Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v29i1.48527

ALGUMAS APLICAÇÕES FÍSICAS DA INTEGRAL DE LINHA

SOME PHYSICAL APPLICATIONS OF LINE INTEGRAL

Luciano Nascimento [1]

Resumo: As integrais de linha são uma ferramenta extremamente importante para a realização de diversos cálculos. Neste artigo serão mostradas suas aplicações para calcular o trabalho realizado para que um pistão se mova. Relativamente, o ensino do cálculo de integral de linhas de curvas é diretamente influenciado por ação de campos vetoriais. Desta forma, as integrais de linhas destes campos vetoriais, de principio conservativos ou não são bem contextualizados fisicamente do ponto de vista da Mecânica Clássica a exemplo do trabalho realizado por uma força variável de onde se obtém de forma direta o Teorema do Trabalho-Energia Cinética. O objetivo deste estudo, acerca da integral de linha é aplicação direta de seu formalismo matemático na física geral. Tal aplicabilidade é utilizada para ilustrar a interpretação física da integral de linha de um campo vetorial. Ademais, será possível também visualizar a aplicabilidade das integrais de superfície, com a utilização dos Teoremas de Stokes e Gauss para a transformação para obtenção das futuras Equações de Maxwell da forma integral para a forma diferencial.

Palavras-chaves: Integral de Linha. Termodinâmica. Campo Vetorial. Teorema de Stokes e Gauss.

Abstract: Line integrals are an extremely important tool for performing various calculations. In this article your applications will be shown to calculate the work done for a piston to move. Relatively, the calculation of the integral of curve lines is directly influenced by the action of vector fields. In this way, the line integrals of these vector fields, of conservative principles or are not well contextualized physically from the point of view of Classical Mechanics, such as the work done by a variable force from which the Work-Kinetic Energy Theorem. The purpose of this study, concerning the line integral is the direct application of its mathematical formalism in general physics. Such applicability is used to illustrate the physical interpretation of the line integral of a vector field. In addition, it will also be possible to visualize the applicability of the surface integrals with the use of the Stokes and Gauss Theorems for the transformation to obtain the future Maxwell equations from integral to differential form.

Keywords: *Integral of Line. Thermodynamics. Vector Field. Stokes and Gauss's theorem.*

[1] *Piancó Valley College, Campus Center of Technology-PB– Brasil, email: lucano.fisicacex@gmail.com*

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v29i1.48527

1 Introdução

Este artigo trata de diversas aplicações de conceitos aprendidos em Cálculo. Estas são mostradas em grandes áreas da Matemática, Física, Química e da Engenharia, na tentativa de despertar o interesse dos discentes para tais conteúdos, pois, muitas vezes durante o curso dessas matérias, eles se perguntam a utilidade dos cálculos.

Para tanto, são mostradas aplicações das integrais de linha no cálculo do trabalho realizado por uma força variável e por um pistão em um motor (um processo chamado politrópico em nível termodinâmico). Este termo de integral é denominada de integral de linha por muitos autores de livros clássicos de cálculos, muito embora o nome mais comum é integral de curvilíneas, sendo o mais adequado atualmente.

O Cálculo de integrais de linhas com funções vetoriais, sobre curvas no espaço, do tipo bem suave é feito de modo totalmente análogo às curvas planas, sendo que as curvas no espaço associadas às equações paramétricas (EDWARDS; PENNEY, 1994,213p). Na Termodinâmica, uma integral de linha é utilizada para calcular o trabalho e o calor desenvolvido numa transformação isométrica. Vamos desenvolver algumas ferramentas importantes para o aprendizado das integrais de linha de uma função de várias variáveis e associa-las a um campo vetorial do tipo conservativo no plano e no espaço. Ademais, é possível visualizar também a aplicações dos Teoremas de Stokes e Gauss no processo de transformação das quatro equações integrais de Maxwell em formas diferenciais. Estas são extremamente utilizadas na Teoria Eletromagnética e em Teoria Quântica de Espaços Curvos, como o calibre de gauge para fótons. Este artigo tem como objetivo principal visa mostrar um minucioso estudo sobre a integral de linha aplicada ao formalismo matemático na física geral.

