

INFLUÊNCIA DAS DEFORMAÇÕES POR CISALHAMENTO NAS FLECHAS ELÁSTICAS DE ESTRUTURAS CONSIDERANDO DIFERENTES TIPOS DE ACOPLAMENTO NA LIGAÇÃO PLACA-VIGA

INFLUENCE OF SHEAR DEFORMATIONS ON THE ELASTIC DEFLECTIONS OF STRUCTURES CONSIDERING DIFFERENT TYPES OF COUPLING IN THE PLATE-BEAM CONNECTION

Wanderson Ferreira dos Santos¹

Wellington Hilário Vieira²

João Batista de Paiva³

Resumo: Hipóteses simplificadoras são comumente adotadas para facilitar a análise do comportamento mecânico de estruturas. Por exemplo, em alguns casos o efeito das deformações por cisalhamento é desconsiderado nos resultados dos deslocamentos nos elementos. Outra simplificação consiste em desconsiderar a influência da excentricidade no acoplamento placa-viga e, assim, a ligação é adotada como concêntrica. No entanto, estas simplificações podem não fornecer resultados suficientemente precisos para situações com maior complexidade, em que as características do problema estrutural podem influenciar de forma pronunciada nos resultados dos deslocamentos verticais. Nesse contexto, o presente trabalho investiga o efeito das deformações por cisalhamento nas flechas elásticas de estruturas considerando a influência da excentricidade na ligação placa-viga para diferentes tipos de acoplamento. O estudo é realizado através de simulações numéricas com o método dos Elementos Finitos (MEF) no software ANSYS®. Para as estruturas estudadas, os deslocamentos são maiores quando o efeito da deformação por cisalhamento é considerado. As diferenças nas respostas dependem da geometria e a concepção da estrutura.

Palavras-chaves: deformações cisalhantes, ligação placa-viga, excentricidade, MEF.

Abstract: Simplifying hypotheses are commonly adopted to facilitate the analysis of the mechanical behavior of structures. For example, in some cases the effect of shear deformations is disregarded in the results of displacements in the elements. Another simplification is to disregard the influence of the eccentricity in the beam-plate coupling and, thus, the connection is adopted as concentric. However, these simplifications may not provide sufficiently accurate results for situations with greater complexity, in which the characteristics of the structural problem can have a pronounced influence on the results of vertical displacements. In this context, the present work investigates the effect of shear deformations on the elastic deflections of structures considering the influence of eccentricity on the plate-beam connection for different types of coupling. The study is carried out through numerical simulations with the Finite Element Method (FEM) in the ANSYS® software. For the studied structures, the displacements are greater when the effect of shear deformation is considered. The difference in responses depends on the geometry and design of the structure.

Keywords: shear deformations, beam-plate connection, eccentricity, FEM.

1 Introdução

Frequentemente são desenvolvidos e aplicados modelos com algumas simplificações para representação e análise do comportamento de estruturas. Um exemplo clássico para análise de vigas consiste no modelo desenvolvido por Euler-Bernoulli, que admite a seção transversal da peça permanecer plana e perpendicular à linha neutra após a deformação. Essa

¹Universidade de São Paulo, Campus São Carlos – Brasil, email: wanderson_santos@usp.br

²Universidade de São Paulo, Campus São Carlos – Brasil, email: wvieira@usp.br

³Universidade de São Paulo, Campus São Carlos – Brasil, email: paiva@sc.usp.br

consideração faz com que a equação diferencial do deslocamento seja independente dos esforços cortantes. Na cinemática de placas e cascas as mesmas hipóteses são observadas na teoria de Kirchhoff-Love, fundamentada a partir do trabalho de Kirchhoff (1850) e Love (1888).

Posteriormente, foram desenvolvidas teorias mais sofisticadas. No contexto de vigas existe a teoria de Timoshenko, baseada em Timoshenko (1921), que considera o efeito do cisalhamento na deformação. Nesta teoria, adota-se a hipótese de que a seção transversal permanece planar na configuração deformada da estrutura. Por outro lado, neste caso a seção não é necessariamente perpendicular à linha neutra na configuração deformada. Esta cinemática foi estendida para placas e cascas através dos trabalhos de Reissner (1945) e Mindlin (1951) e, conseqüentemente, ficou conhecida como cinemática de Reissner-Mindlin. No decorrer do tempo foram ainda desenvolvidas outras teorias mais elaboradas, as quais não serão aqui abordadas. Num contexto mais recente, por exemplo, Ota et al. (2016) estudaram modelos de cascas geometricamente exatos. Já Wang, Tong e Zhang (2017) desenvolveram uma formulação que permite tratar vigas mistas como homogêneas considerando os efeitos da deformação por cisalhamento no deslocamento. Outro trabalho recente consiste em Freund (2019) que apresentou uma nova forma de correção do efeito do cisalhamento no modelo Reissner-Mindlin para placas.

De maneira geral, as teorias de Euler-Bernoulli e de Kirchhoff-Love são apropriadas para elementos de comprimentos muito maiores que a altura, pois o efeito do cisalhamento tem pouca influência na deformação. Já as cinemáticas de Timoshenko e de Reissner-Mindlin são adequadas para elementos espessos, em que a influência do cisalhamento é mais proeminente. Oñate (2013) apresenta como referência que as cinemáticas de Timoshenko e Reissner-Mindlin são mais adequadas para análise de elementos cuja razão entre a altura (H) e comprimento (L) é superior a 0,1 (ou seja, $H/L > 0,1$). Por outro lado, as teorias simplificadas de Euler-Bernoulli e de Kirchhoff-Love fornecem resultados satisfatórios em situações com $H/L \leq 0,1$.

Na literatura são encontrados trabalhos comparando as cinemáticas apresentadas anteriormente, ou seja, confrontando as teorias que consideram e desprezam o efeito do cisalhamento. Beck e Silva (2011) constataram que para módulos de elasticidade incertos o valor da incerteza dos deslocamentos para a viga de Timoshenko é maior na comparação com Euler-Bernoulli. Carrer, Scuciato e Garcia (2020) empregaram o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a análise de vigas contínuas considerando as duas teorias de viga supracitadas. Neste caso, observou-se que nas estruturas analisadas a viga de Timoshenko apresentou maiores deslocamentos verticais em comparação com Euler-Bernoulli.

