

---

## TORÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS

### *TORSION IN FIBER REINFORCED CONCRETE BEAMS*

Artur Lenz Sartorti<sup>1</sup>

Lucas da Silva Barboza<sup>2</sup>

Bruno Storch de Almeida Calixto<sup>3</sup>

Renata Lima de Paula<sup>4</sup>

Raúl Jair Junior Gómez León<sup>5</sup>

Poliana Geizy Mogi<sup>6</sup>

Marcelo de Oliveira Floriano<sup>7</sup>

Rafael da Costa Granjeiro<sup>8</sup>

**Resumo:** Este artigo descreve o comportamento de vigas de concreto reforçado com fibras (CRF) solicitadas à torção. O objetivo da pesquisa foi entender o mecanismo de ruptura e como as fibras curtas ajudam no processo resistente à torção. Para tanto, foram ensaiadas 12 vigas de CRF com fibras de aço e de polipropileno em dosagens de 1% e 3% de fibras em relação à massa de cimento. O concreto também teve suas propriedades avaliadas através de ensaios de compressão simples e tração por compressão diametral. Verificou-se que as fibras contidas no concreto contribuíram na resistência à torção da viga após o surgimento da primeira fissura, originando uma resistência residual que é maior conforme o aumento da concentração de fibras. Os resultados também mostram que existe apenas uma superfície de ruptura de torção nas vigas retangulares de CRF a qual tem formato helicoidal, diferentemente do que é observado no concreto armado. Há a possibilidade de utilização de fibras para a resistência à torção em peças de concreto podendo reduzir a quantidade das armaduras convencionais.

**Palavras-chaves:** Torção. Concreto Reforçado com Fibra. Cisalhamento. Analogia de Prandtl. Fibras Curtas.

**Abstract:** *This paper describes the behavior of Fiber Reinforced Concrete (FRC) beams submitted to torsion. The aim of the research was to understand the mechanism of rupture and how the short fibers add to the torsional resistance. Therefore, 12 FRC beams elements, in a 1% to 3% steel and polypropylene rate dosage in relation to cement mass, were tested. The concrete also had its properties evaluated through axial compression and tension by diametral-compression tests. The results obtained show that the fibers contained in the concrete contributed to the beams torsional resistance after the first fissure appearance, resulting in a residual resistance that is superior as the fiber concentrations increases. The results also show that there is only one torsional rupture surface in the FRC rectangular beams, which is in a helical form, differently from what is observed in reinforced concrete. There is the possibility of using fibers to enhance torsional resistance in concrete elements, which may reduce the amount of conventional reinforcement.*

**Keywords:** *Torsion. Reinforced Concrete with Fibers. Shear. Prandtl Analogy. Short Fibers.*

## 1 Introdução

A torção pura em peças de concreto provoca uma fissuração decorrente de um estado de cisalhamento simples, em que a tensão principal de tração tem módulo igual à tensão de cisalhamento (FUSCO, 2008). Uma fissura é uma barreira na propagação das tensões. Na ponta da fissura acontece uma concentração de tensões que pode danificar mais a matriz. (FIGUEIREDO, 2011).

O concreto é um compósito e, portanto, apresenta vantagens como a alta resistência à compressão. Entretanto, a fragilidade e a baixa resistência à tração são fortes características negativas. Para melhorar a ductilidade do concreto alguns materiais fibrosos podem ser utilizados na mistura. É um erro pensar que estas fibras curtas elevem a capacidade resistente à tração ou à compressão do material.

O concreto reforçado com fibras (CRF) é um material feito com cimento, agregados e fibras curtas (neste artigo a simples denominação de fibras significam fibras curtas), sendo, no Brasil, as de aço e polipropileno as mais comuns. O CRF é uma alternativa ao uso do concreto armado. Com a presença de fibras as fissuras são propagadas mais lentamente e o concreto passa a ter um comportamento mais dúctil (FIGUEIREDO, 2011).

Chan, Feng e Tsang (2009) e Farooq *et al.* (2018) ainda complementam que a adição de fibras curtas de aço e o confinamento com materiais dúcteis proporcionam grandes benefícios quanto a melhora do desempenho do concreto, reduzindo a sua fragilidade.

Tendo-se o conhecimento do funcionamento das fibras, o objetivo deste artigo foi avaliar a capacidade resistente à torção de vigas de concreto com adição de fibras de polipropileno e de aço. Os resultados indicam que a adição das fibras gera resistência à torção na peça após a formação da primeira fissura. Além disso, a presença das fibras eleva a ductilidade.

O objetivo da pesquisa foi entender o mecanismo de ruptura e como as fibras curtas ajudam no processo resistente à torção. Para o objetivo ser alcançado foram realizados ensaios de torção em 12 modelos de vigas de seção quadrada (20 x 20 cm) com teor de adição de fibras de 1% e 3% (seis vigas com fibras de polipropileno e seis com fibras de aço). O concreto também foi avaliado a partir de ensaios de compressão simples e tração por compressão diametral.

## 2 Concreto Reforçado com fibras (CRF)

A fibra é um material fino, fibrilado e alongado que pode ser aproveitada para várias finalidades, dependendo da sua origem e composição (DOBBIN Jr.; ROCHA, 2011).

As fibras podem ser classificadas em microfibras, com diâmetro de 10 a 30  $\mu\text{m}$  e comprimento entre 3 a 18 mm, utilizadas para controle da retração e fissuração de matrizes cimentícias na fase plástica; e macrofibras, com diâmetro maior que 30  $\mu\text{m}$  e comprimento que varia de 30 a 60 mm, indicadas para conferir a resistência residual após a fissuração do concreto (SALVADOR, 2013).

Grzybowski e Shah (1990) afirmaram que a presença de fibras na matriz do concreto, ajuda a reduzir micro-fissuras, macro-fissuras localizadas, com maior resistência e ductibilidade pós-fissuração. Lim e Ozbakkaloglu (2013) e Hanif *et al.* (2017) ainda complementaram que as fibras também são conhecidas por melhorar a resposta à tração pós-fissuração.

As fibras podem ser também classificadas como sendo de baixo ou alto módulo de elasticidade. Segundo Figueiredo (2011) as fibras de alto módulo, como as de aço, atuam como reforço no concreto, podendo substituir a armadura convencional. Já as fibras de baixo módulo,

como as de polipropileno, são indicadas para melhoria no controle da fissuração plástica e são indicadas para estruturas que devem ter resistência ao fogo (FIGUEIREDO; TANESI; NINCE, 2002).

