
ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA DE TRELIÇAS COM CICLOS DE CARREGAMENTO E DESCARREGAMENTO

PHYSICAL NONLINEAR ANALYSIS OF TRUSSES WITH LOADING AND UNLOADING CYCLES

Luiz Antonio Farani de Souza¹

Douglas Fernandes dos Santos²

Rodrigo Yukio Mizote Kawamoto³

Resumo: Neste artigo são realizadas análises estáticas, por meio do Método dos Elementos Finitos, de estruturas do tipo treliça com comportamento não linear físico e submetidas a ciclos de carregamento e descarregamento. Os algoritmos e as formulações de dois modelos constitutivos inelásticos uniaxiais são apresentados: um baseado na teoria da Elastoplasticidade e o outro na Mecânica do Dano. A solução do problema não linear que descreve o sistema estrutural é obtida com o procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. Assume-se a condição de rotações e deslocamentos infinitesimalmente pequenos. Para verificar a precisão e a convergência dos algoritmos implementados no programa Matlab, além de comparar as respostas numéricas dos modelos constitutivos, as trajetórias de equilíbrio das estruturas são obtidas. As simulações mostram que o comportamento global da estrutura depende da resposta mecânica de cada um dos seus materiais constituintes, e a adequada escolha da relação constitutiva é fundamental para análises estruturais mais realistas.

Palavras-chaves: Mecânica do Dano. Elastoplasticidade. Newton-Raphson. Comprimento de Arco Linear.

Abstract: *In this paper, static analyzes are carried out, using the Finite Element Method, of structures consisting of truss type structures with nonlinear physical behavior and subjected to loading and unloading cycles. The algorithms and formulations of two uniaxial inelastic constitutive models are presented: one based on Elastoplasticity theory and the other on Damage Mechanics. The solution of the nonlinear problem that describes the structural system is obtained with Newton-Raphson's incremental-iterative procedure associated with the Linear Arc-Length path-following technique. The condition of infinitesimally small displacements and rotations is assumed. To verify the accuracy and convergence of the algorithms implemented in the Matlab program, and to compare the numerical responses of the constitutive models, the equilibrium path of the structures are obtained. The simulations show that the structure global behavior depends on the mechanical response of each of its constituent materials, and the appropriate choice of the constitutive relation is fundamental to more realistic structural analysis.*

¹ Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Apucarana – Brasil, email: lasouza@utfpr.edu.br

² Universidade Estadual de Maringá, Campus Maringá – Brasil, email: douglassantos88@hotmail.com

³ Universidade Estadual de Maringá, Campus Maringá – Brasil, email: rodrigo_ymk@hotmail.com

Keywords: *Damage Mechanics. Elastoplasticity. Newton-Raphson. Linear Arc-Length.*

1 Introdução

As treliças espaciais vêm sendo utilizadas de forma bastante diversificada. Elas apresentam-se como uma solução estrutural simples e econômica para muitas situações de engenharia, notadamente em projeto de passarelas, pontes e coberturas de estádios e galpões. Esse sistema estrutural apresenta a grande vantagem de conseguir vencer grandes vãos, podendo suportar cargas elevadas quando comparadas com o seu peso próprio. Nos últimos anos, tem-se registrado diversos acidentes com estruturas espaciais, a maior parte ocorrida de forma repentina. Na sua grande maioria, estes acidentes ocorrem devido à incoerência entre modelos de cálculo admitidos e o comportamento real da estrutura (SAMPAIO; GONÇALVES, 2007).

Na Engenharia Estrutural, muitas estruturas são caracterizadas pelo comportamento inelástico dos materiais (não linearidade física) que as constituem, identificando fenômenos tais como plasticidade, dano, fraturamento, entre outros, os quais mudam substancialmente as propriedades de rigidez do sistema. Um problema gerado pela inelasticidade dos materiais é a ocorrência de deformações localizadas no sistema estrutural. A consideração desse fenômeno aumenta a complexidade da análise, e pode levar a problemas na implementação numérica ocorrendo, inclusive, a interrupção da análise devido a não convergência ou mau condicionamento numérico (MUÑOZ; ROEHL, 2017).

Dependendo do histórico de carregamento, a rigidez da estrutura pode ser de amolecimento ou endurecimento, o caminho de equilíbrio pode ser estável ou instável, e a própria estrutura pode estar num estágio de carregamento ou descarregamento. Todos esses fenômenos são tipificados pela ocorrência de pontos limites ou críticos na trajetória de equilíbrio, como pontos limites de força e pontos limites de deslocamento (YANG; SHIEH, 1990).

A solução de um problema estrutural não linear é geralmente obtida por meio de um procedimento incremental e iterativo. Um dos requisitos para o método de solução é a sua capacidade de superar os problemas numéricos associados a cada tipo de comportamento. O problema estrutural consiste em resolver $n + 1$ equações não lineares (n equações de equilíbrio e uma equação de restrição), cujas incógnitas são n deslocamentos e um parâmetro de força (LEON et al., 2011).

Uma lei constitutiva é um modelo mecânico-matemático que descreve idealmente o comportamento tensão-deformação de um material. Formular uma lei constitutiva suficientemente geral para reproduzir o comportamento de um material submetido a qualquer tipo de solicitação é, em geral, bastante difícil. Devem-se restringir os modelos aos campos de interesse específico (PITUBA; PROENÇA, 2005).

Os modelos constitutivos fundamentados na teoria da Mecânica do Dano têm sido usados como uma importante ferramenta de análise da perda de rigidez de estruturas, com a finalidade de prever a degradação do material. Essa teoria lida com a capacidade de carga de sólidos em que o próprio material é danificado devido à presença de microdefeitos, tais como microfissuras e microvazios (LEMAITRE, 2012). O efeito da microfissuração sobre o módulo elástico inicial pode ser evidenciado, macroscopicamente, ao longo do ramo de amolecimento da curva tensão-deformação (PITUBA, 2010). Esses modelos são utilizados na simulação da degradação mecânica de materiais quase frágeis, tais como concreto, cerâmicas e rochas, que depois de percorrido o regime elástico, ocorre descendência tensional (amolecimento) a cada

incremento de deformação, delineando o comportamento não linear do material (RODRIGUES; MANZOLI, 2010).

Modelos constitutivos elastoplásticos consideram que, depois de atingida a tensão de escoamento do material, toda tensão aplicada provocará o surgimento de deformações irreversíveis em um dado corpo, ou seja, a estrutura do material se modifica de maneira irreversível (CHEN; HAN, 2007). Para o cálculo das deformações plásticas, três propriedades caracterizam o comportamento material: a função de escoamento, que especifica o estado de tensão correspondente ao início do fluxo plástico; a regra de fluxo, que relaciona os incrementos de deformação plástica com as tensões correntes e incrementos de tensão; e a regra de endurecimento, que especifica como a função de escoamento é modificada durante o fluxo plástico (BATHE, 2006).

