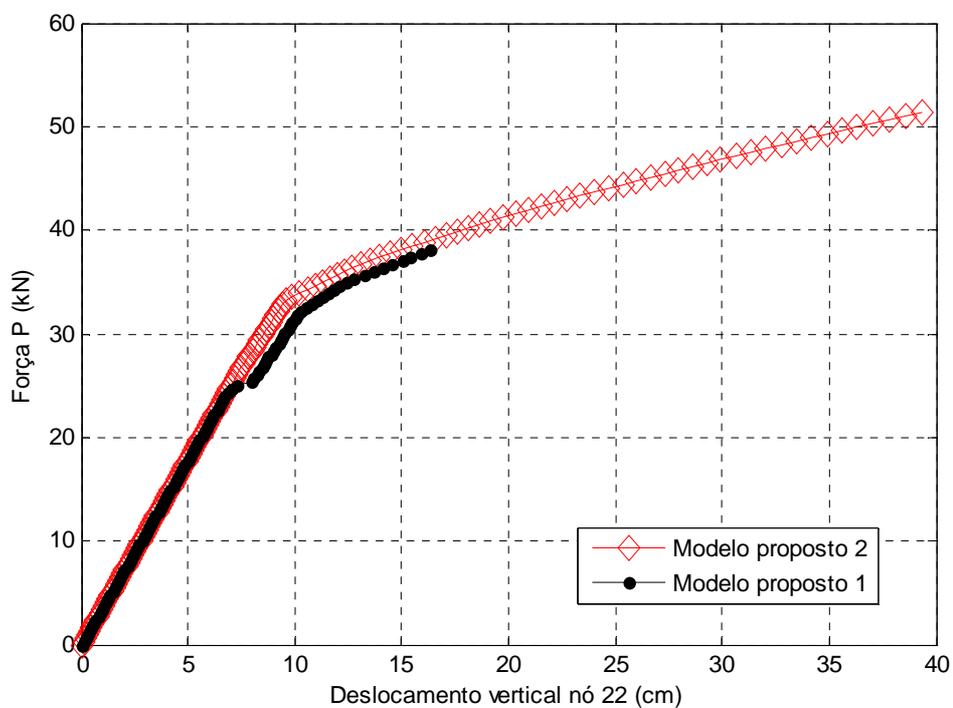
Na análise não - linear da treliça 2, adotou-se o modelo de dano isotrópico com os valores dos módulos  $H_c$  e  $H_t$  iguais a 0,11 (encruamento linear positivo) e  $B_1 = 1,0$ . O incremento de força utilizado é igual a 0,3467 kN e a tolerância admitida no final de cada iteração ( $u_{tol}$ ) é  $10^{-3}$ . Ao modelo, é incorporado o critério de falha da Máxima Tensão, no qual a falha da barra  $i$  ocorre quando a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{m\acute{a}x}}\right)^2 \geq 1 \quad (21)$$

Em que  $\sigma_{\text{máx}}$  é a tensão máxima à tração ou à compressão na direção 1, e  $\sigma_1$  é a tensão principal na direção 1.



**Figura 9.** Curvas numéricas deslocamento vertical no nó 22 *versus* força aplicada P considerando a flambagem e o modelo constitutivo elástico - linear.



**Figura 10.** Curvas numéricas deslocamento vertical no nó 22 *versus* força aplicada P considerando a flambagem e a não - linearidade física (modelo de dano).

**Tabela 4.** Valores da força normal máxima e do deslocamento vertical no nó 22 e modo de falha da estrutura.

| <b>Modelo</b>            | <b>Força máxima P (kN)</b> | <b>Deslocamento vertical (cm)</b> | <b>Falha da estrutura</b>  |
|--------------------------|----------------------------|-----------------------------------|--|
| <b>Modelo proposto 1</b> | 38,1333                    | 16,3182                           | Flambagem da barra 1-12 (montante)                                   |
| <b>Modelo proposto 2</b> | 51,3067                    | 39,3261                           | A barra 1-2 (banzo inferior) atinge o valor de $\sigma_{\text{máx}}$ |