Na comparação das teorias de placas, Destuynder (1997) apresentou equações para estimativa do erro de cada uma das teorias. Arnold, Madureira e Zhang (2002) calcularam analiticamente uma placa com uma dimensão infinita (transformando o problema para aplicação no estado plano de deformação) e constataram que a cinemática de Reissner-Mindlin forneceu resultados mais próximos em comparação com a cinemática de Kirchhoff-Love. Carvalho (2016) analisou uma placa comparando as duas cinemáticas e concluiu que o emprego da teoria de Reissner-Mindlin promoveu maiores deslocamentos verticais.

No âmbito do presente trabalho, outra simplificação a ser mencionada consiste na consideração de concentricidade entre os elementos na ligação laje-viga. Por exemplo, modelos de cálculo comumente empregados para estruturas de concreto desconsideram a existência de excentricidade entre o plano médio da laje e o eixo longitudinal da viga, o que não representa o comportamento real da estrutura. O estudo da influência da excentricidade viga-laje teve contribuição de Rossow e Ibrahimkhail (1976), que estudaram diferentes modelos de ligação placa-viga. Na mesma linha de raciocínio, Tanaka e Bercin (1998)

empregaram o MEC e obtiveram respostas próximas. Já Bedair (1997) propôs uma solução de problemas de placas enrijecidas usando programação sequencial quadrática.

No contexto de trabalhos sobre excentricidade com o MEF, Miller (1980) destacou que o uso de função de forma linear para aproximar o deslocamento axial de elementos de viga aplicados como enrijecedores excêntricos levava a uma inconsistência. Para contornar o problema foi proposto um novo elemento de viga com um grau de liberdade adicional, com o qual foi possível obter respostas próximas às que se tem com a teoria de Euler-Bernoulli. Deb, Deb e Booton (1991) contribuíram na formulação não linear geométrica de placas com muitos reforços nas duas direções usando a teoria de Reissner-Mindlin. No contexto de aplicações mais próximas da realidade com o MEF, Dias (2003) estudou lajes de concreto convencionais com nervuras nas duas direções. Silva (2010) simulou um pavimento de lajes nervuradas e um em lajes maciças, analisando três diferentes modelos de ligação placa-viga. Wan, Audi e Sasani (2016) estudaram o colapso progressivo de lajes nervuradas representando a estrutura com dois modelos de ligação. No primeiro modelo, as lajes e as vigas estão no mesmo plano, ou seja, não existe excentricidade. Já no segundo modelo as lajes apresentam excentricidade em relação às vigas. Nos trabalhos de Dias (2003), Silva (2010) e Wan, Audi e Sasani (2016), a consideração da excentricidade entre a placa e a viga resultou na redução dos deslocamentos da estrutura em comparação com o caso concêntrico.

Diante do exposto, podem ser realizados estudos adicionais com o objetivo de avaliar a influência da deformação por cisalhamento no comportamento mecânico de estruturas com excentricidade na ligação placa-viga. Nesse sentido, o presente trabalho analisa os deslocamentos verticais (flechas elásticas) de estruturas com diferentes formas de acoplamento na ligação entre a placa e a viga, sendo um modelo concêntrico e dois modelos excêntricos. Para considerar a influência das deformações por cisalhamento, neste trabalho realizam-se simulações numéricas com o MEF empregando elementos finitos baseados na teoria de Timoshenko (para simular as vigas) e de Reissner-Mindlin (para simular as placas). Cabe destacar que as estruturas analisadas foram estudadas anteriormente por Silva (2010), cujos resultados numéricos com o MEF foram obtidos a partir de elementos finitos baseados nas teorias de Euler-Bernoulli (para simular as vigas) e Kirchhoff-Love (para simular as placas), ou seja, desconsiderando o efeito das deformações por esforço cortante. Os resultados aqui obtidos para os deslocamentos são comparados com Silva (2010).

2 Materiais e Métodos

Este trabalho foi desenvolvido por meio de simulações numéricas baseadas no MEF com o *software* Ansys® versão 18.0. Neste caso, o meio contínuo é discretizado em subdomínios (elementos finitos) que são mapeados por funções aproximadas. Dentro desse contexto, o problema global é resolvido através da solução da seguinte expressão:

$$\mathbb{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (1)$$

em que: $\mathbb{K}$ representa a matriz de rigidez global da estrutura formada pela contribuição da rigidez dos subdomínios (elementos finitos); $\mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos global que contém as incógnitas do problema; e $\mathbf{F}$ é o vetor de forças global.

Na Equação (1) devem ser aplicadas condições de contorno convenientes para possibilitar a resolução do sistema linear. Cabe destacar que resultados numéricos obtidos para os campos de interesse (deslocamentos, deformações, tensões, esforços internos, etc.) são aproximados. Por outro lado, pode-se obter uma excelente precisão nos resultados através de uma modelagem consistente, incluindo a correta definição da formulação, do tipo do elemento,

do grau de refinamento da malha, entre outros parâmetros. Para maiores detalhes sobre o MEF, consultar o trabalho de Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005).

Maiores detalhes sobre os materiais e métodos são descritos a seguir, incluindo: (i) Os elementos finitos utilizados nas simulações numéricas, cuja formulação considera o efeito das deformações por cisalhamento; e (ii) Os três conjuntos estruturais definidos para realização das análises, incluindo os modelos mecânicos considerados na ligação placa-viga, sendo um concêntrico e dois excêntricos. Ademais, em todas as simulações numéricas realizadas utiliza-se a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

2.1 Elementos utilizados nas simulações numéricas

Dentro do contexto do trabalho, nas simulações numéricas devem ser empregados elementos cuja formulação incorpore o efeito das deformações por cisalhamento na resposta da estrutura. Para as vigas, empregou-se o elemento de viga BEAM 188, que permite simular o caso concêntrico e os casos excêntricos. O elemento BEAM 188 possui 2 nós e 6 graus de liberdade por nó, em que 3 graus são referentes a translações e 3 graus correspondentes a rotações. Na Figura 1 são apresentadas características dos elementos BEAM 188. A formulação do elemento BEAM 188 tem como base a teoria de vigas de Timoshenko. Neste caso, as seções permanecem planas, mas não são necessariamente perpendiculares à linha neutra na configuração deformada devido ao efeito de deformações por força cortante. Para um melhor entendimento da teoria de Timoshenko utilizada pelo elemento BEAM 188, considere o esquema ilustrativo da viga engastada apresentado na Figura 2.