A teoria da plasticidade é por natureza fenomenológica, sendo formalizada por meio de observações no comportamento macroscópico de ensaios de corpos deformáveis. Modelos elastoplásticos são aplicados para simular o comportamento de materiais que apresentam resistência após o escoamento (endurecimento), muito comuns em metais (YAW, 2017), e de materiais que apresentam amolecimento após a carga de pico, como materiais quase frágeis (CHEN; HAN, 2007).

Na análise não linear de estruturas, programas computacionais atuam como grandes facilitadores no processo de modelagem, análise e avaliação de resultados. Nesse contexto, este artigo tem por objetivo apresentar as formulações e os algoritmos de dois modelos constitutivos inelásticos uniaxiais: um baseado na teoria da Elastoplasticidade (SIMO; HUGHES, 2000; YAW, 2017); e o outro na Mecânica do Dano (MANZOLI; OLIVER; RUIZ, 1998). Os modelos constitutivos são comparados por meio das trajetórias de equilíbrio de estruturas constituídas por barras biarticuladas (barra simples, treliça plana do tipo *Howe* e duas treliças espaciais - domo e torre) submetidas a ciclos de carregamento e descarregamento.

As estruturas são discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), e é assumida a condição de rotações e deslocamentos infinitesimalmente pequenos. O conjunto de equações não lineares é solucionado pelo procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson padrão associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. Os algoritmos desenvolvidos para a solução do problema estrutural foram implementados usando o *software* Matlab, versão 8.6 R2015b (MATLAB, 2015). Os testes computacionais foram realizados em um computador Core i7 - 3537U com 8GB de memória.

A adoção de estruturas do tipo treliça para o estudo da não linearidade física foi motivada pelos seguintes aspectos: são amplamente utilizadas nos mais diversos tipos de construções; são relativamente simples de serem implementadas computacionalmente utilizando o MEF; e possibilitam um melhor entendimento da resposta não linear do material em ciclos de carga e descarga.

2 Problema estrutural e método de solução

O sistema de equações não lineares que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com não linearidade física é descrito por (MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2014):

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

na qual $\mathbf{g}$ é o vetor de forças desequilibradas, $\mathbf{F}_r$ é o vetor de referência que caracteriza a direção da força externa, λ é o parâmetro de força e $\mathbf{F}_{int}$ é o vetor de forças internas.

Como $\mathbf{g}$ é uma função não linear dos deslocamentos, iterações para correção do parâmetro de força são necessárias para obter a solução. Assim, para uma sequência do parâmetro de força λ , uma sequência do respectivo incremento de deslocamentos nodais $\mathbf{u}$ é gerada. A solução do sistema dado em Equação (1) é obtida por meio do procedimento iterativo e incremental de Newton-Raphson associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear.

Aplicando o esquema iterativo de Newton-Raphson ao sistema na Equação (1), chega-se à seguinte expressão (BATHE, 1996; SOUZA et al., 2018):

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}^{(k-1)}, \quad (2)$$

em que $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}$ é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural (matriz Jacobiana) e $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ é o subincremento de deslocamentos. O superíndice (k-1) indica a iteração anterior e (k) indica a iteração corrente. Os parâmetros totais de força (λ) e do vetor de deslocamentos nodais ($\mathbf{u}$) no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k são atualizados por, respectivamente:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (4)$$

Com a combinação das Equações (2) e (3), chega-se à expressão para $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ (CRISFIELD, 1991):

$$\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)}, \quad (5)$$

na qual $\delta \lambda^{(k)}$ é o subincremento do parâmetro de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo, e $\delta \mathbf{u}_g^{(k)}$ e $\delta \mathbf{u}_r^{(k)}$ são obtidos, respectivamente, por:

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)}, \quad (6)$$

$$\delta \mathbf{u}_r^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{F}_r. \quad (7)$$

O cálculo explícito de $[\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1}$ pode ser evitado resolvendo-se o sistema de equações lineares via decomposição (por exemplo, fatoração LU e fatoração de Cholesky), visto que uma única fatoração no início da iteração é necessária.

Os parâmetros incrementais do parâmetro de força ($\Delta \lambda$) e do vetor de deslocamentos nodais ($\Delta \mathbf{u}$) no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k são avaliados por, respectivamente:

$$\Delta \lambda^{(k)} = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (8)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (9)$$

A técnica de continuação Comprimento de Arco Linear foi proposta por Riks (1972, 1979), e consiste em manter a trajetória de iteração sempre ortogonal à direção tangente inicial em cada passo. A expressão para o incremento inicial do parâmetro de força (solução predita) é dada por:

$$\Delta\lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta\mathbf{u}_r\|}, \quad (10)$$

na qual Δl representa o incremento de comprimento de arco. Esse incremento pode ser utilizado como um parâmetro de controle no passo de força corrente de acordo com a expressão:

$$\Delta l = \Delta l^{(0)} \left(\frac{Nd}{t_k} \right)^{0,5}, \quad (11)$$

em que $\Delta l^{(0)}$ é o incremento de comprimento de arco no passo de força inicial, Nd é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, e t_k é o número de iterações que foi necessário para convergir no passo de força anterior.

No processo iterativo subsequente, a equação de restrição usada para calcular $\delta\lambda^{(k)}$ é obtida fazendo com que a solução iterativa ($\delta\mathbf{u}^{(k)}$) seja ortogonal à solução incremental predita ($\Delta\mathbf{u}^{(0)}$):

$$\delta\mathbf{u}^{(k)T} \Delta\mathbf{u}^{(0)} = 0. \quad (12)$$

Com a substituição da Equação (5) na Equação (12), obtém-se a equação para a determinação da correção do subincremento de força ($k > 1$):

$$\delta\lambda^{(k)} = - \frac{\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{u}^{(0)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)}}. \quad (13)$$

O critério de convergência adotado para cada passo de força é expresso pela norma da força residual e da força total aplicada:

$$\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol} \|\mathbf{F}_r\|, \quad (14)$$

na qual $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana e tol é a tolerância fornecida pelo usuário.

O método de Newton-Raphson só fornece a solução de um simples ponto no caminho de equilíbrio. Para obter outros pontos, combinam-se as iterações de Newton-Raphson com um procedimento incremental. Esse procedimento incremental-iterativo é ilustrado no algoritmo na Figura 1.