2 Referencial Teórico

2.1 Metodologia

A metodologia empregada no desenvolvimento deste artigo foi a tradicional na área de pesquisa em matemática aplicada, em especial a física matemática. Ela consistiu em uma primeira etapa no estudo de artigos e livros relacionados aos temas propostos, em especial com aplicações ao Teorema do Trabalho-Energia, Cinética, problemas em termodinâmica, o Teorema de Stokes e Gauss para obtenção das futuras Equações de Maxwell da forma integral para a forma diferencial que são muito úteis na teoria eletromagnética. A integral de linha de F ao longo de C, de *A (t=a)* até *B(t=b)*, que denominamos de $\int_{A(t=a)}^{B(t=b)} f(x,y,z)ds$ é definida por (GONCALVES; FLEMMING, 2007, 435p),

$$\int_{A(t=a)}^{B(t=b)} f(x,y,z)ds = \int_C F(x,y,z)ds = \lim_{\Delta r_i \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} F(Q_i)\Delta r_i\right) \qquad (1),$$

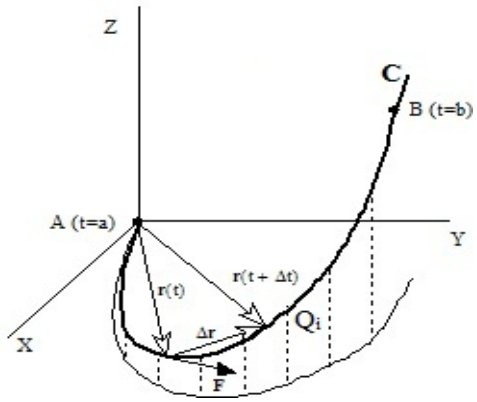
quando o limite à direita existe.

A representação geométrica da integral de linha ao longo da curva *C* é uma curva bem suave e integrável ao longo do caminho, ver figura 1 abaixo. A integral $\int_C F(x,y,z)ds$

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v29i1.48527

também é denominada de integral do campo escalar de *F* com respeito ao comprimento de arco C. Se a curva C consiste em um número finito de arcos de curvas suaves C unidos em pontos de ângulos consecutivos, diz-se que C é parcialmente suave. Então, o valor de uma integral de linha ao longo de caminho C se define como uma soma de seus valores ao longo de seguimentos suaves e bem pequenos que pode ser descrito como uma soma de Riemann.

Figura 1 - Representação geométrica da integral de linha numa curva C.



Fonte: Autor

O conceito de integral de linha é sempre associado a um campo vetorial contínuo, ou seja, definido sobre uma curva bem suave C dada pela função vetorial $\vec{r}(t)$, $a \le t \le b$, então a integral de linha de *F* ao longo da curva suave de C é,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt \qquad (2)$$

Lembrando que:

- $\vec{F}(\vec{r}(t) = F(x(t), y(t))$, para campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$;
- $\vec{F}(\vec{r}(t) = F(x(t), y(t), z(t))$, para campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$.

Vamos considerar a integral de linha nas componentes *x*, *y* e *z*, em uma curva bem suave C, é descrito por (GUIDORIZZI, 2001, 380p):

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, a \le t \le b \qquad (3)$$

e suponha que a sua notação é

$$\vec{F}(x(t), y(t), z(t)) = P(x(t), y(t), z(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t), z(t))\vec{j} + R(x(t), y(t), z(t))\vec{k} \quad (4)$$

Observe que podemos escrever a integral de linha do campo vetorial $\vec{F}$ como:

$$\int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) = \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right)dt \quad (5)$$

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v29i1.48527

O que sugere puramente a seguinte notação,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz \tag{6}$$

2.2 A integral de linha associado ao teorema do trabalho-energia cinético

O conceito ligado a integral de linha de um campo vetorial corresponde sempre ao trabalho realizado por uma força (força e deslocamento vetorial), sendo conduzido à definição geral:

$$\vec{F} = \int_C Pdx + Qdy = \int_C (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{7}$$

A equação (7) pode ser também escrita da seguinte forma,

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b \left(F \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = \int_a^b \left(F \cdot \vec{v} \right) dt \tag{8}$$

onde $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ é o vetor velocidade da partícula. Substituído a $\vec{F}$ por

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{9}$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{10}$$

Usando agora a regra da cadeia,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dx} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \tag{11}$$

onde esta quantidade representa um deslocamento vetorial, substituindo este valor na equação, obtermos o seguinte:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \tag{12}$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dx} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dx} \cdot \vec{v} = mv\frac{dv}{dx} \tag{13}$$

$$W = \int_{v_i}^{v} mv\frac{dv}{dx}dx = m\int_{v_i}^{v} vdv = \frac{1}{2}m\Delta v \tag{14}$$