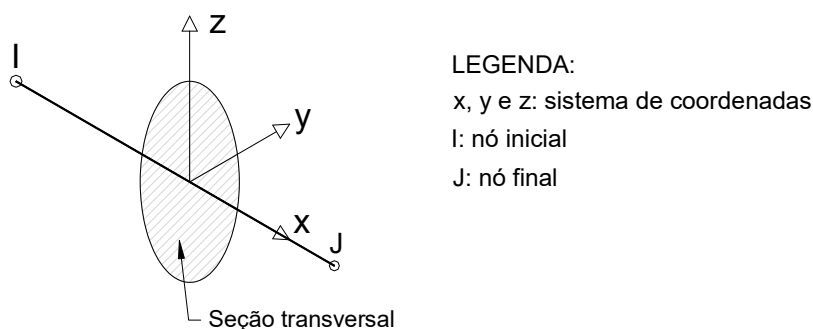


Figura 1. Características do elemento BEAM 188.

Fonte: Adaptado do ANSYS® (2018).

Na Figura 2-(a) ilustra-se a seção transversal de interesse AB, que está associada ao ponto O_{xi} (configuração indeformada). Note que, inicialmente, a seção AB é perpendicular à linha neutra (LN). Após a aplicação do carregamento concentrado G na extremidade da viga, o ponto O_{xi} é deslocado para uma nova posição O_{xd} (configuração deformada). Maiores detalhes da configuração deformada para a posição O_{xd} são mostrados na Figura 2-(b), em que a seção $A'B'$ é o resultado da rotação α . Cabe destacar que $A'B'$ é perpendicular à LN deformada, o que caracteriza a hipótese de Euler-Bernoulli. Por outro lado, no modelo de Timoshenko considera-se também a deformação angular (β) em decorrência do efeito do cisalhamento e, consequentemente, a seção $A''B''$ não é perpendicular à LN deformada. Ademais, na formulação aqui utilizada emprega-se a hipótese de β constante na seção transversal, sendo que a seção $A''B''$ é plana na configuração deformada.

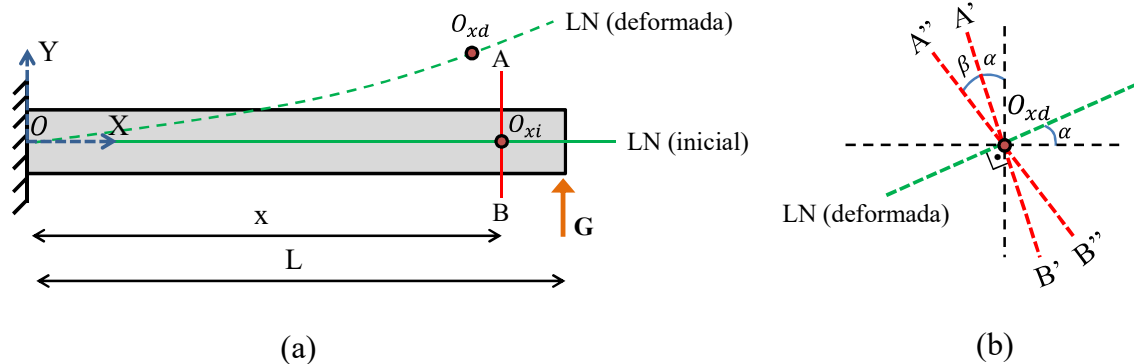


Figura 2. Viga engastada de comprimento L submetida a um carregamento G : (a) Indicação da seção transversal AB associada ao ponto O_{xi} (configuração indeformada); (b) Indicação da seção transversal $A''B''$ associada ao ponto O_{xd} (configuração deformada).

Fonte: Autoria própria (2021).

Para as placas, utilizou-se o elemento de casca SHELL 181. Este elemento apresenta 4 nós e 6 graus de liberdade por nó, sendo 3 graus correspondentes a deslocamentos e 3 graus referentes a rotações. A Figura 3 apresenta algumas características do elemento SHELL 181. A formulação do elemento supracitado tem como base a teoria de Reissner-Mindlin. De modo geral, neste caso as considerações e hipóteses empregadas são análogas ao discutido para o elemento BEAM 188. Portanto, consideram-se os efeitos relacionados com deformações por cisalhamento, em que as seções permanecem planas e não são necessariamente perpendiculares à linha neutra na configuração deformada. Cabe destacar que neste caso assume-se a hipótese de deformação angular constante na seção transversal. Ademais, no âmbito das simulações deste trabalho, o elemento SHELL 181 será solicitado apenas a carregamento ortogonal ao plano.