As fibras de polipropileno são bastante utilizadas no concreto empregado em pisos industriais, revestimentos de túneis e estruturas de contenção de água (THOMAZ, 2012).

Por sua vez, o CRF de aço nada mais é que o mesmo composto de concreto ao qual são incorporadas fibras, criando na matriz uma armadura tridimensional que possibilita aumentar significativamente a resistência mecânica pós-fissuração do concreto (SARZALEJO *et al.*, 2014).

De forma geral, o uso de fibras no concreto não eleva a resistência à compressão, à tração axial e ao cisalhamento. Por outro lado, o uso de fibras tem efeito na elevação da ductilidade e no aumento da resistência à fadiga. Elas também são eficientes na melhoria das propriedades dinâmicas do concreto sob ação de cargas de impacto (THOMAZ, 2012).

A capacidade de reforço proporcionado pelas fibras depende diretamente do teor de fibras e da geometria da fibra. Quanto maior o teor de fibras, maior será quantidade de fibras atuando como estrutura interna de costura das fissuras. Franco (2011) descreveu que a função das fibras é de interceptar e minimizar a propagação das fissuras que se formam na matriz de concreto.

A geometria da fibra, conhecida também como fator de forma, é o comprimento da fibra dividida pelo seu diâmetro equivalente. Recomenda-se, na literatura técnica, que a fibra tenha um comprimento igual ou superior ao dobro da dimensão máxima do agregado graúdo. De forma geral, quando maior o fator de forma, maior será a capacidade de ancoragem da fibra na matriz.

Existe o conceito do comprimento crítico, que é o comprimento no qual a carga resistida pela fibra causa sua ruptura e não o escorregamento da matriz. As fibras cujo comprimento está abaixo do crítico são arrancadas da matriz, enquanto as fibras cujo comprimento está acima do crítico são rompidas, devido ao grande embutimento na matriz.

Com aumento da quantidade de fibras na seção de ruptura, menor será a carga que cada fibra deverá resistir, reduzindo a probabilidade de ruptura. Dessa maneira, os teores elevados de fibras podem compensar a sua baixa resistência no comportamento do material. Além do teor e o fator de forma, a resistência da fibra, a sua orientação na matriz cimentícia e sua trabalhabilidade influenciam o comportamento mecânico do CRF (SALVADOR, 2013).

A adição de fibras altera a consistência do concreto e a trabalhabilidade. Essa depende das características da obra e da metodologia adotada para o transporte, lançamento e adensamento do concreto, além da sua consistência. Quando as fibras têm um fator de forma muito alto e são adicionadas muito rapidamente podem gerar a formação de ouriços, que são aglomerações de fibras na matriz (FIGUEIREDO, 2011).

### 3 Comportamento resistente à torção

A torção é o esforço que ocorre quando se aplica um momento sobre o eixo longitudinal de um elemento construtivo, geralmente em elementos onde uma dimensão predomina sobre as outras, como é o caso das vigas (BASTOS, 2015).

Basicamente existem dois tipos de torção em relação às tensões que podem surgir na estrutura. A torção simples ou de Saint' Venant, onde surgem apenas tensões tangenciais (seções circulares), e a torção com empenamento impedido (seções não circulares), onde surgem tensões de tração e de compressão ao longo da barra, além das tensões tangenciais (ARAÚJO, 2010).

O estudo da torção em barras de seção não circular pode ser feito pela analogia de

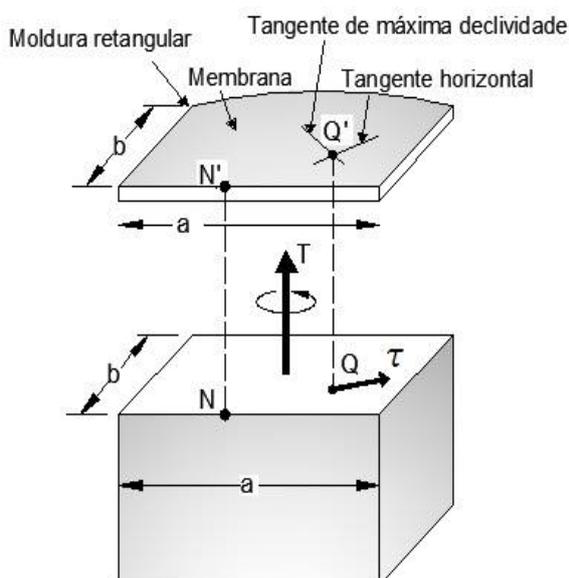
Prandtl, também conhecida como analogia da membrana. Ela consiste em uma membrana elástica e homogênea, que está presa em uma moldura rígida, submetida a uma pressão uniforme em uma das suas faces, sofrendo uma deformação que pode ser determinada por equações diferenciais e derivadas parciais (BEER; JOHNSTON, 1995).

Fusco (2008) considera para esta analogia, uma membrana sem rigidez à flexão, composta por uma película de líquido viscoso, que está fixada em um plano rígido, com o mesmo formato da seção transversal da barra submetida à torção.

A Figura 1 proposta por Beer e Jhonston (1995) ilustrou essa analogia, sendo Q um ponto da seção transversal da barra e Q' o mesmo ponto na membrana. A tensão de cisalhamento  $\tau$  no ponto Q possui a direção tangente horizontal ao ponto Q' na membrana, onde a intensidade dessa tensão será proporcional à máxima declividade da membrana no ponto Q'.

Além da tensão de cisalhamento, o momento torçor aplicado é proporcional ao volume limitado pela membrana e ao plano da moldura em que está fixada. No caso da Figura 1, a maior declividade acontece no ponto médio do lado maior da moldura, que é o ponto N'. Desta maneira a maior tensão de cisalhamento em barras de seção retangular acontece no ponto médio N do lado maior da seção, e nos vértices da seção ela valerá zero.

A analogia da membrana pode ser usada também para obter resultados qualitativos sobre a distribuição das tensões cisalhantes de qualquer seção transversal. Por ser tratar de um estado puro de cisalhamento, os planos principais estão orientados a 45° em relação ao eixo da peça (FUSCO, 2008).



**Figura 1.** Analogia da Membrana.

**Fonte:** Adaptado de Beer e Jhonston (1995) (p.283).

A tensão tangencial máxima ocorre nos pontos médios do maior lado da seção transversal retangular e é determinada pela Equação 1.

$$\tau_{\text{torção}} = \frac{T}{\alpha \cdot a \cdot b^2} \quad (1)$$

T o momento torçor máximo; a e b a maior e a menor dimensão da seção transversal retangular, respectivamente. Na Tabela 1 estão representados alguns valores do coeficiente  $\alpha$ .