Logo, ficaremos com (NUSSENZVEIG, 2013, 394p),

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v29i1.48527

$$F = W = \int_{a=v_i}^{b=v} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{v_i}^{v} \Rightarrow W = \frac{1}{2}mv - \frac{1}{2}mv_i = K - K_i = \Delta K \qquad (15)$$

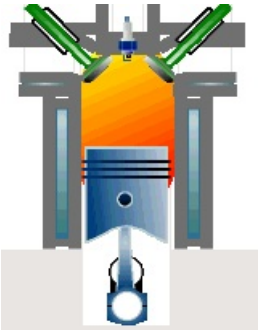
Generalizando, de forma direta a demonstração Teorema do Trabalho-Energia Cinética.

3 Resultados e discussões

3.1 Trabalho realizado por pistão em Termodinâmica

Nesta secção, iremos explorar a aplicação da integral de linha no cálculo do trabalho realizado por um pistão em pleno processo de combustão, ilustrado na figura 2 abaixo.

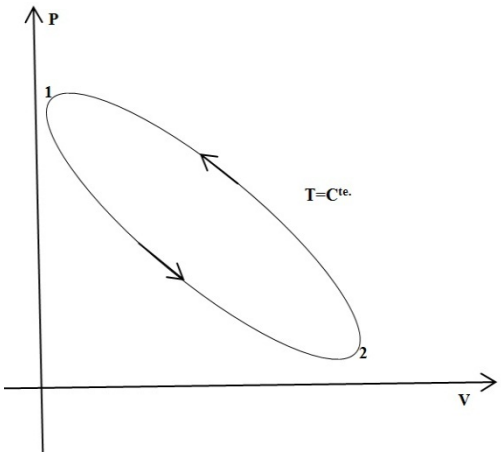
Figura 2 - Motor com um pistão com cilindro de combustão.



Fonte: http://evoluciondelmotor123.blogspot.com/2014/10/motor-2-tiempos.html

O gráfico da figura 3 mostra como *P* e *V* variam no sistema *PV* que a realiza um processo isotérmico, no ciclo de um motor de um cilindro. Sejam *P(t)* e *V(t)*, respectivamente, a pressão e o volume, dentro de um cilindro no instante t, $a \le t \le b$ onde é o tempo necessário para um ciclo completo. A temperatura poderia expressar-se em função do volume e da pressão, tendo um caráter puramente mecânico. Mas tal não acontece.

Figura 3 - Sistema *PV* durante um ciclo.



Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v29i1.48527

Fonte: Autor

A válvula, então, se abre, a temperatura e a pressão diminuem e a energia mecânica armazenada no volante impulsiona o pistão para cima, empurrando os gases formados no interior do cilindro, devido à combustão, e fazendo com que eles sejam eliminados pela válvula, na fase da exaustão. Esta se fecha e a válvula de entrada é aberta. Assim, o ciclo se reinicia. O trabalho realizado pelo pistão durante um ciclo é:

$$W = \int_C PdV \tag{16}$$

Calculamos o trabalho realizado por um pistão para que o mesmo se mova na equação (16). Neste caso, a força que atua sobre o pistão na equação (16), onde A é a área do topo do pistão. Seja *x(t)* a distância do pistão até o topo do cilindro no instante *t*, então o trabalho realizado pelo pistão é:

$$\vec{F}(V,P) = AP(t)\vec{i} \tag{17}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{18}$$

onde C é dada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i}, t \in [a,b] \tag{19}$$

Agora, vamos desenvolver a equação (17),

$$W = \int_a^b F(\vec{r}\,'(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt = \int_a^b AP(t)x'(t)dt = \int_a^b P(t)Ax'(t)dt \tag{20}$$

