
**ANÁLISE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS COM A FORMULAÇÃO
CORROTACIONAL DE ELEMENTOS FINITOS E DIFERENTES MEDIDAS DE
DEFORMAÇÕES**

***NONLINEAR ANALYSIS OF TRUSSES WITH THE CO-ROTATIONAL
FORMULATION OF FINITE ELEMENTS AND DIFFERENT STRAIN MEASURES***

João Pedro de Lima Miyazaki ¹
Luiz Antonio Farani de Souza ²
Carlos Humberto Martins ¹

Resumo: Trelças quando submetidas a grandes carregamentos em seus nós apresentam não linearidade geométrica, que ocorre quando a relação entre deslocamento e deformação não é mais linear. Em geral, na análise não linear geométrica são utilizadas três tipos de descrições cinemáticas - Lagrangiana total, Lagrangiana atualizada e Corrotacional. Neste artigo, é utilizada a formulação Corrotacional de Elementos Finitos para a discretização de trelças planas. Há várias medidas de deformação que podem ser utilizadas nessa formulação, dentre elas as deformações de Engenharia, Green-Lagrange, Biot e Almansi. As trajetórias de equilíbrio de problemas de trelças são obtidas para essas medidas de deformação. O sistema de equações não lineares é solucionado pelo procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson padrão associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. A formulação corrotacional (vetor de forças internas e a matriz de rigidez) e o pseudocódigo do algoritmo são apresentados. As simulações são realizadas com o *software* livre Scilab. Os resultados numéricos mostram que no caso de deformações finitas a resposta da estrutura pode diferir em função da medida de deformação adotada na formulação de Elementos Finitos.

Palavras-chaves: Trelça plana, Análise não linear, Comprimento de Arco, Medidas de Deformação.

Abstract: Trusses when subjected to large loads in their nodes present geometric non-linearity, which occurs when the relation between displacement and strain are no longer linear. In general, in geometric nonlinear analysis three types of kinematic descriptions are used - Total Lagrangian, Updated Lagrangian and Co-rotational. In this paper, the Co-rotational Finite Element formulation is used for the discretization of plane trusses. There are several strain measures that can be used in this formulation, among them the strains of Engineering, Green-Lagrange, Biot and Almansi. The equilibrium paths of truss problems are obtained for these strain measures. The co-rotational formulation (internal forces vector and the stiffness matrix) and the pseudo-code of the algorithm are presented. The simulations are carry out with the free software Scilab. The numerical results show that in the case of finite deformations, the structure response may differ depending on the strain measure adopted in the Finite Element formulation.

Keywords: Plane truss, Nonlinear analysis, Arc-Length, Strain measures.

¹ Universidade Estadual de Maringá, Campus Maringá – Brasil, email:
joao.miyazaki@hotmail.com, chmartins@uem.br

² Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Apucarana – Brasil, email:
lasouza@ufpr.edu.br

1 Introdução

Atualmente tem se buscado estruturas mais leves e esbeltas, resultando em estruturas com um maior grau de complexidade. Em muitos desses casos, a teoria da elasticidade linear não representa corretamente o comportamento dessas estruturas, sendo necessário utilizar uma análise não linear, a qual mais se aproxima do comportamento real da estrutura. Os dois principais tipos de não linearidade são a física e a geométrica. A não linearidade geométrica ocorre quando o sistema sofre grandes deslocamentos ou deformações, e a configuração inicial do elemento não pode mais ser utilizada nas equações de equilíbrio, causando perda de linearidade nas relações de deslocamento e deformação. A não linearidade física ocorre quando as leis constitutivas dos materiais não são mais lineares (LACERDA; MACIEL; SCUDELARI, 2013).

Treliças quando são submetidas a grandes cargas em seus nós apresentam não linearidade geométrica. A principal maneira de estudar o comportamento dessas estruturas é a partir da trajetória de equilíbrio do elemento, que consiste em uma curva de carga por deslocamento em um ponto da estrutura. As trajetórias de equilíbrio possuem pontos limites ou críticos, dentre esses pontos destacam-se os pontos limites de carga e deslocamento e o ponto de bifurcação (MATIAS et al., 2002). Nos pontos críticos, a estrutura se torna instável e, devido a isso, esses pontos devem ser determinados. A Figura 1 mostra os principais pontos críticos de uma trajetória de equilíbrio. Nessa figura, o ponto (L) representa ponto limite de força, (B) representa ponto de bifurcação, (V) representa ponto limite de deslocamento e (F) representa ponto de falha (LACERDA, 2014).

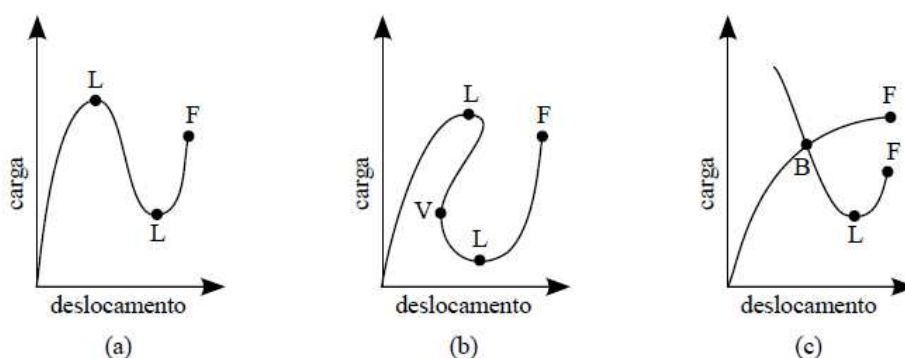


Figura 1. Trajetórias de equilíbrio com pontos limites: (a) *Snap-through*; (b) *Snap-back*; e (c) Bifurcação

Fonte: Lacerda (2014)

Quando se atinge um ponto de limite na trajetória de equilíbrio, a estrutura se torna instável e ocorre um salto repentino entre dois pontos limites. Na Figura 1, a curva (a) mostra o fenômeno *snap-through*, que representa um ponto limite em relação à carga, enquanto que a curva (b) representa o *snap-back*, que é um ponto limite em relação ao deslocamento. A curva (c) representa um ponto de bifurcação.