**Tabela 1** – Coeficientes  $\alpha$  para seções retangulares

a/b	1,0	1,5	2,0	4,0	8,0	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,426	0,282	0,307	0,333

**Fonte:** Adaptado de Fusco (2008) (p. 251).

Se a torção for necessária para o equilíbrio da viga e não for considerada apropriadamente no dimensionamento, pode ocorrer uma fissuração intensa na estrutura, prejudicando a segurança e estética da construção (BASTOS, 2015). Existem então duas situações: a torção de equilíbrio e a torção de compatibilidade (FUSCO, 2008). A torção de equilíbrio deve ser obrigatoriamente considerada em projeto (ARAÚJO, 2010). Ainda segundo Fusco (2008), a fissuração ocorrerá quando a resistência do concreto à tração for igual à tensão principal de tração da estrutura.

#### 4 Programa experimental

Para o estudo foram escolhidas duas dosagens de fibras no concreto em relação à massa de cimento de 1% e 3%. A caracterização do concreto foi feita com corpos de prova (CP's) cilíndricos com dimensões 10 x 20 cm (diâmetro x altura). Os ensaios de caracterização do concreto foram os de compressão simples (ABNT NBR 5739:2018) e tração por compressão diametral (ABNT NBR 7222:2011). A moldagem dos CP's foi feita de acordo com a ABNT NBR 5738:2015.

Para cada dosagem e tipo de fibras foram moldadas três vigas de seção quadrada com 20 cm de lado e 110 cm de comprimento para os ensaios de torção. No total foram moldadas 12 vigas.

Todos os ensaios foram realizados aos 70 dias de idade, condição essa, imposta pela disponibilidade dos equipamentos de ensaio.

O consumo dos materiais para cada betonada usada para produzir as diferentes misturas de concreto estão indicados na Tabela 2. As principais características das fibras utilizadas estão listadas nas Tabelas 3 e 4.

**Tabela 2** – Consumo de materiais para moldagem dos corpos de prova de concreto

Tipo de Concreto	Cimento (kg)	Areia (kg)	Brita (kg)	Água (kg)	Fibras de Polipropileno ou de Aço (kg)
1% de Fibras	78,7	146,4	136,95	37,4	0,787
3% de Fibras	78,7	146,4	136,95	37,4	2,361

- O traço em massa sem as fibras foi de 1: 1,86: 1,74: 0,475 (cimento CPV-ARI: areia grossa: brita 0: água);  
- Total de quatro betonadas.

**Tabela 3** – Especificação da Fibra de Polipropileno

Fibra de Polipropileno – Fabricante Neomatex®	
Ítem	Referência
Material	100% polipropileno
Fibra por kg	16700 ± 1000
Densidade	0,92
Ponto de fusão	170 °C
Comprimento de fibra (L)	65 mm
Largura média	1,6825 mm
Espessura média (e)	0,4822 mm
Resistência alcalina	Excelente
Tipo de fibra	<i>Embossed</i> (em relevo)
Condutividade elétrica	baixa
Fator de forma (L/e)	134,80
Resistência à tração	580 MPa

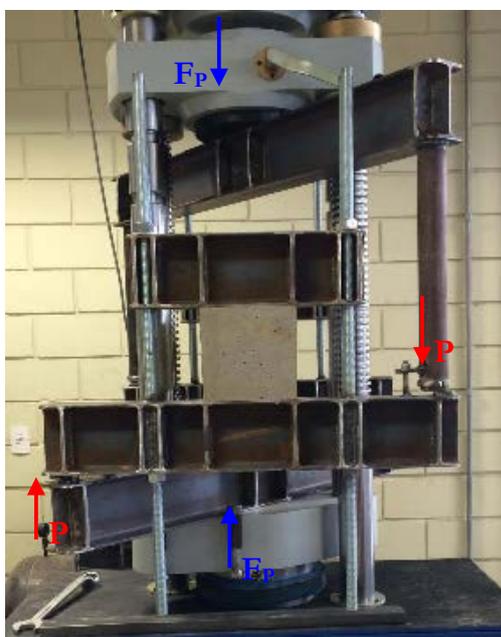
A cura de todos os CP's nas primeiras 24 h foi sob uma lona plástica. O restante do período de cura, até os ensaios, foi realizado ao ar livre, simulando uma situação onde a estrutura não recebe nenhum tratamento específico adicional para a cura.

Todos os ensaios foram realizados no Laboratório de Estruturas e Materiais do Núcleo de Tecnologia de Engenharia e Arquitetura do Centro Universitário Adventista de São Paulo – Campus Engenheiro Coelho (LEM/NUTEA/UNASP), fazendo uso da máquina servo controlada de 1000 kN.

**Tabela 4** – Especificação da Fibra de Aço

<b>Fibra FSD1050 AI FF50 – Fabricante Fibra Steel®</b>	
<b>Item</b>	<b>Referência</b>
Fator de Forma (L/d)	50
Diâmetro Arame (mm)	1,0
Comprimento (mm)	50
Fibras por kg (aproximado)	3250
Resistência a Tração do Aço (MPa)	>1000
Módulo de Elasticidade (MPa)	210000

O conjunto de aplicação da torção, observado na Figura 2, é constituído de duas vigas metálicas que em planta se cruzam formando um X. Nas extremidades opostas a carga é aplicada excêntrica em um conjunto de fixação da viga de concreto que irá sofrer rotação, aplicando o momento torçor na viga. Destaca-se que, se desprezados os efeitos de momento fletor e cortante oriundos do peso próprio da viga, o dispositivo de aplicação da torção utilizado e desenvolvido pelo LEM/NUTEA/UNASP aplica uma torção pura uniforme.



**Figura 2.** Conjunto de aplicação da torção em vigas.

As vigas metálicas que estão localizadas abaixo do corpo de prova são as vigas que recebem as cargas  $P$ , resultantes da força da prensa ( $F_p$ ) dividida por dois, através de uma viga na transversal abaixo das peças ensaiadas, e como suas extremidades estão livres, há uma rotação na viga metálica causando uma torção no corpo de prova.

## 5 Resultados

Na Tabela 5 estão os resultados dos ensaios de compressão simples para os CP's de 10 x 20 cm.