O volume do cilindro no instante t é dado por

$$V(t) = Ax(t) \tag{21}$$

Assim, podemos escrever como sendo:

$$V'(t) = Ax'(t) \tag{22}$$

Logo, o cálculo do trabalho é (HALLIDAY et al.,2013,324p),

$$W = \int_a^b P(t)Ax'(t)dt = \int_a^b P(t)V'(t)dt = \int_C PdV \tag{23}$$

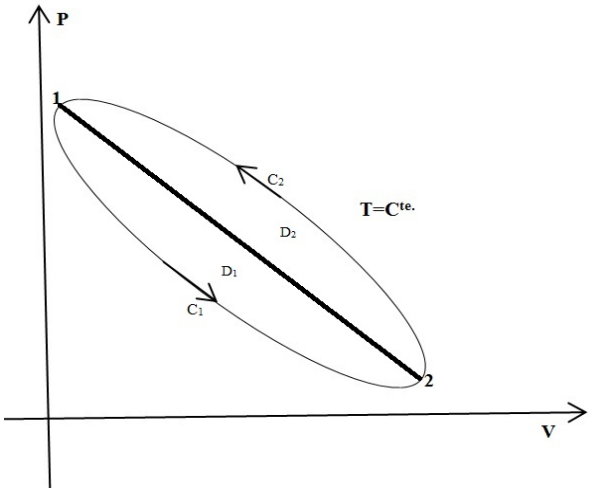
Logo, a equação (1) é válida para o cálculo do trabalho realizado por um pistão em nível termodinâmico. Além disso, utilizando o Teorema de Green, é possível calcular o

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v29i1.48527

trabalho por meio da subtração das áreas das regiões D_1 e D_2 delimitadas pelas curvas C_1 e C_2 respectivamente, mostradas na figura 4, de fato: $C = C_1 \cup C_2$, então:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{-C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{24}$$

Figura 4 - Curvas indicando as áreas 1 (D_1) e 2 (D_2).



Fonte: Autor

Escrevendo agora a equação (25), e aplicando o Teorema de Green, obtemos (SWOKOWSKI, 1995, 759p):

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \tag{25}$$

$$\vec{F} = \vec{F}(V, P) = AP\vec{i} \tag{26}$$

$$\int_{-C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial (0)}{\partial V} - \frac{\partial P}{\partial P} \right) dA = -\iint_{D_1} 1 dA = -A_{D_1} \tag{27}$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial (0)}{\partial V} - \frac{\partial P}{\partial P} \right) dA = -\iint_{D_2} 1 dA = -A_{D2} \tag{28}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(-AD_1) + (-AD_2) = AD_1 - AD_2 \tag{29}$$

3.2 Aplicações dos teoremas de Stokes e Gauss

Os teoremas de Stokes e Gauss possuem diversas aplicações em vários campos científicos. Vamos aqui rapidamente, apresentar os principais usos que consiste na passagem da forma integral para a forma diferencial das equações de Maxwell. A notação diferencial é

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v29i1.48527

muito importante para o estudo do eletromagnetismo de modo mais avançado, sendo muito utilizada neste ramo da física teórica.

- Lei de Gauss da Eletricidade

As equações de Maxwell são seguintes:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{30}$$

Assumindo que o conjunto de cargas pode ser descrito como um conjunto contínuo de cargas com densidade $\rho(\vec{r})$.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_V \rho(\vec{r}) dV \tag{31}$$

Usando o Teorema do Divergente ou de Gauss, teremos o seguinte (HYMAN; SHASHKOV, 1997, p. 81-104):

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \tag{32}$$

Isso transforma a integral de superfície da projeção perpendicular do campo da superfície na integral de volume do divergente em:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_V \rho(\vec{r}) dV \tag{33}$$

A equação de Gauss para o cálculo do campo elétrico na forma diferencial fica o seguinte, a constante de permissividade do vácuo vale, $\varepsilon_o \cong 8{,}85426 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_o} \tag{34}$$

A lei de Gauss se refere sempre ao fluxo de cargas elétricas no interior de uma superfície gaussiana e com alto teor de simetria.

- Lei de Gauss da Eletricidade

A lei de Gauss no magnetismo estabelece que o fluxo de magnético total em qualquer superfície fechada é sempre zero, isso implicam que não há cargas magnéticas, ou seja, monopólos magnéticos não existem. Isto tem forte aplicação em teoria das cordas cósmicas em teoria de campos em espaços curvos. Não utilizamos aqui a Lei de Coulomb, pelo o fator de não apresentar nenhuma simetria em relação à distribuição de cargas elétricas distribuídas em condutores com alto grau de simetria.

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV \Leftrightarrow \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} d\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{35}$$

- Lei de Faraday

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v29i1.48527

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_B}{dt} \tag{36}$$

Esta equação relaciona a força eletromotriz ε ou da f.e.m induzida em uma espira com a variação de taxa do fluxo magnético através nesta espira.