A solução do problema estrutural não linear por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) envolve a resolução de um sistema de equações não lineares. A solução consiste em determinar a condição de equilíbrio de uma estrutura que está sob ação de cargas aplicadas, e essa condição é expressada matematicamente pelo seguinte sistema (MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2014):

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

na qual $\mathbf{g}$ representa o vetor de forças desequilibradas, $\mathbf{F}_r$ representa o vetor de forças externas, $\mathbf{F}_{int}$ representa o vetor de forças internas, que é função dos deslocamentos nodais ($\mathbf{u}$) da estrutura, e λ representa o parâmetro de carga. Um dos métodos numéricos mais utilizados para a solução desse sistema é o método de Newton-Raphson (NR). A partir desse método é possível obter a trajetória de equilíbrio, e cada ponto sobre a trajetória representa uma condição de equilíbrio da estrutura.

Ao se utilizar o procedimento iterativo e incremental de Newton-Raphson na forma tradicional, o parâmetro de carga λ é mantido constante, e na determinação da trajetória de equilíbrio ocorrerão problemas de convergência entre os pontos críticos, não sendo possível traçar os saltos que ocorrem entre os mesmos. Técnicas de continuação associadas ao método NR são utilizadas na determinação da trajetória completa de equilíbrio, sendo que essas técnicas permitem a variação do parâmetro de carga λ a cada iteração.

Há uma grande quantidade de técnicas de continuação que podem ser combinadas com o método de NR para solução de problemas não lineares de estruturas, podendo-se destacar: Deslocamento Constante (BATOZ; DHATT, 1979), Trabalho Externo Constante (POWELL; SIMONS, 1981), Comprimento de Arco (RIKS, 1972; RIKS, 1979; RAMM, 1981; CRISFIELD, 1981); Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais (CHAN, 1988), Norma Mínima das Forças Desequilibradas (BERGAN et al., 1978), Resíduo Ortogonal (KRENK; HEDEDAL, 1995) e Controle de Deslocamento Generalizado (YANG; KUO, 1994).

Em uma análise não linear geométrica por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), usualmente são utilizados três tipos de descrições cinemáticas para sua formulação: a descrição Lagrangiana Total (LT); a descrição Lagrangiana Atualizada (LA); e a descrição corrotacional (CR).

Na descrição LT, o MEF é determinado a partir da configuração inicial ou indeformada do elemento. Na descrição LA, o MEF é formulado a partir da última condição de equilíbrio atingida, ou seja, a configuração de referência é atualizada a cada incremento. Para treliças com pequenas deformações, os resultados obtidos com a descrição LT e LA são idênticos.

A formulação corrotacional (CR) é feita separando os movimentos de corpo rígido (translações e rotações) e os movimentos deformacionais da estrutura, logo, a descrição CR é definida em relação a dois sistemas, uma configuração que permanece fixa ao longo do processo e determina os deslocamentos de corpo rígido, e outra configuração que determina os deslocamentos deformacionais (MENIN, 2006; BORST et al., 2012).

Na formulação do MEF, podem ser utilizadas diferentes medidas de deformação. Dentre as medidas de deformação, destacam-se a de Engenharia, Green-Lagrange, Biot e Almansi. As medidas de deformação de Engenharia e de Green-Lagrange são descritas em coordenadas materiais, e as medidas de deformação de Biot e de Almansi são descritas em coordenadas espaciais (CRISFIELD, 1981).

A deformação de Engenharia (ϵ_E) é calculada pela equação (BONET; WOOD, 2008):

$$\epsilon_E = \frac{\Delta L}{L_0}, \quad (2)$$

na qual $\Delta L = L - L_0$ é o alongamento, L é o comprimento deformado da barra e L_0 é o comprimento indeformado (comprimento inicial) da barra. A deformação de Green-Lagrange (ϵ_G) é calculada conforme a Equação (3). Esse tipo de deformação pode ser utilizado em estruturas com grandes deslocamentos e pequenas deformações (LACERDA, 2014).

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}. \quad (3)$$

A deformação de Almansi (ε_A) é calculada de maneira similar à deformação de Green-Lagrange, enquanto que esta é determinada em relação à configuração indeformada, e aquela é determinada em relação à configuração deformada. A expressão para a deformação de Almansi é dada por (BONET; WOOD, 2008):

$$\varepsilon_A = \frac{L^2 - L_0^2}{2L^2}. \quad (4)$$

A deformação de Biot (ε_B) é calculada pela seguinte expressão (MENIN; SILVA, 2003):

$$\varepsilon_B = \frac{\Delta L}{L}. \quad (5)$$

O emprego de distintas medidas de deformação na formulação de Elementos Finitos para a análise de estabilidade de treliças foi objeto de estudo de diversos pesquisadores. A deformação de Engenharia, por exemplo, foi utilizada na formulação apresentada por Greco e Ventuni (2006) e Yaw (2009), e a deformação de Green-Lagrange foi utilizada por Koohestani (2013).

Também, as medidas de deformação foram comparadas em análises não lineares geométricas de treliças planas e espaciais. Utilizando o Método Posicional de Elementos Finitos (LACERDA; MACIEL; SCUDELARI, 2013; LACERDA, 2014) e o Método Corrotacional de Elementos Finitos (MENIN; SILVA, 2003; MENIN, 2006), foi observado que a resposta de uma estrutura em regime de deformações finitas pode diferir em função da deformação adotada na formulação.

Paula e Proença (2000) utilizaram a descrição cinemática Lagrangeana Total para a análise não linear de treliças planas comparando as deformações de Engenharia e de Green-Lagrange, e concluíram que um estudo coerente deve procurar relacionar de forma consistente as medidas de deformação e de tensão, que deverão ser conjugadas.

Tolentino e Souza (2019), por meio de análise linear com a formulação Posicional de Elementos Finitos e com o programa Ftool, compararam diferentes medidas de deformação a partir de uma barra carregada axialmente à tração. Esses autores mostraram que, para pequenas intensidades de carga, a diferença dos alongamentos na barra é pequena independentemente da deformação adotada, contudo, com o aumento do carregamento os resultados numéricos diferiram de maneira considerável.

Neste artigo é apresentado um modelo numérico-computacional para análise não linear geométrica de treliças planas, por meio da formulação Corrotacional de Elementos Finitos, utilizando as medidas de deformação de Engenharia, Green-Lagrange, Biot e Almansi. O vetor de forças internas e a matriz de rigidez para o elemento de treliça plana em função de cada deformação são apresentados. O sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural é solucionado pelo procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson padrão associado à técnica de Comprimento de Arco Linear, e o pseudocódigo do algoritmo é apresentado.