**Tabela 5** – Ensaio de compressão simples

Tipo de Fibra	Tipo de concreto	CP	$f_{ci}$	$f_{cm}$	$f_{ck}$
			(MPa)	(MPa)	(MPa)
Polipropileno	1% de fibras	P1	54,85	53,35	47,72
		P2	48,62		
		P3	56,59		
	3% de fibras	P1	48,11	47,99	47,63
		P2	47,68		
		P3	48,17		
Aço	1% de fibras	P1	60,12	59,86	57,42
		P2	61,53		
		P3	57,94		
	3% de fibras	P1	59,76	57,71	51,19
		P2	52,19		
		P3	61,19		

$f_{ci}$  - Resistência à compressão do concreto do corpo de prova  $i$ ;  $f_{cm}$  - Resistência média à compressão do concreto;  $f_{ck}$  - Resistência característica à compressão do concreto.

Para se calcular a resistência média à tração do concreto por compressão diametral é preciso obter pelos ensaios a resistência  $f_{ct,sp}$  dos CP's para então obter o resultado da média aritmética. Logo após calculada a média aritmética, multiplica-se a média por 0,9 para então obter o  $f_{ct,m}$  do concreto. Na Tabela 6 estão os resultados obtidos nos ensaios de compressão diametral para os CP's de 10 x 20 cm.

**Tabela 6** – Ensaio de tração por compressão diametral

Tipo de Fibra	Tipo de concreto	CP	$f_{ct,sp}$	Média diametral	$f_{ct,m}$
			(MPa)	(MPa)	(MPa)
Polipropileno	1% de fibras	CP4	5,08	4,92	4,43
		CP5	4,51		
		CP6	5,17		
	3% de fibras	CP4	4,85	5,15	4,64
		CP5	5,43		
		CP6	5,17		
Aço	1% de fibras	CP4	4,02	4,30	3,87
		CP5	4,93		
		CP6	3,97		
	3% de fibras	CP4	4,49	5,14	4,63
		CP5	6,06		
		CP6	4,86		

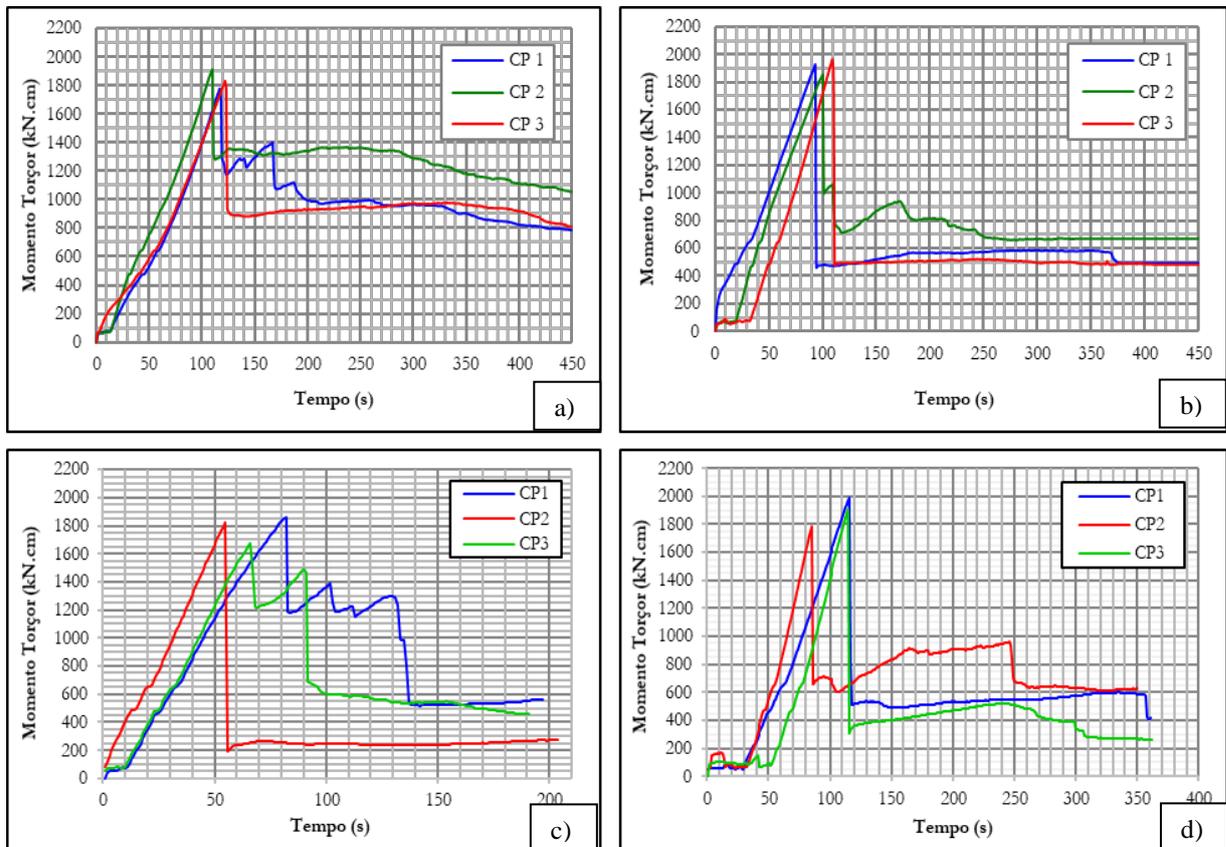
$f_{ct,sp}$  - Resistência do concreto à tração diametral;  $f_{ct,m}$  - Resistência média à tração do concreto.

Na Tabela 7 estão os resultados obtidos nos ensaios de torção nos corpos de prova prismáticos (vigas). A Figura 3 ilustra a aplicação do carregamento torcional contra o tempo.

**Tabela 7** – Ensaio de torção – Momentos torçores resistentes

Tipo de Fibra	Corpo de prova (viga)	$T_{m\acute{a}x}$	Média	$T_{p\acute{o}s-fissura}$	Média
		(kN.cm)	(kN.cm)	(kN.cm)	(kN.cm)
Polipropileno 1%	CP1	1929,46	1919,06	539,74	589,18
	CP2	1855,86		731,36	
	CP3	1971,86		496,44	
Polipropileno 3%	CP1	1785,46	1847,06	985,11	1058,63
	CP2	1916,66		1263,48	
	CP3	1839,06		927,30	
Aço 1%	CP1	1859,17	1785,40	538,33	521,83
	CP2	1824,20		248,78	
	CP3	1672,84		778,39	
Aço 3%	CP1	1989,00	1892,58	564,51	610,98
	CP2	1787,20		857,39	
	CP3	1901,55		411,06	

Sendo:  $T_{m\acute{a}x}$  – momento torçor resistido na eminência da primeira fissura;  $T_{p\acute{o}s-fissura}$  – momento torçor residual médio após a primeira fissura.