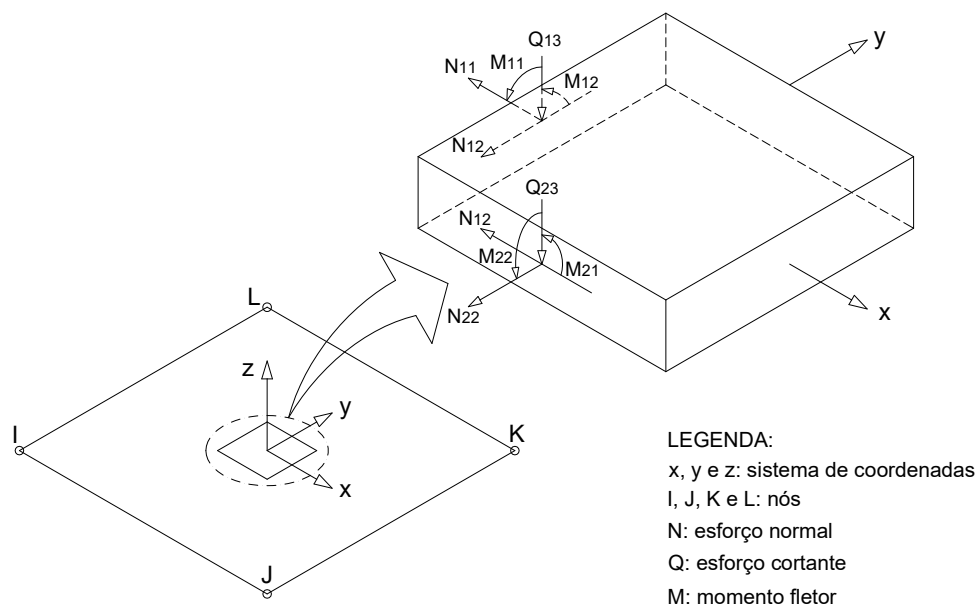


Figura 3. Características do elemento SHELL 181.

Fonte: Adaptado do ANSYS® (2018).

2.2 Estruturas analisadas

Foram analisadas três estruturas a partir de Silva (2010). Cabe ressaltar que a Estrutura 2 e a Estrutura 3 estudadas por Silva (2010) foram extraídas de outros trabalhos na literatura. Para simular as vigas, Silva (2010) utilizou o elemento BEAM4 (caso sem excentricidade) e o elemento BEAM44 (casos com excentricidade), ambos formulados com base na hipótese cinemática de Euler-Bernoulli. Os elementos lineares BEAM 4 e BEAM 44 possuem 2 nós e 6 graus de liberdade por nó (3 translações e 3 rotações). Em relação às placas, Silva (2010) empregou o elemento SHELL 63, que é fundamentado na hipótese cinemática de Kirchhoff-Love. O elemento SHELL 63 possui 4 nós e 6 graus de liberdade por nó (3 translações e 3 rotações). Portanto, os resultados de Silva (2010) não consideram o efeito das deformações por cisalhamento devido à cinemática utilizada na formulação dos elementos, em que as seções transversais permanecem planas e ortogonais à linha neutra deformada.

Maiores detalhes de cada estrutura são apresentados a seguir. Os tipos de modelos de ligação placa-viga são baseados no trabalho de Silva (2010). De modo geral, para cada estrutura analisada, considerou-se um modelo concêntrico (Modelo 1) e dois modelos excêntricos (Modelos 2 e 3) para o acoplamento placa-viga (ver Figuras 5, 7, 9 e 10).

2.2.1 Estrutura 1

O primeiro caso consiste na Estrutura 1, simulada inicialmente por Silva (2010). Trata-se de uma placa simples quadrada com apoios elásticos (vigas) nas bordas e apoios rígidos nos cantos. Um esquema geral é mostrado na Figura 4. Na Figura 5 está a representação dos modelos aqui estudados. Em todos os modelos a dimensão da placa é mantida (200 x 200 cm). Portanto, ocorre apenas a variação da posição vertical da placa na ligação com a viga. Ademais, o Modelo 2 tem a altura reduzida em comparação com os Modelos 1 e 3.

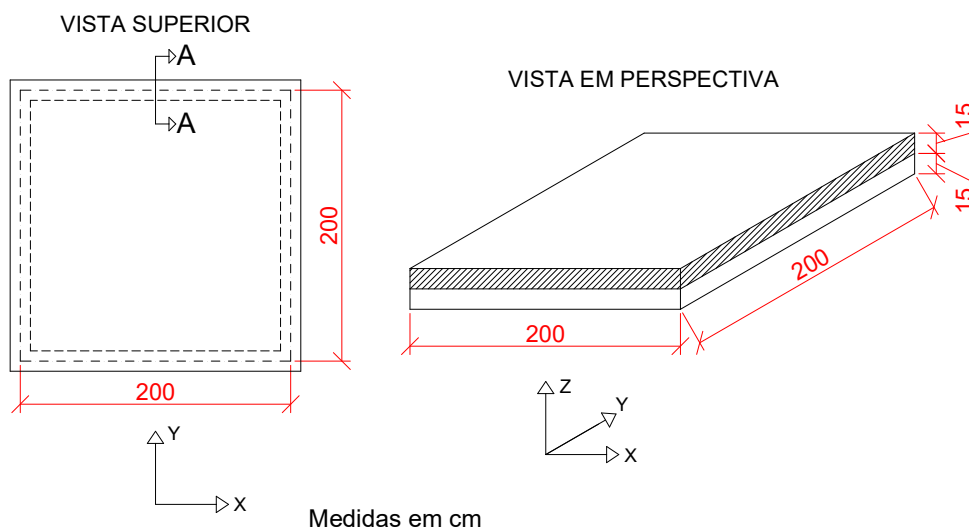


Figura 4. Placa quadrada com vigas nas bordas e apoios rígidos nos cantos.

Fonte: Adaptado de Silva (2010).

Tanto a placa quanto as vigas possuem um comportamento elástico linear, em que o módulo de elasticidade (E) consiste em 2000 kN/cm^2 e o coeficiente de Poisson (ν) corresponde a 0,25. O carregamento é uma carga distribuída uniforme de $0,00035 \text{ kN/cm}^2$ aplicada de forma ortogonal ao plano da placa.

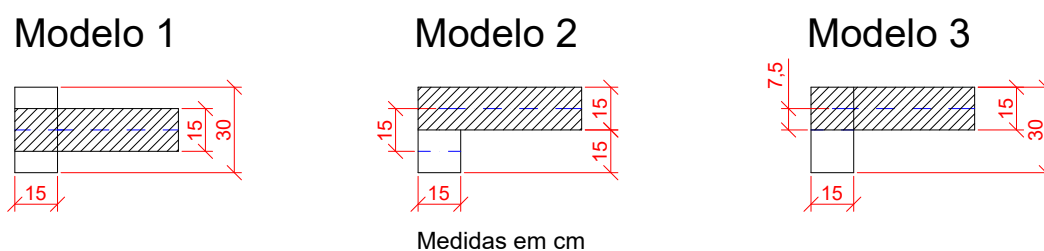


Figura 5. Tipos de modelos mecânicos estudados considerando o corte A-A (ver Figura 4).