As simulações são realizadas com o *software* livre Scilab, versão 6.1.0 (SCILAB, 2020). As trajetórias de equilíbrio de estruturas encontradas na literatura são obtidas. Os resultados numéricos mostram que para deformações infinitesimais a resposta da estrutura

coincide independentemente da medida de deformação utilizada na formulação, entretanto, no caso de deformações finitas a resposta pode diferir.

2 Formulação corrotacional de Elementos Finitos para as diferentes medidas de deformação

A formulação corrotacional de Elementos Finitos para treliças planas utilizando as deformações de Engenharia, Green-Lagrange, Biot e Almansi é apresentada nesta seção. A matriz de rigidez elementar ($\mathbf{K}_{ele}$) é dada por (MENIN, 2006; YAW, 2009):

$$\mathbf{K}_{ele} = \mathbf{R}^T (\mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G) \mathbf{R}, \quad (6)$$

na qual $\mathbf{K}_M$ é a matriz de rigidez material do elemento finito, $\mathbf{K}_G$ é matriz de rigidez geométrica e $\mathbf{R}$ é a matriz de transformação de coordenadas locais para globais, que é dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}, \quad (7)$$

na qual c denota $\cos(\theta)$ e s $\sin(\theta)$, sendo θ o ângulo de rotação do elemento de treliça com relação ao sistema de coordenadas globais.

2.1 Formulação corrotacional de Elementos Finitos utilizando a deformação de Engenharia

A Matriz de rigidez material ($\mathbf{K}_M$) para treliças utilizando a deformação de Engenharia é dada por:

$$\mathbf{K}_M = \frac{EA}{L_0} \mathbf{B}. \quad (8)$$

A Matriz de rigidez geométrica ($\mathbf{K}_G$) é dada por:

$$\mathbf{K}_G = EA \varepsilon_E \mathbf{C}, \quad (9)$$

na qual A representa a área da seção transversal, E o módulo de elasticidade longitudinal e L_0 o comprimento inicial da barra. As matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são determinadas por, respectivamente:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

em que $\mathbf{I}_2$ é a matriz identidade de ordem 2 e L é comprimento deformado da barra. O vetor de força elementar interna ($\mathbf{F}_{elem}$) do elemento é dado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_{elem} = EA \varepsilon_E \mathbf{r}, \quad (12)$$

em que $\mathbf{r}$ é um vetor dado por:

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad c \quad s]^T. \quad (13)$$

2.2 Formulação corrotacional de Elementos Finitos utilizando a deformação de Green-Lagrange

Considerando a deformação de Green-Lagrange (ε_G), as matrizes de rigidez material e geométrica assumem a seguinte forma, respectivamente:

$$\mathbf{K}_M = \frac{EA}{L_0} \left(\frac{3L_0^2}{2L_0^2} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{B}, \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{EA\varepsilon_G L}{L_0} \mathbf{C}. \quad (15)$$

O vetor de força interna elementar é dado por:

$$\mathbf{F}_{\text{elem}} = \frac{EA\varepsilon_G L}{L_0} \mathbf{r}. \quad (16)$$

2.3 Formulação corrotacional de Elementos Finitos utilizando a deformação de Biot

Considerando a deformação de Biot (ε_B), as matrizes de rigidez material e geométrica são determinadas pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$\mathbf{K}_M = \frac{EA}{L} \left(\frac{3L_0^2}{L^2} - \frac{2L_0}{L} \right) \mathbf{B}, \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{EA\varepsilon_B L_0}{L} \mathbf{C}. \quad (18)$$

O vetor de força interna elementar é dado por:

$$\mathbf{F}_{\text{elem}} = \frac{EA\varepsilon_B L_0}{L} \mathbf{r}. \quad (19)$$

2.4 Formulação corrotacional de Elementos Finitos utilizando a deformação de Almansi

Considerando a deformação de Almansi (ε_A), as matrizes de rigidez material e geométrica são dadas pelas seguintes equações, respectivamente:

$$\mathbf{K}_M = \frac{EA}{L} \left(\frac{5L_0^4}{2L^4} - \frac{3L_0^2}{2L^2} \right) \mathbf{B}, \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{EA\varepsilon_A L_0^2}{L^2} \mathbf{C}. \quad (21)$$

O vetor de força interna elementar é dado por:

$$\mathbf{F}_{\text{elem}} = \frac{EA\varepsilon_A L_0^2}{L^2} \mathbf{r}. \quad (22)$$

3 Método de Newton-Raphson associado à técnica de continuação do Comprimento de Arco Linear

Aplicando o esquema iterativo de Newton-Raphson ao sistema na Equação (1), chega-se à seguinte expressão (BATHE, 1996; SOUZA et al., 2018):

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}^{(k-1)}, \quad (23)$$

em que $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}$ é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural (matriz Jacobiana) e $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ é o subincremento de deslocamentos. O superíndice (k-1) indica a iteração anterior e (k) indica a iteração corrente. Os parâmetros totais de força (λ) e do vetor de deslocamentos nodais ($\mathbf{u}$) no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k são atualizados por, respectivamente:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (24)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (25)$$

Com a combinação das Equações (23) e (24), chega-se à expressão para $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ (CRISFIELD, 1991):

$$\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)}, \quad (26)$$

na qual $\delta \lambda^{(k)}$ é o subincremento do parâmetro de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo, e $\delta \mathbf{u}_g^{(k)}$ e $\delta \mathbf{u}_r^{(k)}$ são obtidos, respectivamente, por:

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)}, \quad (27)$$

$$\delta \mathbf{u}_r^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{F}_r. \quad (28)$$

Os parâmetros incrementais do parâmetro de força ($\Delta \lambda$) e do vetor de deslocamentos nodais ($\Delta \mathbf{u}$) no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k são avaliados por, respectivamente:

$$\Delta \lambda^{(k)} = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (29)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (30)$$

A técnica de continuação Comprimento de Arco Linear foi proposta por Riks (1972, 1979), e consiste em manter a trajetória de iteração sempre ortogonal à direção tangente inicial em cada passo. A expressão para o incremento inicial do parâmetro de força (solução predita) é dada por:

$$\Delta \lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}_r\|}, \quad (31)$$

na qual Δl representa o incremento de comprimento de arco. Esse incremento pode ser utilizado como um parâmetro de controle no passo de força corrente de acordo com a expressão:

$$\Delta l = \Delta l^{(0)} \left(\frac{Nd}{t_k} \right)^{0,5}, \quad (32)$$

em que $\Delta l^{(0)}$ é o incremento de comprimento de arco no passo de força inicial, Nd é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, e t_k é o número de iterações que foi necessário para convergir no passo de força anterior.