**Figura 3.** Momentos torçores *versus* tempo – a) Vigas com 1% de fibra de polipropileno; b) Vigas com 3% de fibra de polipropileno; c) Vigas com 1% de fibra de aço e d) Vigas com 3% de fibra de aço.

Na Figura 4 estão relacionadas as imagens típicas das rupturas das vigas.



**Figura 4.** Rupturas típicas por torção das vigas com fibras.

## 6 Análise teórica e análise prática dos resultados

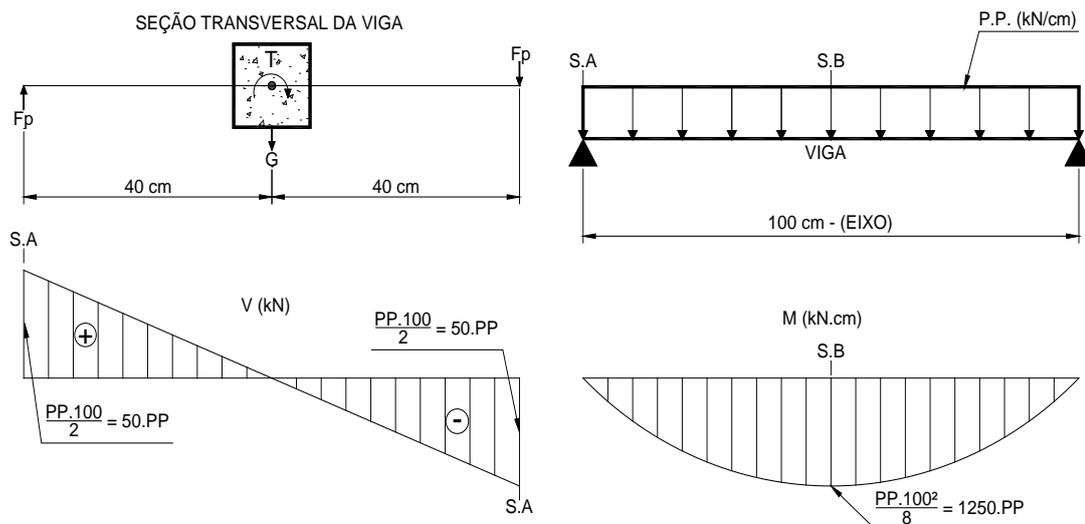
Para o auxílio na análise dos resultados são feitas análises teóricas a começar com as observações sobre a Figura 5. Sendo  $G$  o peso do dispositivo de fixação, 40 cm a distância do eixo da viga até o ponto aplicado pela força, tem-se o momento torçor inicial dado pela Equação 2.

$$T_i = G \cdot 40 \quad (2)$$

$$G = 1,1565 \text{ kN} \therefore T_i = 46,26 \text{ kN.cm}$$

E o momento torçor aplicado pela máquina de ensaios é dado pela Equação 3.

$$T = (F_p / 2) \cdot (2 \cdot 40 \cdot 2) = 80 F_p \quad (3)$$



**Figura 5.** Seção transversal da viga e esquema estático que resultam nos diagramas de esforços solicitantes de cortante ( $V$ ) e momento fletor ( $M$ ) – Sendo: SA e SB as seções de análise; PP o peso próprio da viga; T o momento torçor.

A somatória dos momentos na viga antes da primeira ruptura, gera o momento torçor máximo que é determinado pela Equação 4.

$$T_{máx} = 46,26 + 80 F_{P,máx} \quad (4)$$

Após a primeira ruptura do concreto as fibras agem gerando o momento torçor residual, que é dado pela Equação 5.

$$T_{pós-fissura} = 46,26 + 80 F_{P,residual} \quad (5)$$

A tensão de cisalhamento devido a torção da analogia de membrana de Prandtl e no problema de Saint Venant (Timoshenko, 1976), é calculada pela Equação 1 e gera a Equação 6 adotando  $\alpha=0,208$ .

$$\tau_{torção} = T / (0,208 \cdot 20^3) = T/1664 \quad (kN/cm^2) \quad (6)$$

$$T = T_{máx} \text{ ou } T_{Pós-fissura}$$

### 6.1 Análise da Seção SA

A tensão de cisalhamento da cortante é dada pela Equação 7.

$$\tau_{cortante} = V \cdot Q_x / (I_c \cdot b) \quad (7)$$

$V$  é a cortante máxima;  $Q_x$  o momento estático de meia seção transversal;  $I_c$  o momento de inércia;  $b$  a base da seção transversal, tem-se a Equação 8.

$$\tau_{cortante} = \frac{50 pp \cdot (10 \cdot 20 \cdot 5)}{\frac{20 \cdot 20^3}{12} \cdot 20} = 0,1875 pp \quad (8)$$

A tensão de cisalhamento total é determinada pela Equação 9.

$$\tau_{xy} = 0,1875 pp + (T/1664) \quad (kN/cm^2) \quad (9)$$

Já a tensão normal devida à flexão é calculada com a Equação 10.

$$\sigma_x = (M/I_c) \cdot y_i = 0 \quad (10)$$

Sendo:  $M$  o momento fletor;  $y_i$  a distância do centro de gravidade a borda mais tracionada.

A determinação da tensão principal  $\sigma_1$  é feita pela Equação 11 e a determinação da direção principal  $\theta_p$  pela Equação 12.

$$\sigma_1 = 0,1875 pp + (T/1664) \quad (kN/cm^2) \quad (11)$$

$$tg 2\theta_p = (2 \cdot \tau_{xy} / (\sigma_x - \tau_y)) = (2 \cdot \tau_{xy} / 0) \therefore \text{Indeterminação tende ao } \infty \quad (12)$$

Logo:  $tg 2\theta_p = \infty \therefore 2\theta_p = 90^\circ \therefore \theta_p = 45^\circ \therefore$  Cisalhamento Puro.