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \tag{37}$$

então, utilizando o Teorema de Stokes (GARCIA,2007,97p) :

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} d\vec{s} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} d\vec{s} \tag{38}$$

O símbolo $\vec{T}$ denota um vetor tangente unitário a uma curva C bem suave no espaço (REITZ et al.,1982, 516p).

$$\iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \cdot \hat{n} d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} d\vec{s} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} d\vec{s} \Rightarrow \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot \hat{n} d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{39}$$

Podemos obter a equação de Maxwell a parti da Lei de Ampère na equação (39)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_o \left(\vec{i} + \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} d\vec{S} \right) \tag{40}$$

Sabe-se que a corrente elétrica I pode ser relacionada à de densidade de corrente elétrica J pela equação:

$$\vec{i} = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} d\vec{S} \tag{41}$$

Lembrando que, $\vec{J}$ é definido como a corrente vetorial que flui através de uma unidade de área da seção transversal perpendicular à direção da corrente elétrica. Finalmente, aplicando o Teorema de Stokes, obtemos que:

$$\iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \hat{n} d\vec{S} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\mu_o \vec{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} d\vec{S} \tag{42}$$

Note que, $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$ é a permeabilidade magnética no vácuo. Como todas as integrais são em relacionadas a uma superfície S, seus integrandos devem ser iguais. Portanto, chegamos à dedução final da equação de Maxwell na forma diferencial, escrita da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{43}$$

Na forma diferencial, apresentamos todas as equações de Maxwell (44), são obtidas vias integrais de linhas. Estas equações descrevem fenômenos em regime eletromagnéticos em baixa dimensionalidade (RAPETTI; ROUSSEAUX, 2014, p.92-106).

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v29i1.48527

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\
&\vec{\nabla}\times\vec{H} = -\partial_t \vec{D} + \vec{J} \\
&\vec{\nabla}\times\vec{D} = \rho(\vec{r}) \\
&\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0
\end{aligned} \tag{44}$$

4 Conclusões

Este trabalho teve como propósito oferecer, uma aplicação das integrais de linha em diversas áreas das ciências exatas e tecnológicas. O uso da integral de linha possibilitou a obtenção do Teorema do Trabalho-Energia Cinética, como também a realização do trabalho realizado por pistão em combustão no sistema *PV* em um processo isotérmico em Termodinâmica. O tratamento matemático das integrais de superfície, juntamente com os Teoremas de Stokes e Gauss para obtenção do campo elétrico associado nas Equações de Maxwell favorece a compreensão da teoria eletromagnética.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq.

Referências

EDWARDS, G.; PENNEY, A. ***Cálculo com Geometria Analítica***, Vol.3. São Paulo: Editora Harbra-PHB. 1994,213p.

GARCIA, H.C. ***Os teoremas do cálculo vetorial***. 2007. 97f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 2007.

GONCALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. ***Cálculo B - Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície***. 2ª Ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. Vol. 1. 435p.

GUIDORIZZI, H. L. ***Um Curso de Cálculo***, Vol. 3. Rio de Janeiro; LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. 2001. 380p.

HALLIDAY, D.; RESNICK,R.; WALKER, J. ***Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica***,Vol.2. 9ª Edição. Rio de Janeiro; LTC – Livros Técnicos e Científicos-Editora S.A. 2013, 324p.

HYMAN, J. M.; SHASHKOV, M. Natural Discretizations for the Divergence, Gradient, and Curl on Logically Rectangular Grids. ***Computers & Mathematics with Applications - Journal* 33(4).** p. 81-104, 1997.

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v29i1.48527

LA EVOLUCIÓN DEL MOTOR. Disponível em: http://evoluciondelmotor123.blogspot.com/2014/10/motor-2-tiempos.html. Acesso em 18 de Março de 2019.

NUSSENZVEIG, H. M. ***Curso de Física Básica***. 5ª Ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher. 2013. 394p.

RAPETTI, F.; ROUSSEAUX,G. On quasi-static models hidden in Maxwell's equations. ***Applied Numerical Mathematics 79***. p.92–106, 2014.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. ***Fundamentos da Teoria Eletromagnética***. Rio de Janeiro: Campus, 1982. 516p.

SWOKOWSKI, E**.** ***O Cálculo com Geometria Analítica***, Vol.2, Makron Books do Brasil Editora Uda, São Paulo. 1995, 759p.