No processo iterativo subsequente, a equação de restrição usada para calcular $\delta \lambda^{(k)}$ é obtida fazendo com que a solução iterativa ($\delta \mathbf{u}^{(k)}$) seja ortogonal à solução incremental predita ($\Delta \mathbf{u}^{(0)}$):

$$\delta \mathbf{u}^{(k)T} \Delta \mathbf{u}^{(0)} = 0. \quad (33)$$

Com a substituição da Equação (26) na Equação (33), obtém-se a equação para a determinação da correção do subincremento de força ($k > 1$):

$$\delta \lambda^{(k)} = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(0)T} \delta \mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta \mathbf{u}^{(0)T} \delta \mathbf{u}_r^{(k)}}. \quad (34)$$

O sinal do incremento de carga pode ser positivo ou negativo, e a determinação desse sinal é de vital importância para que a trajetória de equilíbrio seja traçada corretamente. O sinal é determinado a partir do produto interno entre o incremento de deslocamento obtido no passo de carga anterior e o subincremento de deslocamento inicial do passo de carga corrente:

$$t \Delta \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_r^{(0)} < 0. \quad (35)$$

Se a desigualdade for verdadeira em (35), $\Delta \lambda^{(0)} \leftarrow -\Delta \lambda^{(0)}$. O critério de convergência adotado para cada passo de carga é expresso pela norma da força residual e da força total aplicada:

$$\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol} \|\mathbf{F}_r\| \quad (36)$$

na qual $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana e tol é a tolerância fornecida pelo usuário.

3.1 Implementação do código computacional

O programa de elementos finitos para treliças com não linearidade geométrica foi implementado no *software* livre Scilab (SCILAB, 2020). O programa é composto, basicamente, por três partes, que são: entrada de dados (pré-processamento); processamento; e saída de dados (pós-processamento).

No código computacional implementado, são necessários os seguintes dados de entrada para o funcionamento adequado do programa:

- Número total de nós;
- Número total de elementos;
- Número total de graus de liberdade;
- Número total de graus de liberdade restritos, ou seja, a imposição das condições de contorno;
- Coordenadas nodais;

- Incidência de cada barra, ou seja, os nós que formam cada barra;
- Propriedades físicas e geométrica das barras (E , A);
- Tipo do elemento;
- Definição da tolerância (tol) para o critério de convergência;
- Definição do comprimento de arco inicial ($\Delta l^{(0)}$);
- Número de iterações desejadas (Nd) e o número máximo de iterações por passo de carga ($k_{máx}$); esses são elementos que controlam a estratégia da solução incremental adotada;
- Carga incremental ΔP ; e
- Definição do vetor de força externa de referência (F_r).

O processamento do programa corresponde à análise do problema após a inserção dos dados de entrada. O pós-processamento corresponde aos resultados obtidos pelo programa após a análise do problema. Neste código, a saída de dados corresponde à obtenção das trajetórias de equilíbrio por meio do par ordenado (u, λ) obtido a cada passo de carga e armazenado num vetor, e os números totais de passos de carga (NP) e de iterações acumuladas até a convergência para a solução (k_{total}), dada uma tolerância tol . O tempo de processamento em segundos pode ser obtido pelos comandos no Scilab *tic* (inicia o cronômetro) e *toc* (lê o cronômetro em segundos).

Na Figura 2 é apresentado o pseudocódigo do algoritmo implementado no *software* Scilab referente ao método de Newton–Raphson padrão associado à técnica de continuação do Comprimento de Arco Linear. Este código também foi apresentado em Souza et al. (2017).

Entrada: $\Delta l^{(0)}$, $k_{máx}$, Nd , tol , ΔP , $n_{máx}$	14. $\delta u \leftarrow \delta u_g + \delta \lambda \delta u_r$
Saída: u , λ , NP , k_{total}	15. $\Delta u \leftarrow \Delta u + \delta u$
1. $u \leftarrow 0$, $\Delta u \leftarrow 0$, $\lambda \leftarrow 0$, $k_{total} \leftarrow 0$	16. $\Delta \lambda \leftarrow \Delta \lambda + \delta \lambda$
2. Para $NP \leftarrow 1, \dots, n_{máx}$	17. $g \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) F_r - F_{int}(u + \Delta u)$
3. $\delta u_r \leftarrow [K(u)]^{-1} F_r$	18. Se $\ g\ \leq tol \ F_r\ $
4. $\Delta \lambda^{(0)} \leftarrow \Delta l / \ \delta u_r\ $	19. Terminar a execução do Para
5. Se $\Delta u^T \delta u_r < 0$	20. Fim-Se
6. $\Delta \lambda^{(0)} \leftarrow -\Delta \lambda^{(0)}$	21. Calcular $K(u + \Delta u)$
7. Fim-Se	22. $\delta u_r \leftarrow [K(u)]^{-1} F_r$
8. $\Delta u^{(0)} \leftarrow \Delta \lambda \delta u_r$	23. Fim-Para
9. $\Delta u \leftarrow \Delta u^{(0)}$	24. $u \leftarrow u + \Delta u$
10. $g \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda^{(0)}) F_r - F_{int}(u + \Delta u)$	25. $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta \lambda$
11. Para $k \leftarrow 1, \dots, k_{máx}$	26. $\Delta l \leftarrow \Delta l^{(0)} (Nd/k)^{0.5}$
12. $\delta u_g \leftarrow [K(u)]^{-1} g$	27. $k_{total} \leftarrow k_{total} + k$
13. $\delta \lambda \leftarrow -(\Delta u^{(0)T} \delta u_g) / (\Delta u^{(0)T} \delta u_r)$	28. Fim-Para

Figura 2. Pseudocódigo: procedimento incremental-iterativo para o Método de Newton–Raphson associado à técnica Comprimento de Arco Linear.

Fonte: adaptado de Lacerda (2014).

4 Resultados e discussões

Nesta seção serão mostradas as trajetórias de equilíbrio de quatro problemas de treliças planas encontrados na literatura considerando a não linearidade geométrica, e utilizando diferentes medidas de deformação. Nos exemplos numéricos, o peso próprio das estruturas é desprezado nas análises.

4.1 Estrutura com uma barra biarticulada

Menin (2006) em seu trabalho determinou trajetórias de equilíbrio de treliças utilizando diferentes medidas de deformação. Para validação do código computacional, neste primeiro exemplo, os resultados obtidos por esse autor são comparados com os obtidos pelo programa implementado.