Entrada: $\Delta l^{(0)}, k_{m\acute{a}x}, Nd, tol, \Delta P, n_{m\acute{a}x}$	14. $\delta u \leftarrow \delta u_g + \delta \lambda \delta u_r$
Saída: $u, \lambda, NP, k_{total}$	15. $\Delta u \leftarrow \Delta u + \delta u$
1. $u \leftarrow 0, \Delta u \leftarrow 0, \lambda \leftarrow 0, k_{total} \leftarrow 0$	16. $\Delta \lambda \leftarrow \Delta \lambda + \delta \lambda$
2. Para $NP \leftarrow 1, \dots, n_{m\acute{a}x}$	17. $g \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) F_r - F_{int}(u + \Delta u)$
3. $\delta u_r \leftarrow [K(u)]^{-1} F_r$	18. Se $\ g\ \leq tol \ F_r\ $
4. $\Delta \lambda \leftarrow \Delta l / \ \delta u_r\ $	19. Terminar a execução do Para
5. Se $\Delta u^T \delta u_r < 0$	20. Fim-Se
6. $\Delta \lambda \leftarrow -\Delta \lambda$	21. $\delta u_r \leftarrow [K(u + \Delta u)]^{-1} F_r$
7. Fim-Se	22. Fim-Para
8. $\Delta u^{(0)} \leftarrow \Delta \lambda \delta u_r$	23. $u \leftarrow u + \Delta u$
9. $\Delta u \leftarrow \Delta u^{(0)}$	24. $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta \lambda$
10. $g \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) F_r - F_{int}(u + \Delta u)$	25. $\Delta l \leftarrow \Delta l^{(0)} (Nd/k)^{0,5}$
11. Para $k \leftarrow 1, \dots, k_{m\acute{a}x}$	26. $k_{total} \leftarrow k_{total} + k$
12. $\delta u_g \leftarrow [K(u + \Delta u)]^{-1} g$	27. Fim-Para
13. $\delta \lambda \leftarrow -(\Delta u^{(0)T} \delta u_g) / (\Delta u^{(0)T} \delta u_r)$	

Figura 1. Algoritmo: procedimento incremental-iterativo para o Método de Newton-Raphson associado à técnica Comprimento de Arco Linear.

Os dados de entrada no algoritmo são: comprimento inicial de arco ($\Delta l^{(0)}$); número máximo de iterações em cada passo de força ($k_{m\acute{a}x}$); número de iterações desejadas em cada passo de força (Nd); tolerância (tol); incremento de força (ΔP); e número máximo de passos de força ($n_{m\acute{a}x}$). As saídas do algoritmo são: vetor de deslocamentos nodais (u); parâmetro de força total λ ; número total de passos de força (NP); e número total de iterações acumuladas até a convergência para a solução (k_{total}). Para o término das análises das estruturas neste trabalho, contudo, foi estabelecida como condição (ou critério de parada) o deslocamento máximo referente a um grau de liberdade de um determinado nó da estrutura ou um valor máximo para a força no nó de aplicação.

3 Modelo constitutivo elastoplástico

O modelo elastoplástico implementado foi obtido a partir dos trabalhos de Simo e Hughes (2000) e Yaw (2017). Modelos constitutivos elastoplásticos consideram que depois de atingida a tensão de escoamento (σ_Y) do material, toda tensão aplicada provocará o surgimento de deformações irreversíveis em um dado corpo. A deformação específica total (ε) pode ser dividida em duas parcelas, deformação elástica (ε_e) e deformação plástica (ε_p):

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \quad (15)$$

O valor da tensão σ é dado por:

$$\sigma = E_0 \varepsilon_e = E_0 (\varepsilon - \varepsilon_p), \quad (16)$$

na qual E_0 é o módulo de elasticidade longitudinal inicial. O critério de escoamento $f(\sigma)$ é expresso por:

$$f(\sigma) = |\sigma| - G(\alpha), \quad (17)$$

na qual $G(\alpha)$ é uma função que descreve a variação da tensão de escoamento σ_Y , cuja expressão para o caso de encruamento linear é:

$$G(\alpha) = \sigma_Y + B\alpha \quad (18)$$

em que α é a Variável de Endurecimento e B é o Módulo Plástico. Na Equação (18), se o valor de B for positivo, tem-se uma inclinação positiva do trecho de plastificação, indicando encruamento/endurecimento. Caso o valor de B for negativo, tem-se uma inclinação negativa da curva tensão-deformação, indicando encruamento/amolecimento. Finalmente, $B = 0$ corresponde ao modelo elastoplástico perfeito.

No caso do encruamento linear, o módulo tangente elastoplástico E é dado por:

$$E = \frac{E_0 B}{E_0 + B} \quad (19)$$

O algoritmo para o modelo elastoplástico está descrito na Figura 2.

Entrada: $\alpha^{(j-1)}, \varepsilon^{(j)}, B, \varepsilon_p^{(j-1)}, \sigma_Y, E_0$	8. sinal $\leftarrow 1$
Saída: $\sigma^{(j)}, \alpha^{(j)}, \varepsilon_p^{(j)}, E$	9. senão
1. $\sigma^{(j)} \leftarrow E_0(\varepsilon^{(j)} - \varepsilon_p^{(j-1)})$	10. sinal $\leftarrow -1$
2. $f \leftarrow \sigma^{(j)} - (\sigma_Y + B\alpha^{(j-1)})$	11. Fim-Se
3. Se $f \leq 0$	12. $\varepsilon_p^{(j)} \leftarrow \varepsilon_p^{(j-1)} + \Delta\gamma \text{ sinal}$
4. $E \leftarrow E_0$	13. $\alpha^{(j)} \leftarrow \alpha^{(j-1)} + \Delta\gamma$
5. Senão	14. $\sigma^{(j)} \leftarrow E_0(\varepsilon^{(j)} - \varepsilon_p^{(j)})$
6. $\Delta\gamma \leftarrow \frac{f}{E_0 + B}$	15. $E \leftarrow \frac{E_0 B}{E_0 + B}$
7. Se $\sigma^{(j)} \geq 0$	16. Fim-Se

Figura 2. Algoritmo do modelo elastoplástico.

Fonte: Adaptada de Suzuki e Muñoz-Rojas (2014) e Yaw (2017).

4 Modelo constitutivo de dano

Para descrever o comportamento do material segundo a Mecânica do Dano, utiliza-se o modelo proposto por Manzoli, Oliver e Ruiz (1998). Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é expressa por:

$$\bar{\sigma} = E_0 \varepsilon, \quad (20)$$

na qual E_0 é o módulo de elasticidade não danificado do material e ε é a deformação específica. O limite de dano inicial r_0 é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão de escoamento σ_Y da seguinte forma:

$$r_0 = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{E_0}} \quad (21)$$

Define-se a norma da tensão efetiva $\tau(\bar{\sigma})$ por:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{E_0}}. \quad (22)$$

O critério de degradação $f(\bar{\sigma})$ é dado pela equação:

$$f(\bar{\sigma}) = \tau(\bar{\sigma}) - r_0 \leq 0. \quad (23)$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano é dado pelo máximo valor da variável τ durante o processo de carregamento, tal que:

$$r = \max(r, \tau). \quad (24)$$

Combinando as Equações (20) e (22), τ pode ser expresso em termos da deformação ε por:

$$\tau(\varepsilon) = \sqrt{E_0} \varepsilon. \quad (25)$$

A tensão normal σ no material é obtida por:

$$\sigma = (1 - d)E_0\varepsilon, \quad (26)$$

na qual o dano d é um escalar escrito em função do módulo H e do limite de dano r por:

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)}. \quad (27)$$

Variando-se a função que descreve o módulo H , tem-se na Figura 3 em (a) o regime elastodegradável perfeito, em (b) o encruamento linear positivo (endurecimento), em (c) o encruamento linear negativo (amolecimento), e em (d) o amolecimento exponencial.