### 6.2 Análise da Seção SB

Na seção central da viga o esforço cortante é nulo. Logo a tensão de cisalhamento de origem do esforço cortante também o será ( $\tau_{cortante} = 0$ ). Assim sendo, a tensão de cisalhamento total é determinada pela segunda parcela da Equação 9 gerando a Equação 13.

$$\tau_{xy} = (T/1664) \quad (kN/cm^2) \quad (13)$$

A tensão normal devida à flexão é dada pela Equação 14.

$$\sigma_x = \frac{M}{I_c} \cdot y_i = \frac{1250 pp}{(20 \cdot 20^3)/12} \cdot 10 = 0,9375 pp \quad (kN/cm^2) \quad (14)$$

Por sua vez, a tensão principal  $\sigma_1$  é encontrada então pela Equação 15.

$$\sigma_1 = (0,9375 pp/2) + \sqrt{(0,9375 pp/2)^2 + (T/1664)^2} \quad (kN/cm^2) \quad (15)$$

E a direção principal do ângulo  $\theta_p$  é finalmente calculada através da Equação 16.

$$tg 2\theta_p = (2T/1664) \cdot (1/0,9375 pp) = (T/780 pp) \quad (16)$$

Em toda a análise deve-se notar que a fissuração ocorre quando  $\sigma_1 > f_{ct}$ .

As Tabelas 8 e 9 apresentam os valores das tensões de cisalhamento, tensões principais de tração e planos principais para as seções SA e SB de cada corpo de prova das vigas.

Ao serem observados os coletados nos ensaios de compressão diametral, pode-se notar que o valor da tensão principal  $\sigma_1$  (Tabela 8 e 9) é aproximadamente 2,6 vezes maior que a resistência média à tração do concreto ( $f_{ct,m}$  da Tabela 5) dos CP's com 1% de fibra de polipropileno, 2,4 vezes maior que o  $f_{ct,m}$  dos CP's de 3% de fibra de polipropileno, 2,7 vezes maior que o  $f_{ct,m}$  dos CP's de 1% de fibra de aço e 2,5 vezes maior que o  $f_{ct,m}$  dos CP's de 3% de fibra de aço.

**Tabela 8** – Tensões de cisalhamento, de tração e planos principais para as fibras de polipropileno

Tipo de Concreto	CP	Peso próprio (kN/cm)	Seção SA					
			Calculado com $T_{máx}$			Calculado com $T_{pós-fissura}$		
			$\tau_{xy}$	$\sigma_1$	$\theta_p$	$\tau_{xy}$	$\sigma_1$	$\theta_p$
			(MPa)			°		
1% de fibras de polipropileno	CP-1	0,0094909	11,6	11,6	45	3,3	3,3	45
	CP-2	0,0094864	11,2	11,2	45	4,4	4,4	45
	CP-3	0,0095136	11,9	11,9	45	3,0	3,0	45
	<b>MÉDIA</b>	<b>0,0094970</b>	<b>11,6</b>	<b>11,6</b>	<b>45</b>	<b>3,6</b>	<b>3,6</b>	<b>45</b>
3% de fibras de polipropileno	CP-1	0,0094591	10,7	10,7	45	5,9	5,9	45
	CP-2	0,0095409	11,5	11,5	45	7,6	7,6	45
	CP-3	0,0092864	11,1	11,1	45	5,6	5,6	45
	<b>MÉDIA</b>	<b>0,0094677</b>	<b>11,1</b>	<b>11,1</b>	<b>45</b>	<b>6,4</b>	<b>6,4</b>	<b>45</b>
Tipo de Concreto	CP	Peso próprio (kN/cm)	Seção SB					
			Calculado com $T_{máx}$			Calculado com $T_{pós-fissura}$		
			$\tau_{xy}$	$\sigma_1$	$\theta_p$	$\tau_{xy}$	$\sigma_1$	$\theta_p$
			(MPa)			°		
1% de fibras de polipropileno	CP-1	0,0094909	11,6	11,6	44,89	3,2	3,3	44,61
	CP-2	0,0094864	11,2	11,2	44,89	4,4	4,4	44,71
	CP-3	0,0095136	11,9	11,9	44,89	3,0	3,0	44,57
	<b>MÉDIA</b>	<b>0,0094970</b>	<b>11,5</b>	<b>11,6</b>	<b>44,89</b>	<b>3,5</b>	<b>3,6</b>	<b>44,64</b>
3% de fibras de polipropileno	CP-1	0,0094591	10,7	10,8	44,88	5,9	6,0	44,79
	CP-2	0,0095409	11,5	11,6	44,89	7,6	7,6	44,83
	CP-3	0,0092864	11,1	11,1	44,89	5,6	5,6	44,78
	<b>MÉDIA</b>	<b>0,0094677</b>	<b>11,1</b>	<b>11,1</b>	<b>44,89</b>	<b>6,4</b>	<b>6,4</b>	<b>44,80</b>

No ensaio de tração por compressão diametral foi verificado que a adição de fibras de polipropileno no concreto não altera significativamente a resistência à tração do concreto, como esperado. Esta observação é confirmada pelo fato do  $f_{ct,m}$  dos CP's com 1% de fibra de polipropileno ter resultado em 4,43 MPa, e o  $f_{ct,m}$  dos CP's com 3% de fibras de polipropileno

resultou em 4,64 MPa, conforme a Tabela 5. Já para as fibras de aço, nos CP's com 1% o  $f_{ct,m}$  foi de 3,87 MPa e para os CP's com 3% de fibra o  $f_{ct,m}$  foi de 4,63 MPa.

Ainda observando os resultados dos ensaios de tração por compressão diametral o aumento verificado na resistência à tração na adição de fibras de aço de 1% para 3% não pode ser atribuído exclusivamente às fibras, já que variações como estas são esperadas entre as diferentes betonadas sabendo-se que o concreto é um material extremamente sensível a inúmeras variáveis que podem originar estas diferenças.

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, o cálculo de estimativa da resistência média à tração do concreto ( $f_{ct,m}$ ) é determinado pelas Equações 17 e 18 para concretos com  $f_{ck}$  entre 20 e 50 MPa e entre 50 e 90 MPa, respectivamente.

$$f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3} \quad (17)$$

$$f_{ct,m} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot f_{ck}) \quad (18)$$