Fonte: Autoria própria (2021).

Posteriormente, os resultados numéricos obtidos com o MEF são comparados com a resposta analítica de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e as simulações numéricas de Silva (2010). Em relação à malha, foram utilizados 64 elementos SHELL 181, para simular a placa, e 32 elementos BEAM 188, para simular as vigas. O refinamento é o mesmo realizado por Silva (2010).

2.2.2 Estrutura 2

A Estrutura 2 consiste numa placa com uma viga central (apoio elástico) e apoios rígidos nas bordas externas. Maiores detalhes da estrutura são mostrados na Figura 6. Este caso foi estudado, inicialmente, por Rossow e Ibrahimkhail (1978) usando o método das restrições e, posteriormente, por Tanaka e Bercin (1998) empregando o MEC e Silva (2010) com o MEF. Na Figura 7 está a representação dos modelos aqui avaliados. Em todos os modelos a dimensão da placa é mantida (2,54 x 2,54 cm). Logo, existe somente a variação da posição vertical da placa na ligação com a viga. Além disso, neste caso os Modelos 1 e 2 possuem uma viga com altura reduzida em comparação com o Modelo 3.

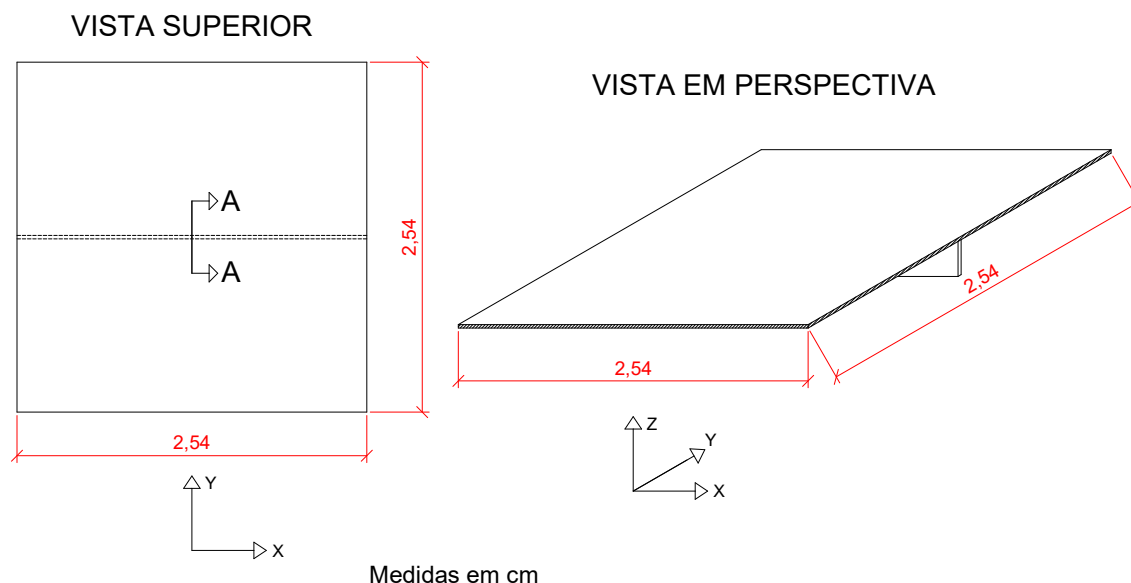
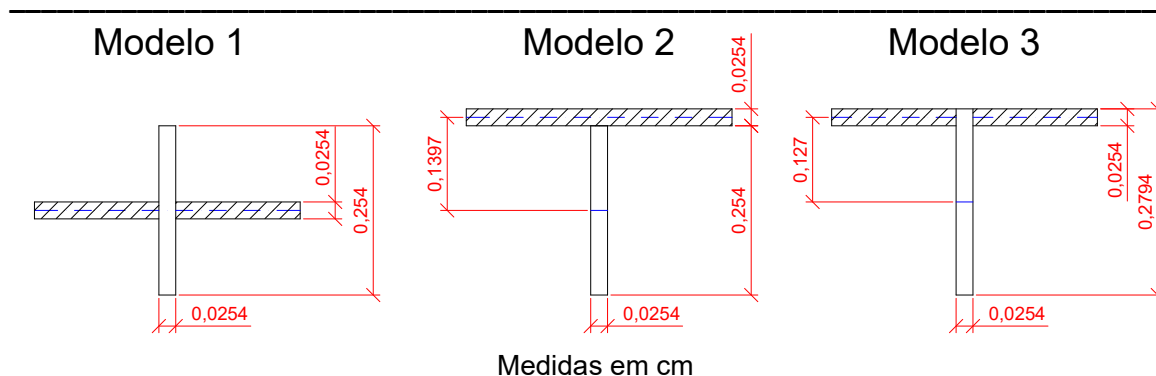


Figura 6. Placa com viga central e apoios rígidos nas bordas externas.

Fonte: Adaptado de Rossow e Ibrahimkhail (1978).



Medidas em cm

Figura 7.Tipos de modelos mecânicos estudados considerando o corte A-A (ver Figura 6).