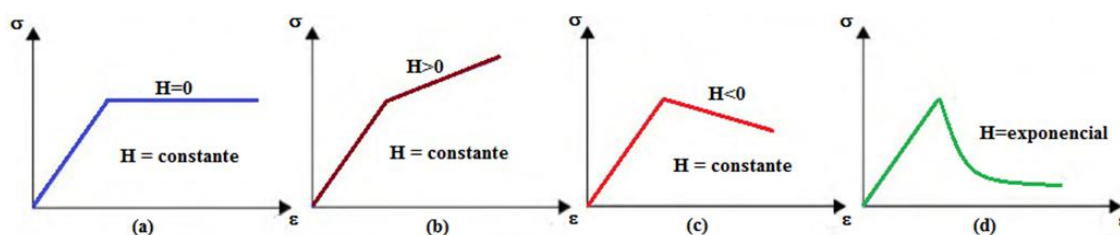


Figura 3. Comportamentos distintos de endurecimento/amolecimento.

Fonte: Adaptada de Pedrini (2008).

Para o caso de um procedimento incremental, o dano d no passo de força $t + \Delta t$ pode ser obtido a partir das deformações a cada iteração k pelo algoritmo do modelo constitutivo de dano isotrópico apresentado na Figura 4.

Entrada: $\varepsilon^{(j)}, r^{(j-1)}, E_0, H, r_0, d^{(j-1)}$	9. $E \leftarrow (1 - d^{(j)})E_0$
Saída: $r^{(j)}, d^{(j)}, \sigma^{(j)}, E$	10. $\sigma^{(j)} \leftarrow E\varepsilon^{(j)}$
1. $\tau^{(j)} \leftarrow \sqrt{E_0} \varepsilon^{(j)} $	11. Fim-Se
2. $f \leftarrow \tau^{(j)} - r^{(j-1)}$	12. Se $d^{(j)} < 0$
3. Se $f \leq 0$	13. $d^{(j)} \leftarrow 0$
4. $E \leftarrow (1 - d^{(j-1)})E_0$	14. Fim-Se
5. $\sigma^{(j)} \leftarrow E\varepsilon^{(j)}$	15. Se $d^{(j)} > 1$
6. Senão	16. $d^{(j)} \leftarrow 1$
7. $r^{(j)} \leftarrow \tau^{(j)}$	17. Fim-Se
8. $d^{(j)} \leftarrow \frac{r^{(j)} - r_0}{r^{(j)}(1+H)}$	

Figura 4. Algoritmo do modelo de dano isotrópico.

Fonte: Adaptada de Manzoli, Oliver e Ruiz (1998).

5 Elemento finito de treliça espacial

Este elemento transmite somente forças axiais e tem área da seção transversal A constante. As coordenadas (X_1, Y_1, Z_1) e (X_2, Y_2, Z_2) representam a configuração inicial do elemento de barra (também conhecida como coordenadas de referência). Após uma mudança de configuração devido a deslocamentos da treliça, a barra passa a ter novas coordenadas (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) . O comprimento inicial (ou referencial) L_0 e o comprimento atual da barra L são avaliados, respectivamente, por (BATHE, 1996):

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}, \quad (28)$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (29)$$

A matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_{el}$ e o vetor de força interna $\mathbf{F}_{el}$ elementares são dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{K}_{el} = \frac{EA}{L_0} \mathbf{r} \mathbf{r}^T, \quad (30)$$

$$\mathbf{F}_{el} = \frac{EA}{L_0} \varepsilon_E \mathbf{r}, \quad (31)$$

em que EA é a rigidez axial, ε_E é a deformação de Engenharia dada por:

$$\varepsilon_E = \frac{L - L_0}{L_0}, \quad (32)$$

e $\mathbf{r}$ é um vetor dado por:

$$\mathbf{r} = [-c_x \quad -c_y \quad -c_z \quad c_x \quad c_y \quad c_z]^T. \quad (33)$$

Na Equação (33) c_x , c_y e c_z são os cossenos diretores dados por, respectivamente:

$$c_x = \frac{X_2 - X_1}{L_0}, \quad (34)$$

$$c_y = \frac{Y_2 - Y_1}{L_0}, \quad (35)$$

$$c_z = \frac{Z_2 - Z_1}{L_0}. \quad (36)$$

6 Resultados numéricos e análise

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas constituídos por barras biarticuladas (barra simples, treliça plana do tipo *Howe* e duas treliças espaciais - domo e torre) com comportamento não linear físico, com o intuito de aplicar e comparar os algoritmos referentes aos modelos constitutivos. O peso próprio das estruturas é desprezado nas análises.

6.1 Barra simples

Seja a barra comprimida com área da seção transversal $(1,0 \times 1,0) \text{ m}^2$ e comprimento $L = 12,0 \text{ m}$ constituída por dois tipos de materiais, conforme é apresentada na Figura 5a. Este problema foi estudado por Pitangueira e Fuina (2003). Considera-se que os materiais tenham comportamento elastoplástico com encruamento/amolecimento (Figura 5b), de modo que o elemento central seja menos resistente que os demais. O módulo de elasticidade inicial das barras é $E_0 = 2,0 \times 10^4 \text{ MPa}$. Nas simulações com a técnica Comprimento de Arco Linear foram considerados os seguintes parâmetros: $\Delta l^{(0)} = 0,001$; $k_{\text{máx}} = 150$; $N_d = 4$; e $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-6}$. Os parâmetros materiais adotados para as barras são mostrados na Tabela 1.

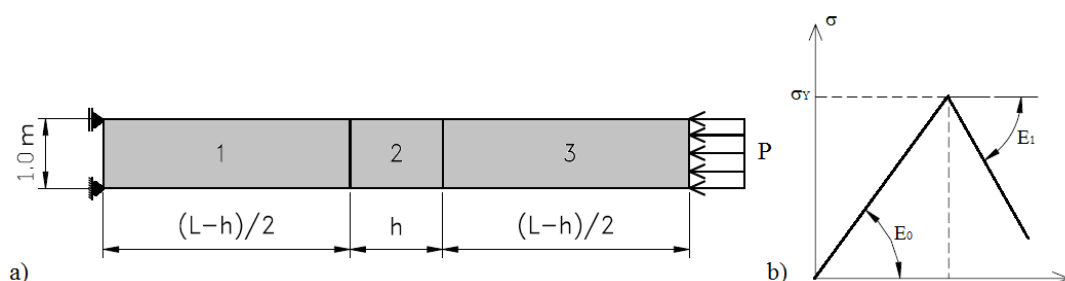


Figura 5. Barra simples comprimida: a) modelo estrutural; e b) diagrama deformação versus tensão.

Fonte: Adaptada de Pitangueira e Fuina (2003).