Seja a estrutura com apenas uma barra e dois nós, como mostrado na Figura 3. O valor considerado da rigidez axial adimensional é $EA = 5,0 \times 10^7$. Os valores de X e Y são 2500 e 2500, respectivamente. A treliça tem apenas um grau de liberdade na direção do eixo y . As trajetórias de equilíbrio (curvas deslocamento vertical *versus* carga P) no ponto de aplicação da força utilizando as deformações de Engenharia, Almansi, Biot e Green - Lagrange estão apresentadas na Figura 4. Observa-se que as trajetórias possuem dois pontos limites de força (a tangente nesses pontos é paralela ao eixo dos deslocamentos). Os valores dos parâmetros de entrada considerados para o método de solução são: $\Delta l^{(0)} = 110$; $k_{\text{máx}} = 150$; $N_d = 5$; tolerância $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-8}$; e incremento de carga $\Delta P = 1,0$.

Os resultados obtidos ficaram bastante próximos aos obtidos por Menin (2006), validando, assim, o código computacional implementado no *software* Scilab. Verifica-se na Figura 4 que ao se utilizar diferentes medidas de deformação as trajetórias possuem diferenças, sendo que considerando a deformação de Almansi na análise é necessária uma maior força aplicada para causar um mesmo deslocamento, se comparada às demais medidas de deformação.

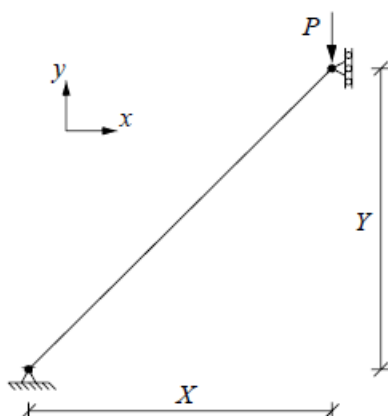


Figura 3. Modelo da estrutura com uma barra biarticulada

Fonte: Menin (2006)

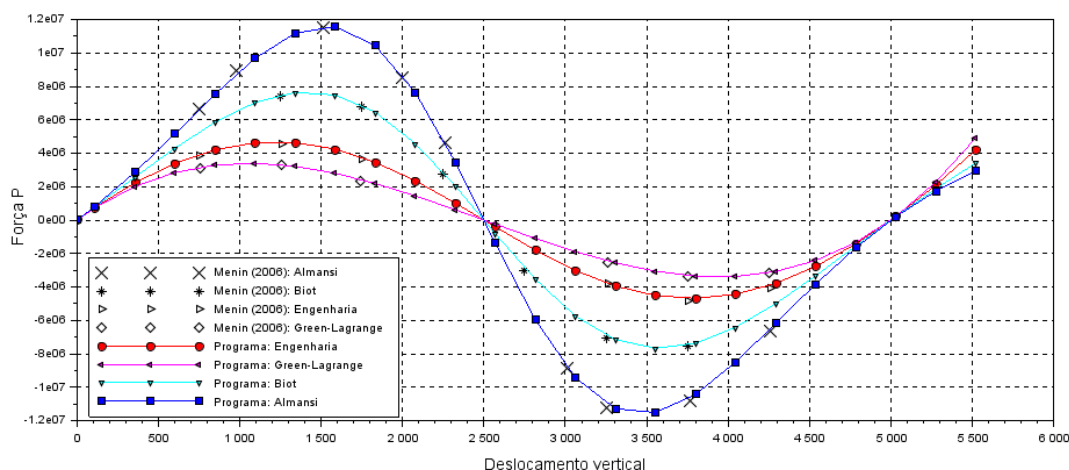


Figura 4. Trajetórias de equilíbrio da estrutura com uma barra biarticulada

Fonte: Próprios autores (2020)

4.2 Estrutura com três barras biarticuladas

Considere o sistema estrutural com três barras biarticuladas sujeita a uma força P no nó 4, conforme é ilustrado na Figura 5. Este problema foi adaptado de Vasios (2015). Considera-se a rigidez axial adimensional das barras $EA = 1,0 \times 10^5$. Essa estrutura tem três graus de liberdade. Os valores dos parâmetros de entrada considerados para o método de solução são: $\Delta l^{(0)} = 50$; $k_{\text{máx}} = 150$; $N_d = 5$; tolerância $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-8}$; e $\Delta P = 1,0$. As trajetórias de equilíbrio (curvas deslocamento vertical no nó 4 *versus* força P) para as quatro medidas de deformação são mostradas na Figura 6.

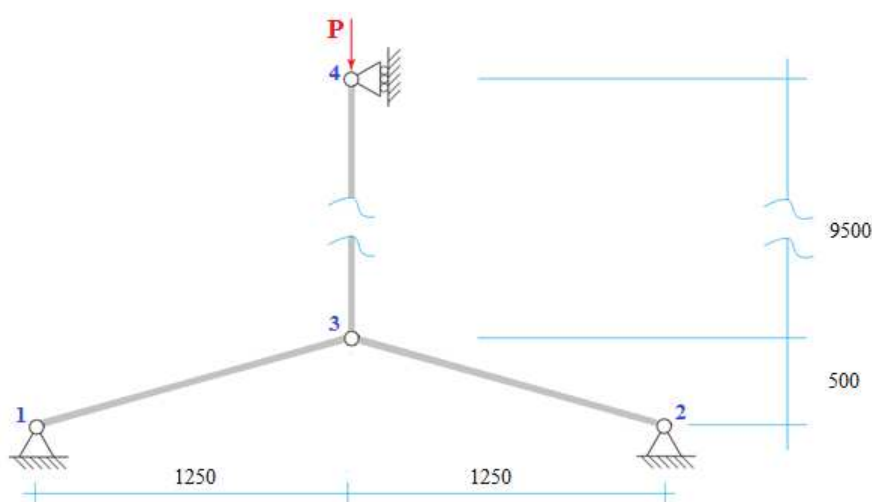


Figura 5. Modelo da estrutura com três barras biarticuladas

Fonte: Adaptada de Vasios (2015)