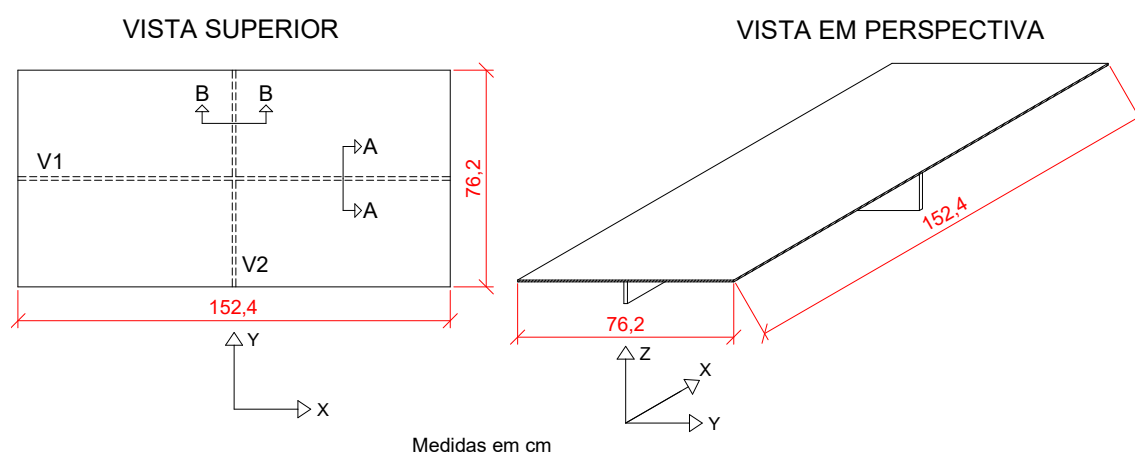
Fonte: Autoria própria (2021).

É assumido um comportamento elástico-linear para toda a estrutura(incluindo a viga e a placa) com $E = 11721,09 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu = 0,3$. A placa é submetida a um carregamento uniforme distribuído de $0,000689 \text{ kN/cm}^2$ ortogonal ao plano.

Os resultados numéricos calculados com o MEF são comparados com as respostas de Rossow e Ibrahimkhail (1978), Tanaka e Bercin (1998) e Silva (2010). Em todos os modelos, a malha da estrutura é composta por 100 elementos SHELL 181, para simular a placa, e 10 elementos BEAM 188, para simular a viga. Este refinamento da malha segue o estabelecido por Silva (2010).

2.2.3 Estrutura 3

A Estrutura é formada por uma placa com duas vigas(apoios elásticos): V1 (corte A-A) e V2 (corte B-B). As vigas são posicionadas de forma perpendicular no centro. Já as bordas externas das placas possuem apoios rígidos. Um maior detalhamento é mostrado na Figura 8. Tal estrutura foi estudada, inicialmente, por Rossow e Ibrahimkhail (1978), e depois por Tanaka e Bercin (1998) e Silva (2010). Nas Figuras 9 e 10 está a representação dos modelos aqui simulados considerando cada viga. Em todos os modelos a dimensão da placa é mantida ($152,4 \times 76,2 \text{ cm}$). Com isso, ocorre somente a variação da posição vertical da placa na ligação com as vigas. Neste caso, as vigas dos Modelos 1 e 2 apresentam altura reduzida em comparação com as vigas do Modelo 3.



Medidas em cm

Figura 8.Placa com duas vigasno centro e apoios rígidos nas bordas externas.

Fonte: Adaptado de Rossow e Ibrahimkhail (1978).

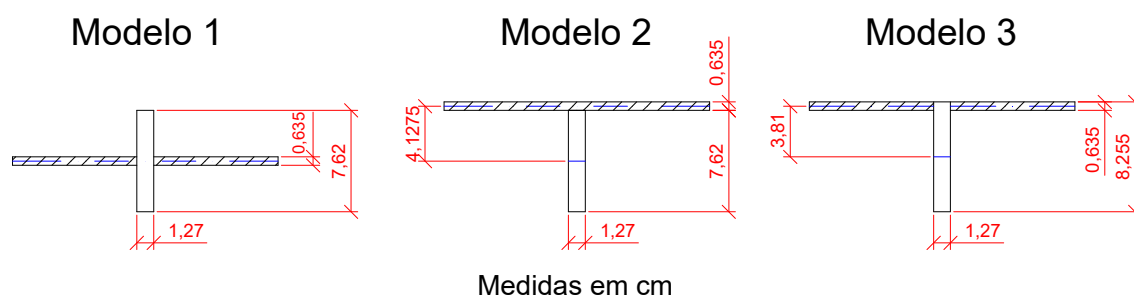


Figura 9. Tipos de modelos mecânicos estudados considerando o corte A-A (ver Figura 8).

Fonte: Autoria própria (2021).

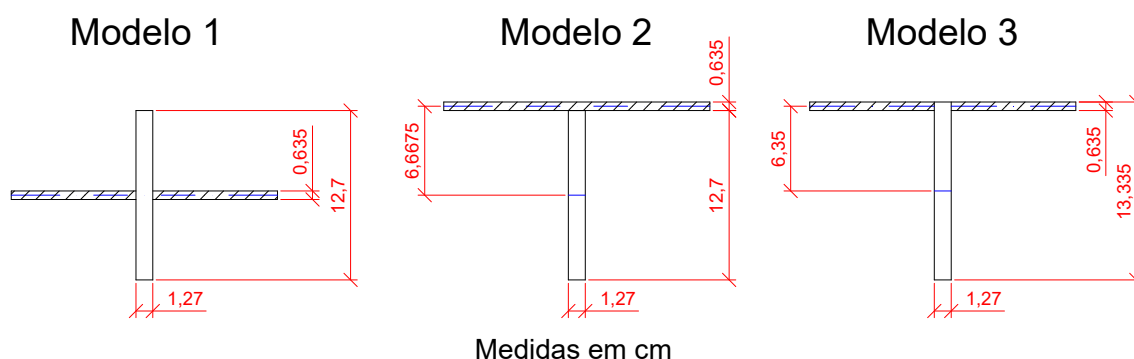


Figura 10. Tipos de modelos mecânicos estudados considerando o corte B-B (ver Figura 8).

Fonte: Autoria própria (2021).

Sobre a modelagem constitutiva, toda a estrutura (incluindo as vigas e a placa) possui um comportamento elástico-linear com $E = 20684,27 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu = 0,3$. É aplicado um carregamento uniforme distribuído de $0,006895 \text{ kN/cm}^2$ ortogonalmente ao plano da placa.