Tabela 1 - Barra simples comprimida: parâmetros materiais.

Modelo elastoplástico	Modelo de dano
$B = -4,0 \times 10^3 \text{ MPa}$	$H = -0,2$
$\sigma_Y = 20,0 \text{ MPa}$ (barra 2)	$\sigma_Y = 20,0 \text{ MPa}$ (barra 2)
$\sigma_Y = 25,0 \text{ MPa}$ (barras 1 e 3)	$\sigma_Y = 25,0 \text{ MPa}$ (barras 1 e 3)

Fonte: Autoria própria (2019).

Nas simulações adotou-se o incremento de força $\Delta P = 20,0 \text{ MN}$. Na Figura 6 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio com os modelos elastoplástico e de dano, havendo boa concordância com os resultados numéricos obtidos por Pitangueira e Fuina (2003). Vê-se

que a técnica de continuação conseguiu identificar o ponto limite na trajetória e ultrapassá-lo alcançando o próximo ponto de equilíbrio.

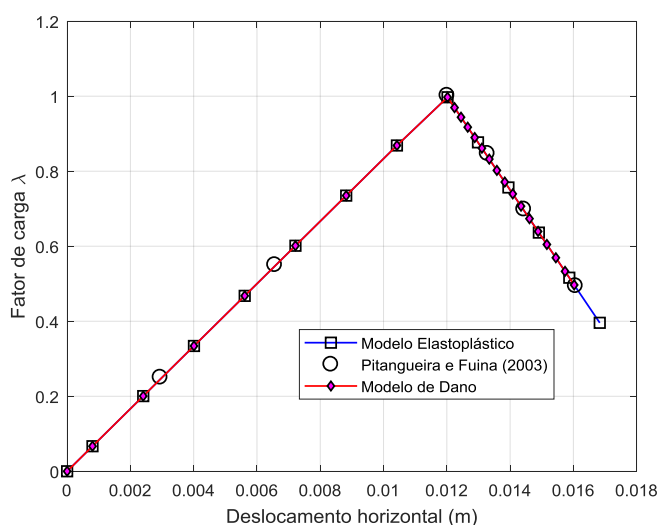


Figura 6. Trajetórias de equilíbrio referente à barra simples comprimida.

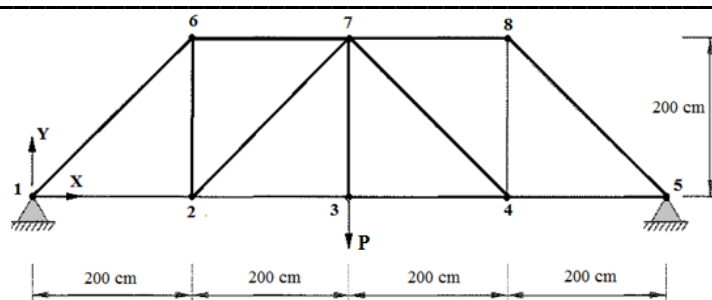
Fonte: Autoria própria (2019).

Considerando a análise com o modelo elastoplástico, após a tensão normal na barra 2 atingir a tensão de escoamento $2,0 \times 10^4$ MPa, a mesma passa a ter comportamento plástico; assim, a partir de $P = 20,0$ MN, qualquer acréscimo de força axial faz a barra 2 percorrer o caminho descendente de sua resposta constitutiva, com inclinação $E_1 = -5,0 \times 10^3$ MPa. As demais barras sofrem descarregamento segundo a inclinação E_0 - durante toda a análise as barras 1 e 3 têm comportamento elástico linear. Na análise com o modelo de Dano, a barra apresenta comportamento elástico linear até aproximadamente $P = 20,0$ MN, sem evolução da variável de dano ($d = 0$ e $\dot{d} = 0$). A partir dessa intensidade de força, o processo de degradação se inicia na barra 2, e o dano d é diferente de zero ($d > 0$ e $\dot{d} \neq 0$).

6.2 Treliça plana com oito nós e 13 barras

Este exemplo, adaptado de Rodrigues e Venturini (2005), é composto por uma treliça plana metálica biapoada do tipo *Howe* com oito nós e 13 barras, cujos banzos inferior e superior são paralelos entre si, conforme ilustra a Figura 7. As barras têm área da seção transversal $A = 1,0 \text{ cm}^2$ e o módulo de elasticidade $E_0 = 21,0 \text{ MN/cm}^2$.

A estrutura é solicitada por uma força vertical P no nó 3, sendo submetida a ciclos de carregamento e descarregamento. O material das barras apresenta comportamento elastoplástico com encruamento/endurecimento. As propriedades materiais aparecem na Tabela 2. Nas simulações foram considerados os seguintes parâmetros: $\Delta l^{(0)} = 0,2$; $k_{\text{máx}} = 150$; $N_d = 5$; e $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-6}$.

**Figura 7.** Modelo estrutural da treliça plana do tipo Howe.

Fonte: Adaptado de Rodrigues e Venturini (2005).

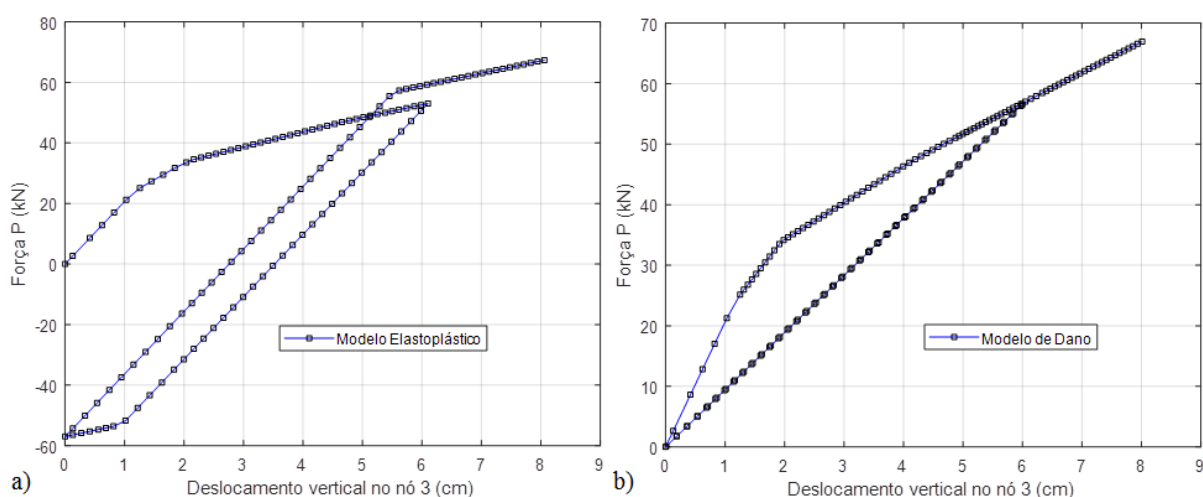
Tabela 2 - Treliça plana do tipo Howe: parâmetros materiais.