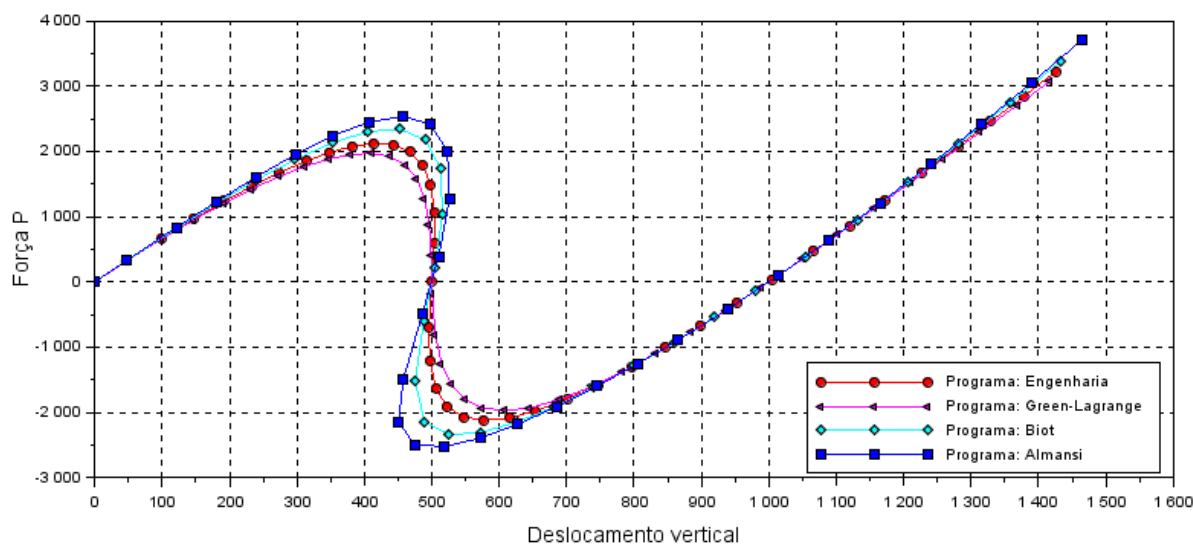


Figura 6. Trajetórias de equilíbrio para a estrutura com três barras biarticuladas

Fonte: Próprios autores (2020)

Vê-se nas trajetórias da Figura 6, que há trechos em que a resposta da estrutura foi semelhante para todas as medidas de deformação; no entanto, houve discrepâncias nas regiões próximas aos pontos limites. Como no exemplo anterior, a estrutura ficou mais rígida quando se considera na formulação a deformação de Almansi.

4.3 Treliça plana com sete nós

Seja a treliça plana com dez barras, cuja geometria e o carregamento são apresentados na Figura 7. As barras têm módulo de elasticidade $E = 50 \text{ GPa}$ e área da seção transversal $A = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Essa estrutura foi estudada por Wriggers, Wagner e Miehe (1988).

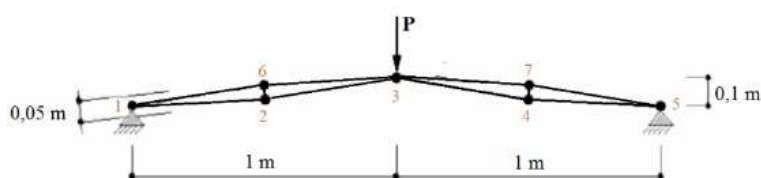


Figura 7. Modelo estrutural da treliça plana com 7 nós

Fonte: Wriggers, Wagner e Miehe (1998)

Na Figura 8 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio da estrutura (curvas deslocamento vertical no nó 3 *versus* força P) obtidas com as quatro medidas de deformação, havendo boa concordância com os resultados obtidos por Wriggers, Wagner e Miehe (1988). Nessa figura, observa-se que as trajetórias são bem semelhantes para todas as medidas de deformação e há dois pontos limites de força. Os parâmetros considerados nas simulações são: $\Delta l^{(0)} = 0,01$; $k_{\text{máx}} = 150$; $N_d = 5$; $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-8}$; e $\Delta P = 100 \text{ N}$.

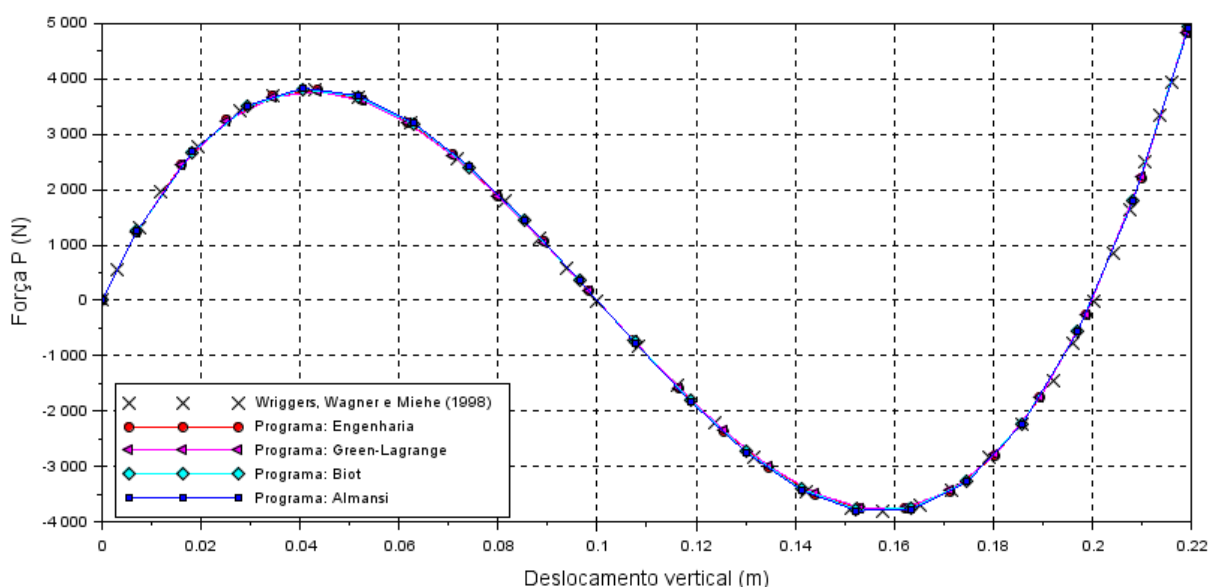


Figura 8. Trajetórias de equilíbrio para a treliça plana com 7 nós

Fonte: Próprios autores (2020)

4.4 Viga treliçada plana em balanço com 42 nós

Este exemplo foi retirado do trabalho de Yaw (2009), e consiste de uma viga treliçada plana em balanço com 42 nós e 81 elementos sujeita a uma força na sua extremidade livre, conforme o modelo estrutural mostrado na Figura 9. A treliça tem comprimento total inicial $L_0 = 10 \text{ in}$ e altura $0,5 \text{ in}$. Para as barras da treliça, foi considerada a rigidez axial $EA = 2,9 \times 10^4 \text{ ksi}$. Na Figura 10 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio (curvas deslocamento vertical no nó 21 *versus* força P) com as medidas de deformação e pontos de equilíbrio

obtidos por Yaw (2009). Os parâmetros considerados nas simulações são: $\Delta l^{(0)} = 2,0$; $k_{\max} = 150$; $N_d = 3$; $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-10}$; e $\Delta P = 1,0$ kip.