Os resultados numéricos obtidos a partir do MEF serão comparados com as respostas de Rossow e Ibrahimkhail (1978), Bedair (1997) e Silva (2010). Nas simulações, a malha de cada modelo é composta por 800 elementos SHELL 181, para a placa, e 60 elementos BEAM 188, para simular as vigas. O refinamento da malha empregado está em conformidade com o empregado por Silva (2010).

3 Resultados e discussões

Os resultados dos deslocamentos (flechas elásticas) considerando os efeitos das deformações cisalhantes para as Estruturas 1, 2 e 3 são apresentados a seguir. Cabe ressaltar que esses resultados são comparados com trabalhos da literatura que desprezam o efeito do esforço cortante na deformação.

3.1 Resultados da Estrutura 1

Os resultados dos deslocamentos em z (U_z) para os Modelos 1, 2 e 3 são apresentados nas Figuras 11, 12 e 13.

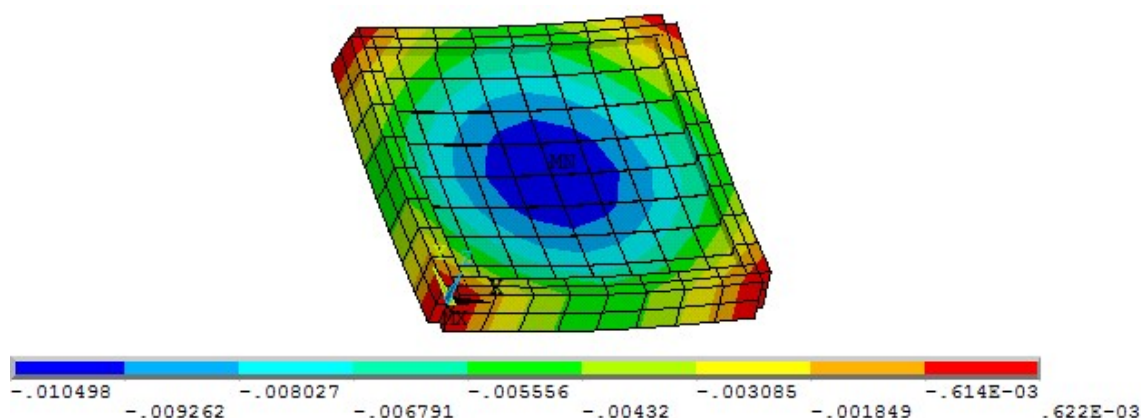


Figura 11.Deslocamento em z (cm) para o Modelo 1.

Fonte: Autoria própria (2021).

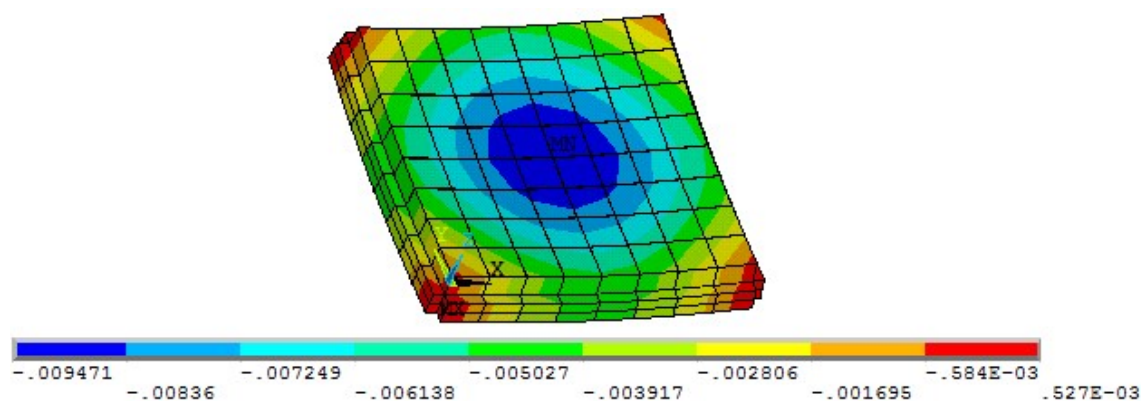


Figura 12.Deslocamento em z (cm) para o Modelo 2.

Fonte: Autoria própria (2021).

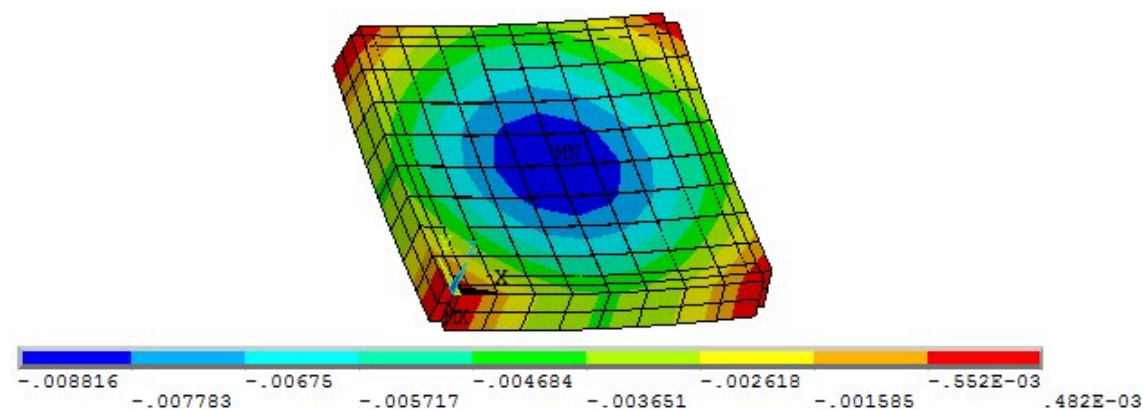


Figura 13.Deslocamento em z (cm) para o Modelo 3.

Fonte: Autoria própria (2021).