Modelo Elastoplástico	Modelo de Dano
$B = 5,0 \text{ MN/cm}^2$ $\sigma_Y = 24,0 \text{ kN/cm}^2$	$H = 0,3125$ $\sigma_Y = 24,0 \text{ kN/cm}^2$

Fonte: Autoria própria (2019).

Na Figura 8 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio (curvas deslocamento vertical no nó 3 *versus* força P) obtidas com os modelos elastoplástico e de dano. A primeira mudança na inclinação das trajetórias se deve à plastificação ($\epsilon_p \neq 0$) ou danificação ($d > 0$) da barra 3-7 (montante) e, com o aumento da intensidade da carga P, as barras 1-6, 2-7, 4-7 e 5-8 (diagonais) sofrem o mesmo processo, alterando novamente a inclinação da trajetória.

Com relação à análise com o modelo elastoplástico, observa-se na Figura 8a que a deformação não é apenas uma função da tensão, mas também da história de carregamento e descarregamento do material, ou seja, o comportamento do material é dependente do caminho ou trajetória de carregamento (*path dependent*). Quando o sentido da força P é invertido, na fase de novo carregamento, a plastificação nas barras inicia com um valor da tensão diferente da tensão na fase de carregamento anterior; esse fenômeno em que os limites de elasticidade na tração e compressão são alterados é conhecido como efeito de Bauschinger.

**Figura 8.** Trajetórias de equilíbrio para a treliça plana do tipo Howe: a) modelo elastoplástico; e b) modelo de Dano.

Fonte: Autoria própria (2019).

A Figura 8b mostra a trajetória de equilíbrio obtida com o modelo de dano. Quando o valor da função $f(\bar{\sigma}) < 0$ (Equação (23)), não há evolução da variável limite de dano r e, portanto, não há evolução do dano d (é o caso, por exemplo, do processo de descarregamento). Entretanto, se a função $f(\bar{\sigma}) \geq 0$, há evolução da variável dano ($\dot{d} \neq 0$) e o processo é de carregamento.

6.3 Domo treliçado com 13 nós e 24 barras

Seja o domo treliçado submetido à força P no seu topo, conforme ilustrado na Figura 9. Esta estrutura foi adaptada de Greco et al. (2006). As barras têm área $A = 3,17 \text{ cm}^2$ e módulo de elasticidade $E_0 = 3,0 \times 10^5 \text{ kN/cm}^2$. A relação constitutiva do material é elástica perfeitamente plástica. Os parâmetros para os modelos elastoplástico e de dano são apresentados na Tabela 3. Nas análises com a técnica de Comprimento de Arco Linear foram considerados os seguintes parâmetros: $\Delta l^{(0)} = 0,01$; $k_{\text{máx}} = 150$; $N_d = 5$; e $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-10}$.

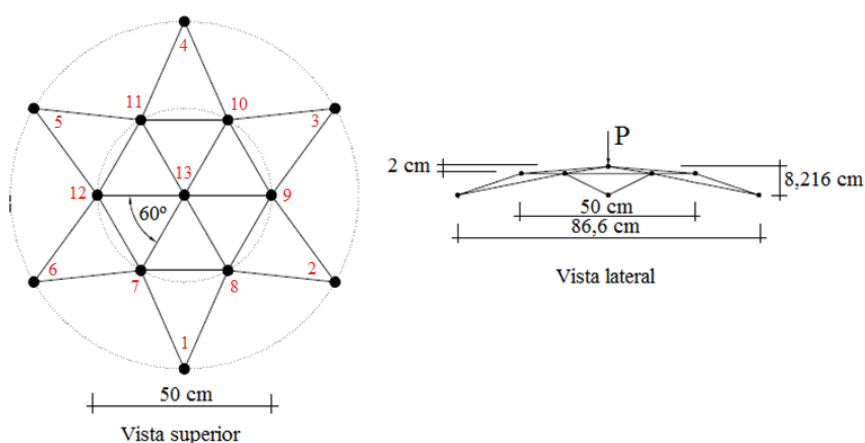


Figura 9. Modelo estrutural do domo treliçado.

Fonte: Adaptada de adaptada de Greco et al. (2006).

Tabela 3 - Domo treliçado: parâmetros materiais.

Modelo Elastoplástico	Modelo de Dano
$B = 0$	$H = 0$
$\sigma_Y = 200,0 \text{ kN/cm}^2$	$\sigma_Y = 200,0 \text{ kN/cm}^2$

Fonte: Autoria própria (2019).

Neste exemplo a estrutura é submetida a ciclos de carregamento e descarregamento, o que permite a verificação da influência das deformações que ocorrem no material de acordo com cada modelo constitutivo. Foi considerado um incremento de força $\Delta P = 1,0 \text{ kN}$ e, durante as análises, as barras 7-13, 8-13, 9-13, 10-13, 11-13 e 12-13 apresentam comportamento plástico (modelo elastoplástico) ou sofrem degradação (modelo de dano), enquanto que as demais barras têm comportamento elástico linear. Na Figura 10 aparecem as trajetórias de equilíbrio (deslocamento vertical no topo do domo *versus* força P) para ambos os modelos constitutivos.

Observa-se na simulação com o modelo de dano (Figura 10b), que a partir do ponto b da trajetória de equilíbrio as barras iniciam a degradação ($\dot{d} \neq 0$) - o valor do módulo de elasticidade E diminui em função do fator $(1 - d)$, ou seja, $E < E_0$. Nos trechos de descarregamento da trajetória não há alteração do dano d ($\dot{d} = 0$), no entanto, as inclinações

das retas a-b, a-c e a-d diferem. Observa-se que a estrutura no descarregamento retorna para a sua configuração indeformada ou inicial.

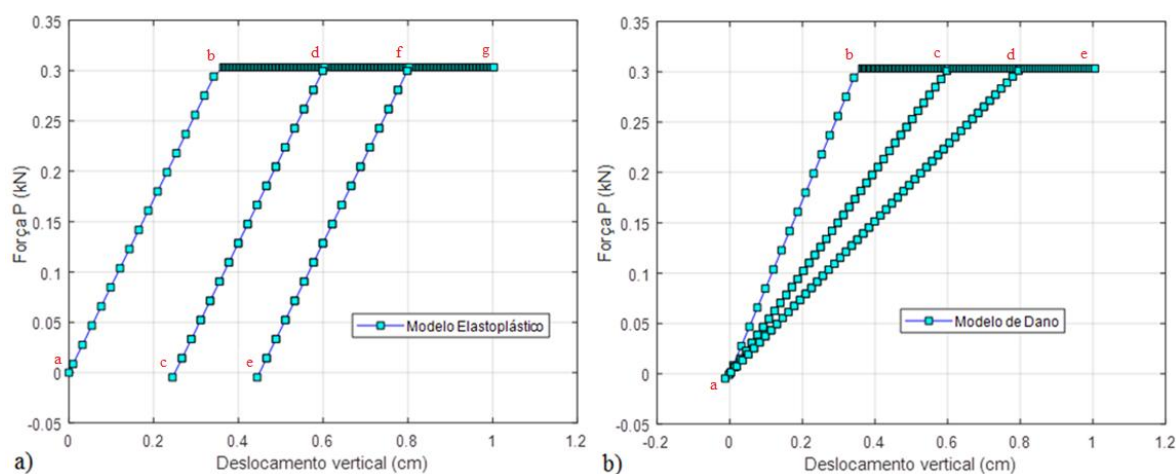


Figura 10. Trajetórias de equilíbrio para o domo treliçado: a) modelo Elastoplástico; e b) modelo de Dano.