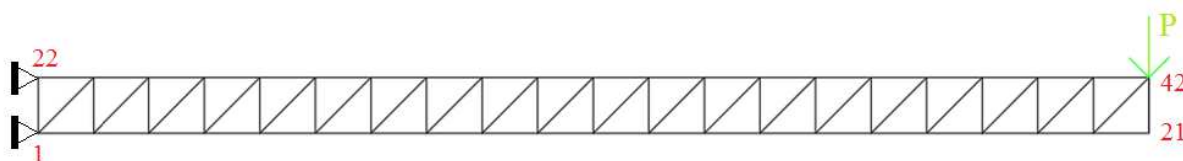


Figura 9. Modelo estrutural da viga treliçada

Fonte: adaptada de Yaw (2009)

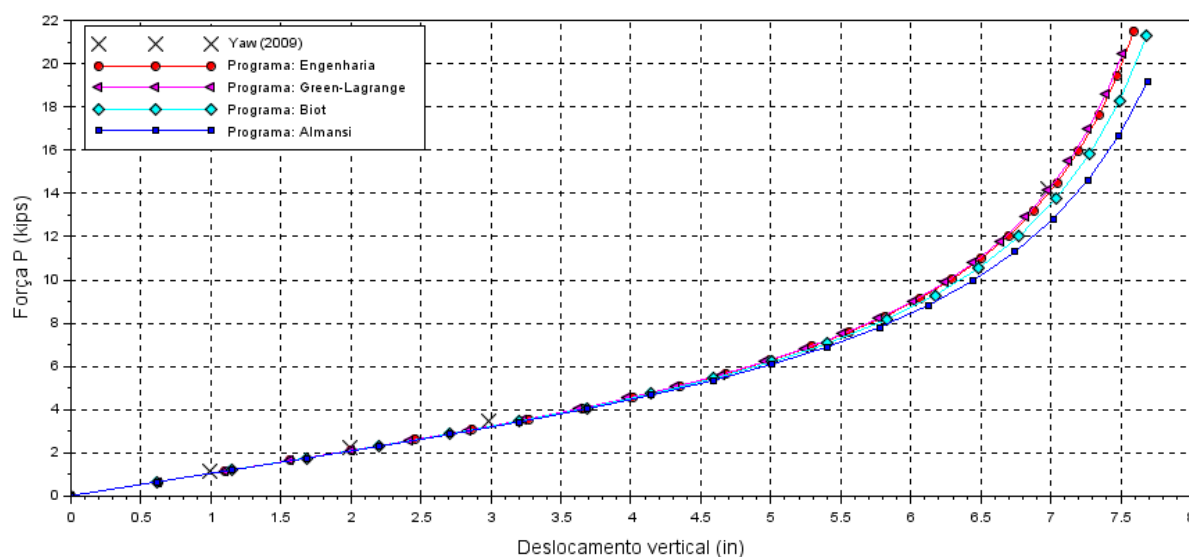


Figura 10. Trajetórias de equilíbrio da viga treliçada

Fonte: Próprios autores (2020)

Observa-se, na Figura 10, que as trajetórias referentes às deformações têm comportamento semelhante para níveis iniciais de carregamento. No entanto, à medida que a intensidade da carga aumenta, as trajetórias com as medidas de deformação de Almansi e Biot diferem das demais medidas.

4.5 Análise dos resultados numéricos

A partir das trajetórias de equilíbrio para as estrutura analisadas, observa-se que todas apresentaram comportamento semelhante para os níveis iniciais de carregamento. Quando as deformações são infinitesimais, as configurações inicial e atual da estrutura se confundem e, portanto, a resposta de uma estrutura coincide independentemente do tipo de deformação que se utilize. Nesse caso, $L \approx L_0$ e as medidas de deformação convergem para a definição de pequena deformação $\Delta L/L$ (BONET; WOOD, 2008). Utilizando uma análise de série de Taylor, tem-se, por exemplo, para a deformação de Almansi:

$$\varepsilon_A(L \approx L_0) = \frac{(L + \Delta L)^2 - L^2}{2L^2} = \frac{L^2 + 2L\Delta L + \Delta L^2 - L^2}{2L^2} = \frac{\Delta L}{L}, \quad (37)$$

uma vez que foi desprezado o termo de ordem maior ($\Delta L^2 \approx 0$). Ficou evidente que, no caso de deformações finitas, a resposta da estrutura pode diferir com a escolha da medida de

deformação, como observado nas trajetórias das Figuras 4, 6 e 10. Em adição, nessas figuras, vê-se que os caminhos de equilíbrio com as deformação de Green-Lagrange e de Engenharia tendem a ficarem mais próximas, havendo maior discrepância com as deformações de Almansi e Biot. Segundo Menin e Silva (2003), para se obter unicidade na resposta com as medidas, seria necessário fazer uso de transformações tensoriais que fazem o mapeamento do tensor constitutivo entre as configurações inicial e atual.

O método de solução de Newton-Raphson padrão associado à estratégia de Comprimento de Arco Linear conseguiu descrever o comportamento das estruturas cujos caminhos de equilíbrio têm pontos limites de força e/ou deslocamento (Figuras 4, 6 e 8). O dispositivo para a verificação da mudança do sinal do incremento de carga inicial na passagem por pontos limites (linhas 5 a 7 do algoritmo na Figura 2) é de fácil implementação computacional e apresentou resultados precisos em todos os exemplos estudados. Há outros critérios para a verificação desse sinal, como por exemplo, o parâmetro de rigidez CST - *Current Stiffness Parameter* (BERGAN, 1980), o sinal do determinante da matriz de rigidez (CRISFIELD, 1991), o parâmetro de rigidez GSP - *Generalized Stiffness Parameter* (YANG; KUO, 1994), entre outros.