**Tabela 9** – Tensões de cisalhamento, de tração e planos principais para as fibras de aço

Tipo de Concreto	CP	Peso próprio (kN/cm)	Seção SA					
			Calculado com $T_{máx}$			Calculado com $T_{pós-fissura}$		
			$\tau_{xy}$	$\sigma_1$	$\theta_p$	$\tau_{xy}$	$\sigma_1$	$\theta_p$
			(MPa)					
1% de fibras de aço	CP-1	0,0095136	11,2	11,2	45	3,3	3,3	45
	CP-2	0,0095545	11,0	11,0	45	1,5	1,5	45
	CP-3	0,0093545	10,1	10,1	45	4,7	4,7	45
	<b>MÉDIA</b>	<b>0,0094745</b>	<b>10,7</b>	<b>10,7</b>	<b>45</b>	<b>3,2</b>	<b>3,2</b>	<b>45</b>
3% de fibras de aço	CP-1	0,0095636	12,0	12,0	45	3,4	3,4	45
	CP-2	0,0095364	10,8	10,8	45	5,2	5,2	45
	CP-3	0,0095227	11,4	11,4	45	2,5	2,5	45
	<b>MÉDIA</b>	<b>0,0095409</b>	<b>11,4</b>	<b>11,4</b>	<b>45</b>	<b>3,7</b>	<b>3,7</b>	<b>45</b>
Tipo de Concreto	CP	Peso próprio (kN/cm)	Seção SB					
			Calculado com $T_{máx}$			Calculado com $T_{pós-fissura}$		
			$\tau_{xy}$	$\sigma_1$	$\theta_p$	$\tau_{xy}$	$\sigma_1$	$\theta_p$
			(MPa)					
1% de fibras de aço	CP-1	0,0095136	11,2	11,2	44,88	3,2	3,3	44,60
	CP-2	0,0095545	11,0	11,0	44,88	1,5	1,5	44,14
	CP-3	0,0093545	10,1	10,1	44,88	4,7	4,7	44,72
	<b>MÉDIA</b>	<b>0,0094745</b>	<b>10,7</b>	<b>10,8</b>	<b>44,88</b>	<b>3,1</b>	<b>3,2</b>	<b>44,48</b>
3% de fibras de aço	CP-1	0,0095636	12,0	12,0	44,89	3,4	3,4	44,62
	CP-2	0,0095364	10,7	10,8	44,88	5,2	5,2	44,75
	CP-3	0,0095227	11,4	11,5	44,89	2,5	2,5	44,48
	<b>MÉDIA</b>	<b>0,0095091</b>	<b>11,4</b>	<b>11,4</b>	<b>44,89</b>	<b>3,7</b>	<b>3,7</b>	<b>44,62</b>

Na Tabela 10 está a comparação dos valores de  $f_{ct,m}$  da ABNT NBR 6118: 2014 e do  $f_{ct,m}$  encontrado nos ensaios (Tabela 5). Comparando os valores de  $f_{ct,m}$  da Tabela 9, os valores do  $f_{ct,m}$  resultantes dos ensaios está bem próxima dos valores estimados da ABNT NBR 6118:2014 com os respectivos  $f_{ck}$  dos concretos demonstrando uma boa coerência das expressões normativas.

No ensaio de compressão simples, a resistência característica do concreto à compressão ( $f_{ck}$ ) está de acordo com o que era esperado. Também foi verificado que a adição de fibras de polipropileno no concreto não altera significativamente a resistência característica à compressão do concreto, já que o  $f_{ck}$  dos CP's com 1% de fibra de polipropileno resultou em 47,72 MPa, e o  $f_{ck}$  dos CP's com 3% de fibras de polipropileno resultou em 47,63 MPa, conforme a Tabela 4. Também para as fibras de aço o  $f_{ck}$  com 1% de fibras foi de 57,42 MPa e o  $f_{ck}$  com 3% de fibras foi de 51,19 MPa. A notada diferença entre o  $f_{ck}$  do concreto com as fibras de aço com 1% e 3% pode novamente ser atribuído a fatores externos que influenciam o concreto, mas também pode ser destacada uma provável deficiência de adensamento provocada pela maior concentração de fibras. Entretanto, é temerário fechar a questão com um número reduzido de corpos de prova e de dosagens.

**Tabela 10** – Comparação dos valores de  $f_{ct,m}$

Tipo de concreto	$f_{ct,m}$ dos ensaios	$f_{ct,m}$ da ABNT NBR 6118:2014
	(MPa)	(MPa)
1% de fibras de polipropileno	4,43	3,95 (12% menor)
3% de fibras de polipropileno	4,64	3,94 (18% menor)
1% de fibras de aço	3,87	4,22 (8% maior)
3% de fibras de aço	4,63	4,01 (15% menor)

$f_{ct,m}$  – Resistência média à tração do concreto.

Por meio dos ensaios de torção foi analisado que quanto maior a concentração de fibras no concreto, maior será a tensão residual na pós-fissuração, pois o momento torçor resistido na pós-fissuração é pelas fibras que estão costurando a matriz do concreto. Como informado na Tabela 7, o momento torçor residual médio após a primeira fissura para as fibras de polipropileno nos CP's de 3% é 1,80 vezes maior que o momento torçor residual médio nos CP's de 1%. Já para os CP's com a fibra de aço este mesmo número é de apenas 1,17. A menor resistência residual nas fibras de aço é explicada pela densidade da fibra. Como a dosagem foi feita com uma porcentagem de fibra em relação à massa de cimento, as fibras de aço, que possuem densidade muito maior que as fibras de polipropileno, apresentam um menor número de fibras no volume total da massa de concreto. Assim, as fibras de polipropileno em maior quantidade na matriz tenderam a “costurar” melhor as fissuras nos modelos ensaiados.

Tendo em vista o que foi constatado no último parágrafo, um passo interessante para pesquisas futuras é o estudo de peças de CRF que possuam mesma densidade volumétrica de fibras na matriz do concreto, mesmo sendo de diferentes densidades e propriedades como as fibras de aço e polipropileno.

Na seção SA das vigas, o cisalhamento é puro, portanto, o  $\theta_p$  é 45° (Tabelas 8 e 9). Já na seção SB o cisalhamento não é puro devido à pequena perturbação por conta da tensão normal  $\sigma_x$ , portanto, o ângulo  $\theta_p$  não é exatamente 45°.

Observando a Figura 4, pode-se perceber exatamente a inclinação do ângulo de 45° ou um ângulo muito próximo nas vigas de concreto, confirmando a teoria do estado de cisalhamento puro e na seção SB cisalhamento quase puro.

Como na seção SA o cisalhamento é puro, então, o módulo de tensão de cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ) é igual ao módulo da tensão principal ( $\sigma_1$ ). Por outro lado, na seção SB o cisalhamento não é puro, portanto, existe uma pequena perturbação, mas muito próxima do módulo da tensão principal.

O comportamento das fibras na ruptura não foi o comportamento que a literatura apresenta a respeito do concreto armado com a fissura tipo parafuso na peça de fora a fora. A peça com adição de fibras rompe em uma única seção a 45° onde se concentram as grandes

fissuras, como ilustrado na Figura 6. Entretanto o plano de ruptura desta fissura segue um padrão de superfície helicoidal.