Fonte: Autoria própria (2019).

Diferentemente na análise com o modelo elastoplástico, na estrutura surgem deformações irreversíveis após as barras atingirem a tensão de escoamento σ_Y , como pode ser visto nos trechos de descarregamento do caminho de equilíbrio (retas c-d e e-f) na Figura 10a, em que a estrutura não retorna para sua configuração inicial. A taxa de deformação total na barra $\dot{\epsilon}$, depois de atingida a tensão de escoamento, coincide com a taxa de deformação plástica $\dot{\epsilon}_p$. O trecho elastoplástico do diagrama tensão-deformação é horizontal. Os resultados numéricos (NP, k_{total} e tempo de processamento t em segundos) são apresentados na Tabela 4.

Observa-se, na Tabela 4, que o número total de iterações até a convergência para a solução difere nas simulações com os modelos. Essa diferença se deve à matriz de rigidez $\mathbf{K}$ no modelo de dano ser atualizada a cada iteração no processo incremental (o módulo de elasticidade E é escrito em função da variável dano d - ver Equação (26)). Já para o modelo elastoplástico, a matriz de rigidez é mantida constante durante o ciclo iterativo, uma vez que o módulo tangente elastoplástico E é igual a E_0 .

Tabela 4 - Domo treliçado: resultados numéricos.

Modelo	NP	k_{total}	t (s)
Elastoplástico	231	4564	5,433163
Dano	319	2792	3,432258

Fonte: Autoria própria (2019).

6.4 Torre com nove nós e 22 barras

Considere a torre de base quadrada, com lado igual a 400 cm e altura 2000 cm, submetidas ao carregamento conforme mostrado na Figura 11. Este problema foi adaptado de Rubert (1993). As barras que constituem a coluna têm área da seção transversal $A = 35,0 \text{ cm}^2$ e as demais, $A = 7,5 \text{ cm}^2$. Todas as barras possuem módulo de elasticidade $E_0 = 21,0 \text{ MN/cm}^2$. A relação constitutiva do material é elástica perfeitamente plástica. Os parâmetros para os modelos de dano e elastoplástico são apresentados na Tabela 5. Nas simulações foram

considerados os seguintes parâmetros: $\Delta l^{(0)} = 0,01$; $k_{\text{máx}} = 150$; $N_d = 4$; $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-7}$; e incremento de força $\Delta P = 1,0 \text{ kN}$.

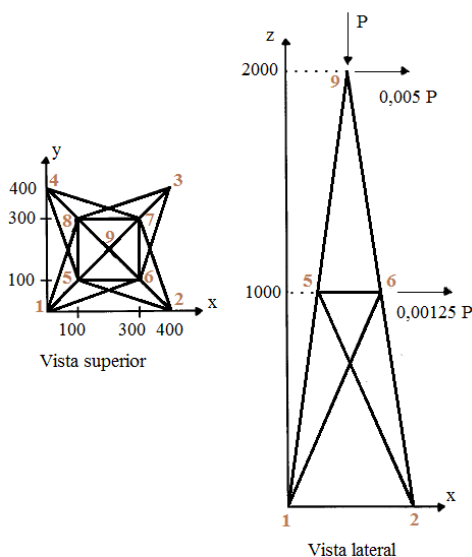


Figura 11. Modelo estrutural da torre.
Fonte: Adaptada de adaptada de Rubert (1993).

Tabela 5 - Torre: parâmetros materiais.

Modelo Elastoplástico	Modelo de Dano
$B = 0$ $\sigma_Y = 25,0 \text{ kPa}$	$H = 0$ $\sigma_Y = 25,0 \text{ kPa}$

Na Figura 12 são mostradas as trajetórias de equilíbrio da torre com ciclos de carregamento-descarregamento, obtidas com os modelos constitutivos. Nas análises com os modelos elastoplástico e de dano, as barras 6-9 e 7-9 apresentam comportamento plástico ou sofrem degradação, enquanto que as demais barras têm comportamento elástico linear. Observa-se, nessa figura, a diferença na resposta mecânica da estrutura obtida com cada modelo.

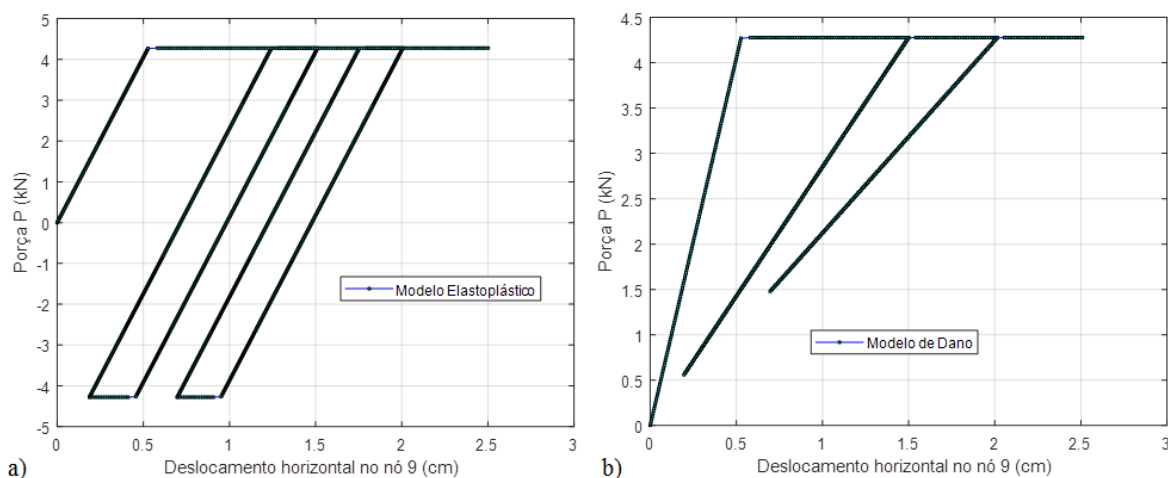


Figura 12. Trajetórias de equilíbrio: a) modelo elastoplástico; e b) modelo de dano.
Fonte: Autoria própria (2019).

Na análise com o modelo elastoplástico (Figura 12a), as forças normais nas barras chegam a alterar de tração para compressão e vice-versa. A resposta precedente depende da história de deformação anterior e evidencia que, a cada processo de carregamento da treliça, maiores são os deslocamentos o que pode levar ao colapso da estrutura por fadiga. Já na análise como o modelo de dano (Figura 12b), o sentido das forças axiais nas barras não sofre alteração.