Existem dois sistemas de equações lineares a serem solucionados na iteração do procedimento incremental (linhas 12 e 22 do algoritmo na Figura 2). O cálculo explícito de $[K(u^{(k)})]^{-1}$ pode ser evitado, resolvendo-se o sistema via decomposição (por exemplo, fatoração LU), visto que uma única fatoração no início da iteração é necessária.

A matriz de rigidez gerada do Método de Elementos Finitos costuma ser esparsa e do tipo banda (os elementos não nulos aparecem na diagonal principal e nas diagonais paralelas). As matrizes grandes exigem um grande espaço de armazenamento e, mesmo se houver computadores com a maior capacidade de memória atualmente, normalmente não é suficiente para armazenar a matriz quadrada. Para tornar o armazenamento da matriz e as operações menos onerosas em termos computacionais, pode-se usar técnicas baseadas no armazenamento de valores diferentes de zero, como CSC (*Compressed Sparse Column*) e CSR (*Compressed Sparse Row*) (ANTUNES FILHO; XAVIER, 2015). No Scilab, tem a função *sparse*, que armazena os elementos não nulos da matriz original, desprezando os elementos iguais a zero.

5 Conclusões

Foi implementado um programa com a formulação corrotacional de Elementos Finitos para análise estática de treliças planas com não linearidade geométrica utilizando quatro medidas de deformação - Engenharia, Green-Lagrange, Biot e Almansi. A solução do problema não linear foi obtida por meio do procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson padrão associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. O programa desenvolvido no *software* Scilab mostrou-se eficiente, visto que conseguiu traçar as trajetórias completas de equilíbrio das estruturas analisadas.

Observou-se nos exemplos numéricos a partir das trajetórias de equilíbrio, que a resposta da estrutura pode diferir completamente de acordo com a medida de deformação considerada na análise. Portanto, a possibilidade de se prever na formulação de Elementos Finitos medidas de deformação distintas contribui para a concepção de projetos de estruturas com comportamento mecânico mais realistas, e com a predição de relações constitutivas de materiais mais próxima do observado em ensaios de laboratório.

Referências

ANTUNES FILHO, A.; XAVIER, A. C. C. Solução de sistemas lineares esparsos utilizando CUDA: uma comparação de desempenho em sistemas Windows e Linux. **Revista de Ciências Exatas e Tecnologia**, v. 8, n. 8, p. 181-195, 2015.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Cambridge, MA: Klaus-Jürgen Bathe, 2006.

BATOZ, J. L.; DHAT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, n. 8, p. 1262-1267, 1979.

BERGAN, P. G. Solution algorithms for non-linear structural problems. **Computers & Structures**, v. 12, p. 497-509, 1980.

BERGAN, P. G., HORRIGMOE, G., BRAKELAND, B.; SOREIDE, T. H. Solution techniques for non-linear finite element problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, n. 11, p. 1677-1696, 1978.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element analysis**. New York: Cambridge University Press, 2008.

BORST, R.; CRISFIELD, M. A.; REMMERS, J. J.; VERHOOSSEL, C. V. **Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. 2. ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley and Sons Ltd, 2012.

CHAN, S. L. Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, n. 12, p. 2657-2669, 1988.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Volume 1: Essentials. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1991.

GRECO, M.; VENTURIN, W. S. Stability analysis of three-dimensional trusses. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 3, n. 3, p. 325-344, 2006.

KOOHESTANI, K. A hybrid method for efficient solution of geometrically nonlinear structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, n. 1, p. 21-29, 2013.

KRENK, S.; HEDEDAL, O. A dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 123, n. 1-4, p. 95-107, 1995.

LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil.

LACERDA, E. G. M.; MACIEL, D. N.; SCUDELARI, A. C. Geometrically static analysis of trusses using the arc-length method and the positional formulation of Finite

Element Method. In: XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering/CILAMCE, 2014, Evandro Parente Jr (Editor), ABMEC, Fortaleza, CE, Brasil.

MATIAS, W. T. El control variable de los desplazamientos en el análisis no lineal elástico de estructuras de barras. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 18, n. 4, p. 549-572, 2002.

MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. **Revista Escola de Minas (Impresso)**, v. 67, n. 2, p. 143-150, 2014.

MENIN, R. C. G. **Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas**. 2006. Tese (Doutorado), Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil.

MENIN, R. C. G.; SILVA, W. T. M. Resposta pós-crítica de sistemas articulados com diferentes deformações utilizando uma formulação co-rotacional. In: XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering/CILAMCE, 2003, Ouro Preto, MG, Brasil.

PAULA, C. F.; PROENÇA, S. P. B. Análise não-linear geométrica de treliças planas. In: IV Congresso de Engenharia Civil, 2000, Juiz de Fora, Brasil. Vol. 1, p. 369-380.

POWELL, G.; SIMONS, J. Improved iteration strategy for nonlinear structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 10, p. 1455-1467, 1981.

RAMM, E. **Strategies for tracing the non-linear response near limit-points, nonlinear finite element analysis in structural mechanics**. Wunderlich, W. (ed.). Berlin: Springer-Verlag, p. 63-89, 1981.

RIKS, E. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. **Journal of Applied Mechanics**, v. 39, n. 4, p. 1060-1065, 1972.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 7, p. 529-551, 1979.

SCILAB version 6.1.0. ESI Group, 2020.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I.; MACHADO, R. D. Métodos iterativos de terceira e quarta ordem associados à técnica de comprimento de arco linear. **Ciência & Engenharia**, v. 26, n. 1, p. 39-49, 2017.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I.; ALIANO FILHO, A.; MACHADO, R. D. Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order. **TEMA (São Carlos)**, v. 19, n. 1, p. 161-179, 2018.

TOLENTINO, L. D.; SOUZA, L. A. F. Análise comparativa entre medidas de deformação em estruturas de barra. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 40, n. 2, p. 161-168, 2019.

VASIOS, N. **Nonlinear Analysis of Structures: The Arc Length Method: Formulation, Implementation and Applications**. Harvard University, Massachusetts, 2015.

YANG, Y. B.; KUO, S. R. **Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures**. Singapore: Prentice - Hall, 1994.

YAW, L. L. **2D Co-rotational Truss Formulation**. Walla Walla University, 2009.

WRIGGERS, P.; WAGNER, W.; MIEHE, C. A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 70, n. 3, p. 329-347, 1988.