Observando os gráficos da Figura 3, pode-se perceber que o ponto de pico é o momento torçor máximo que indica a primeira fissura, o platô onde estabiliza as cargas é onde os momentos são resistidos pelas fibras. Uma viga sem fibras teria uma queda vertical nestes diagramas após a formação da primeira fissura. Percebe-se que em nenhum modelo o número de fibras foi suficiente para que o momento torçor pós-fissura voltasse ao patamar máximo na iminência da fissura ou ultrapassasse este valor. Entretanto, acredita-se que com teores maiores de fibras, respeitando-se o adensamento do concreto, o momento torçor resistente pós-fissura possa ultrapassar o valor do momento torçor no momento da primeira fissura.

Os valores médios das Tabelas 8 e 9 para a tensão  $\sigma_1$  correspondentes aos momentos torçores máximos com 1% e 3% de fibras de polipropileno ou de aço, possuem valores bem aproximados. Já para os momentos torçores pós fissura nas vigas com fibras de polipropileno, a tensão  $\sigma_1$  da viga com 3% de fibras é 1,80 vezes maior que a tensão  $\sigma_1$  da viga com 1% de fibras. Nas vigas com fibras de aço, a tensão  $\sigma_1$  da viga com 3% de fibras é 1,16 vezes maior que a tensão  $\sigma_1$  da viga com 1% de fibras. Ambos os resultados indicam que quanto maior for a densidade de fibras, maior será a tensão  $\sigma_1$ . Todavia, novamente o acréscimo de resistência menor nas vigas com fibras de aço é explicado pela menor concentração volumétrica de fibras de aço em relação a fibras de polipropileno devido a densidade das fibras de aço ser maior que a das fibras de polipropileno e o traço ter sido definido em massa e não em volume.

Destaca-se que o ensaio de torção realizado pode ser utilizado como um ensaio de determinação indireta da resistência à tração do concreto, apesar de ser mais complexo com maior dificuldade de execução.

## 7 Considerações finais

Este trabalho teve como finalidade estudar o comportamento e resistência de vigas com adição de fibras de polipropileno e de aço solicitadas à torção. Mediante os resultados apresentados conclui-se que a adição de fibras, na proporção certa, garante uma boa resistência à torção após a fissuração do concreto, podendo inclusive ser uma alternativa à armadura convencional.

Um ponto que merece destaque é o da quantidade de fibras de aço em relação à massa de cimento. Pelo fato da densidade do aço ser alta, o volume de fibras na matriz (mesmo com 3% da massa de cimento) ainda é baixo. A aplicação de teores maiores de fibras é imperativo para que a resistência à torção pós fissuração do concreto seja maximizada e mais significativa.

Além disso, conclui-se também que nas vigas com presença de fibras as fissuras não se propagam por toda a peça, aparecendo praticamente em apenas uma seção gerando uma superfície de ruptura helicoidal. As fibras também contribuem para que a peça tenha um comportamento mais dúctil.

Sugere-se que no futuro a pesquisa de vigas de concreto com fibras solicitadas à torção seja expandida para outras geometrias de vigas, outros teores de fibras e outros tipos de fibras.

## Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 5739**: Concreto – Ensaio de Compressão de corpos-de-prova cilíndricos. Rio de Janeiro: ABNT, 2018.
- \_\_\_\_\_. **NBR 7222**: Concreto – Determinação da Resistência à Tração por Compressão Diametral de corpos-de-prova cilíndricos. Rio de Janeiro: ABNT, 2011.

\_\_\_\_\_. **NBR 5738**: Concreto – Procedimento para Moldagem e Cura de corpos-de-prova. Rio de Janeiro: ABNT, 2015.

\_\_\_\_\_. **NBR 6118**: Projeto e execução de obras de concreto armado. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

ARAÚJO, J. M. de. **Curso de concreto armado**: Volume 4. 3. ed. Rio Grande: Dunas, 2010. 319 p.

BASTOS, P. S. **Torção em vigas de concreto armado**, julho de 2015. 111 f. Notas de aula. Impresso.

BEER, F. P.; JHONSTON, E. R. **Resistência dos materiais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1995. 1255 p.

CHAN, S. Y. N., FENG, N. Q., TSANG, M. K. C. Durability of high-strength concrete incorporating carrier fluidifying agent, **Mag. Concr. Res.** 52 (2009) 235–242.

DOBBIN Jr., E. S.; ROCHA, L. F. **Estudo de concreto com adição de fibra de polipropileno para controle da fissuração**. Belém, 2011. Dissertação (Bacharelado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade da Amazônia.

FAROOQ, H., USMAN, M., MEHMOOD, K., MALIK, M. S., HANIF, A. Effect of steel confinement on axially loaded short concrete columns, **IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.** 414 (2018).

FIGUEIREDO, A. D.; TANESI, J.; NINCE, A. A. Concreto com fibras de polipropileno. **Revista Técnica**, São Paulo, Setembro de 2002. Disponível em: <<http://techne.pini.com.br/engenharia-civil/66/artigo287241-1.aspx>>. Acesso em: 7 de junho de 2016.

FIGUEIREDO, A. D. **Concreto reforçado com fibras**. São Paulo, 2011. 248 f.. Tese (Livre-docência) - Departamento de Engenharia de Construção Civil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto**: Solicitações tangenciais. São Paulo: Pini, 2008. 328 p.

FRANCO, B. L. **Aço em obras de concreto: A tecnologia do concreto reforçado com fibras de aço**. Maccaferri do Brasil Ltda, Jundiaí, SP, p.13–18, 2011. Disponível em: <<http://www.maccaferri.com.br/produtos/fibras/>>. Acesso em: 01/03/2016.

GRZYBOWSKI, M., SHAH, S. P. Shrinkage cracking of fiber reinforced concrete, **ACI Mater. J.** 87 (1990).

HANIF, A., PARTHASARATHY, P., LU, Z., SUN, M., LI, Z. Fiber-reinforced cementitious composites incorporating glass cenospheres – Mechanical properties and microstructure, **Constr. Build. Mater.** 154 (2017) 529–538.

LIM, J. C., OZBAKKALOGLU, T. Confinement model for FRP-confined high-strength concrete, **J. Compos. Constr.** 18 (2013) 04013058.

SALVADOR, R. P. **Análise comparativa de métodos de ensaio para caracterização do comportamento mecânico de concreto reforçado com fibras**. São Paulo, 2013. 178 f.. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Construção Civil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

THOMAZ, E. C. **Concreto reforçado com fibras**: Mito e Realidade, 2012. 13f. Notas de aula. Mimeografado.

THIMOSHENKO, S. **Resistência dos Materiais**. v1. Rio de Janeiro: LTC, 1976.