Na Figura 13 é apresentada a configuração deformada da treliça referente ao último passo de força, com a indicação das barras tracionadas (cor azul) e comprimidas (cor vermelha), obtida da simulação com o modelo elastoplástico (NP = 1505).

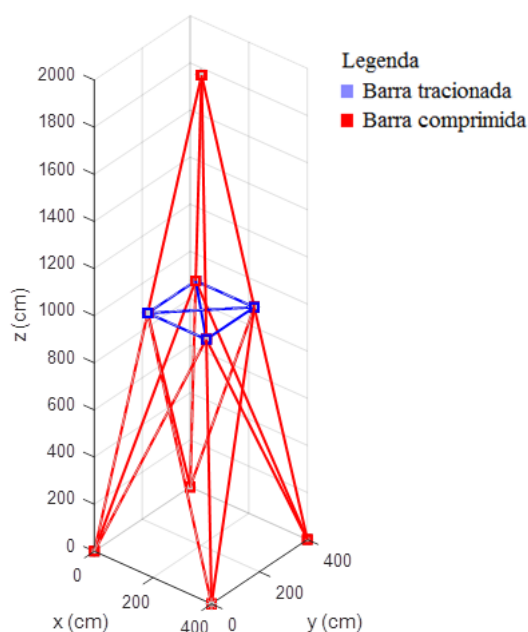


Figura 13. Configuração deformada da torre com indicação das barras tracionadas e comprimidas.

Fonte: Autoria própria (2019).

Na Tabela 6 são apresentados os resultados numéricos (NP, k_{total} e t). Da mesma forma, como no exemplo anterior, a solução com o modelo de dano foi obtida com um número total de iterações inferior a do modelo elastoplástico.

Tabela 6 - Torre: resultados numéricos.

Modelo	NP	k_{total}	t (s)
Elastoplástico	1505	6672	6,854072
Dano	961	4651	5,151407

Fonte: Autoria própria (2019).

7. Conclusão

O objetivo desse artigo foi aplicar e comparar algoritmos de modelos constitutivos baseados nas teorias da Mecânica do Dano e Elastoplasticidade em sistemas estruturais do tipo treliça com ciclos de carregamento-descarregamento, com a hipótese de pequenos deslocamentos e rotações, mas pequenas deformações. Esses modelos são frequentemente

utilizados em programas de Elementos Finitos para análise do comportamento não linear físico de estruturas.

Os resultados numéricos com cada modelo mostraram como as propriedades de rigidez do sistema são alteradas e refletem no traçado da trajetória de equilíbrio. O comportamento global da estrutura depende da resposta mecânica de cada um dos seus materiais constituintes. Entretanto, a resposta desses modelos difere quando ocorre o descarregamento, acarretando em caminhos de equilíbrio distintos.

Os modelos constitutivos implementados são capazes de prever o comportamento do material considerando diferentes leis de endurecimento/amolecimento. Há materiais que apresentam comportamento diferenciado à tração e à compressão, e os algoritmos apresentados aqui podem ser adaptados para preverem tal comportamento, definindo-se leis diferentes para cada esforço.

A definição de uma relação constitutiva adequada para o material é fundamental para que se possa prever o comportamento mecânico dos componentes que compõem a estrutura. O processo de falha de um material é caracterizado pelo acúmulo de deformações permanentes (plásticas) e pela degradação do mesmo. Modelos constitutivos que incorporem ambas as características têm potencial para uma descrição mais realista do seu comportamento.

Referências

- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Prentice Hall, 2006.
- CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. J. Ross Publishing, 2007.
- CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Volume 1: Essentials. John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- GRECO, M.; GESUALDO, F. A. R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite elements in analysis and design**, v. 42, n. 12, p. 1079-1086, 2006.
- LEON, S. E.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F.; LAGES, E. N. A unified library of nonlinear solution schemes. **Applied Mechanics Reviews**, v. 64, n. 4, p. 040803, 2011.
- LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics**. Springer Science & Business Media, 2012.
- MANZOLI, O.; OLIVER, J.; RUIZ, M. C. **Un Modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidad fuertes en la mecánica de sólidos**. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), 1998.
- MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. **Rem: Revista Escola de Minas**, v. 67, n. 2, p. 143-150, 2014.
- MUÑOZ, L. F. P.; ROEHL, D. A Continuation method with combined restrictions for nonlinear structure analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 130, p. 53-64, 2017.
- PEDRINI, R. A. A. **Análise de propagação arbitrária de descontinuidades fortes em sólidos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno**. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, 2008.
- PITANGUEIRA, R. L.; FUINA, J. S. Combinações de deformações para controlar trajetórias de equilíbrio em análise não-linear de estruturas. In.: **Mecânica Computacional**, Vol. XXII, M. B. Rosales, V. H. Cortínez y D. V. Bambill (Editores), Bahía Blanca, Argentina, 2003. **Anais...** Bahía Blanca: Mecánica Computacional, 2003.

PITUBA, J. J. C. Validação de um modelo de dano para a análise não-linear de estruturas em concreto armado. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 32, n. 3, p. 251-259, 2010.

PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na Mecânica do Dano Contínuo. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 7, n. 23, p. 33-60, 2005.

RIKS, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. **Journal of Applied mechanics**, v. 39, n. 4, p. 1060-1065, 1972.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International journal of solids and structures**, v. 15, n. 7, p. 529-551, 1979.

RODRIGUES, E. A.; MANZOLI, O. L. Um modelo constitutivo de dano combinado para simular o comportamento de materiais quase-frágeis. In: 9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications, Serra Negra, SP, 2010. **Proceedings...** Serra Negra: DINCON'10, p. 441-448, 2010.

RODRIGUES, R. O.; VENTURINI, W. S. Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 7, n. 23, p. 61-93, 2005.

RUBERT, J. B. **Estudo do desempenho de algoritmos numéricos na solução de sistemas não-lineares de estruturas formadas por barras de treliça**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993.

SAMPAIO, T. S.; GONÇALVES, R. M. Análise numérica, via MEF, de ligações em treliças metálicas espaciais. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 9, n. 38, p. 29-61, 2007.

SIMO, J.; HUGHES, T. **Computational inelasticity**. Springer, 2000.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I.; ALIANO FILHO, A.; MACHADO, R. D. Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order. **TEMA (São Carlos)**, v. 19, n. 1, p. 161-179, 2018.

SUZUKI, J. L.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. Transient analysis of geometrically non-linear trusses considering coupled plasticity and damage. In: 10th World Congress on Computational Mechanics, São Paulo, Brasil, 2014. **Proceedings...** São Paulo: 10th WCCM, 2014.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. **AIAA journal**, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.

YAW, L. L. **Nonlinear Static - 1D Plasticity - Isotropic and Kinematic Hardening**. Walla Walla University, 2017.