Conforme a Tabela 4, o modo de falha da treliça 2 para a análise com o modelo proposto 1 ocorre com a flambagem da barra 1-12 (montante), visto que para o incremento de força subsequente  $P = 38,479$  kN ocorre a instabilidade na convergência na simulação. Para a análise com o modelo proposto 2, o colapso global da estrutura acontece com a falha da barra 1-2 localizada no banzo inferior (a desigualdade dada pela Equação (21) é satisfeita na verificação do critério de resistência para o elemento). Assim, os modelos diferem quanto à capacidade última da estrutura (força última e deslocamento correspondente). Além disso, para ambos os modelos, vê-se que não ocorre o colapso global da estrutura com a ocorrência da flambagem das diagonais tracionadas, havendo ainda sobra de resistência.

## 6 CONCLUSÃO

Os resultados numéricos preditos pela modelagem proposta demonstraram a potencialidade de sua aplicação em estruturas treliçadas, possibilitando ao projetista estimar a capacidade resistente última das mesmas (carregamento último e deslocamento máximo).

Também, as análises numéricas permitem detectar os elementos mais solicitados da estrutura, sendo útil na inspeção dos mesmos sob condições de serviço (identificação de possíveis danos), já que são os elementos mais propensos a falhar causando a ruína da estrutura como um todo.

Na última simulação, ficou evidente a importância da inclusão no modelo de treliça o comportamento de pós - flambagem de barras comprimidas. Ao considerar que a barra não falha logo após a flambagem (isto é, a mesma absorve parte da força normal, sendo os esforços adicionais redistribuídos para os demais elementos), vê-se que a estrutura apresentou um comportamento mais rígido e um aumento da capacidade resistente.

Verifica-se que a utilização de modelos constitutivos baseados na Mecânica do Dano Contínuo constitui uma válida alternativa para a análise estrutural. Entretanto, a aplicação de tais modelos em situações práticas fica prejudicada pela identificação experimental dos parâmetros contidos na lei de evolução da variável de dano.

Como desenvolvimento futuro, sugere-se a implementação de algoritmos com a consideração da não - linearidade geométrica nas análises numéricas de treliças planas e espaciais, bem como adequar o código implementado para estudos em análise dinâmica.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Tecnológica Federal Paraná - UTFPR pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. C. B. Análise inelástica de pórticos planos considerando a plasticidade distribuída e o efeito das tensões residuais nos perfis estruturais de aço. Belo Horizonte: UFMG, 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.

KRIPKA, M., PRAVIA, Z. M. C., DIAS, M. M. & MEDEIROS, G. F. Minimização do peso de treliças de alumínio pela otimização simultânea da seção transversal dos elementos e da geometria: análise numérica e validação experimental. *Revista Eletrônica de Engenharia Civil - REEC*, 7(2): 19-26, 2013.

LEITE, F. N. Uma Formulação Teórica Consistente para Análise Não Linear de Estruturas Treliçadas Espaciais. Belo Horizonte: UFMG, 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, 2000.

MANZOLI, O. L. Um modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes em la mecânica de sólidos. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya, 1998. Tese (Doutorado), Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, 1998.

MARTINS, T. V., GRECO, M. & LEMONGE, A. C. C. Otimização paramétrica de estruturas treliçadas com objetivo baseado no comportamento pós-crítico via algoritmos genéticos. In: XI Simpósio de Mecânica Computacional, 2014, Juiz de Fora. Anais... Juiz de Fora: XI Simpósio de Mecânica Computacional, 2014.

RODRIGUES, E. A. Um modelo constitutivo de dano composto para simular o comportamento de materiais quase-frágeis. Bauru: UNESP, 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista, 2011.

SANTOS, G. F., SILVA, J. G. S., SOEIRO, F. J. C. P. & NETO, A. J. S. N. Identificação de dano e análise de sensibilidade em treliças de aço. In: *Mecânica Computacional*, Vol. XXIX, 2010, Buenos Aires. Anais... Buenos Aires: Mecânica Computacional, 2010.