Na Figura 15 são mostrados os deslocamentos ao longo do corte 1-1 da Figura 14. Ficam evidentes as diferenças na resposta entre os três modelos. O Modelo 1 é o mais flexível, pois na montagem da rigidez global da estrutura considera-se apenas a contribuição da rigidez local dos elementos de forma convencional. Já o Modelo 3 representa o mais rígido e o Modelo 2 possui uma rigidez intermediária. Os menores deslocamentos nos casos excêntricos ocorrem porque a rigidez da estrutura aumenta com a existência da excentricidade.

Em resumo, neste caso existe uma matriz de transformação para a rigidez local dos elementos de viga, em que é considerado o efeito da excentricidade(ver maiores detalhes em Miller (1980) e Silva (2010)).Com isso, na rigidez global do conjunto estrutural é incorporado o efeito da excentricidade na ligação placa-viga. Vale ainda ressaltar a sensível diferença entre os modelos excêntricos.

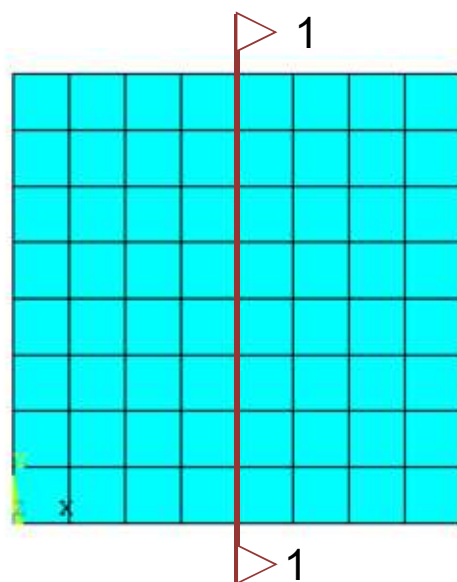


Figura 14.Corte 1-1.

Fonte: Autoria própria (2021).

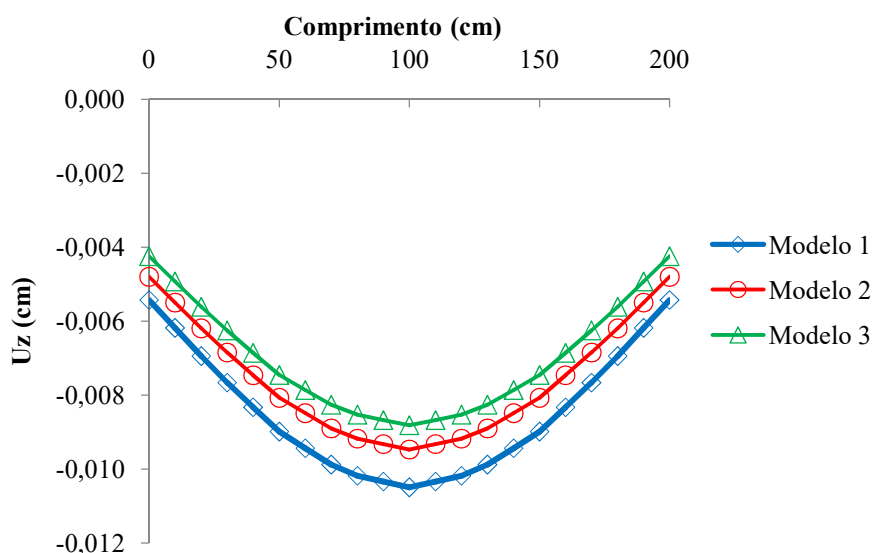


Figura 15.Deslocamentos em z (U_z) ao longo do corte 1-1(ver Figura 14) para cada modelo.

Fonte: Autoria própria (2021).

Os valores máximos dos deslocamentos em z no centro da placa são mostrados na Tabela 1. Também são apresentadas a resposta analítica de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e as simulações numéricas de Silva (2010), que não consideram o efeito de deformações cisalhantes. Os resultados da Tabela 2 mostram que os deslocamentos obtidos para cada modelo foram próximos dos encontrados pela literatura.

Tabela 1 -Deslocamentos em z (U_z).

Referência	Uz (cm)	
	Concêntrico	Excêntrico
Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959)	0,0109	-
Silva (2010): Modelo 1	0,0103	-
Silva (2010): Modelo 2	-	0,0091
Silva (2010): Modelo 3	-	0,0083
Presente trabalho: Modelo 1	0,010498	
Presente trabalho: Modelo 2	-	0,009471
Presente trabalho: Modelo 3	-	0,008816

Fonte: Autoria própria (2021).

A comparação em termos percentuais com Silva (2010) é apresentada na Tabela 2.

Tabela 2 -Comparação dos deslocamentos em z (U_z).

Local	Uz (cm)						Diferenças do presente trabalho em relação a Silva (2010)		
	Silva (2010)			Presente trabalho					
	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3
Centro	0,0103	0,0091	0,0083	0,010498	0,009471	0,008816	1,92%	4,07%	6,22%

Fonte: Autoria própria (2021).

Os resultados da Tabela 2 confirmam que as respostas foram próximas para todos os modelos. Em contrapartida, observou-se uma maior diferença para os casos excêntricos. Nas análises do presente trabalho a estrutura deslocou mais para todos os modelos, entretanto com uma variação inferior a 10%.

Conforme Oñate (2013), a teoria de Timoshenko é mais adequada para situações cuja razão entre a altura média da viga (H_{viga}) e o comprimento médio da viga (L_{viga}) é superior a 0,1 (isto é, $H_{viga} / L_{viga} > 0,1$). De modo análogo, Oñate (2013) apresenta que a teoria de Reissner-Mindlin é mais adequada para situações em que a razão entre a espessura média da placa (H_{placa}) e o comprimento médio da placa (L_{placa}) é superior a 0,1 (ou seja, $H_{placa} / L_{placa} > 0,1$). Portanto, valores maiores da relação altura / comprimento propiciam maior influência de deformações cisalhantes. Em todos os modelos aqui estudados, a placa apresenta uma relação entre altura e comprimento intermediária ($H_{placa} / L_{placa} = 0,075$). Em relação às vigas, o Modelo 1 apresenta uma maior relação entre altura e vão ($H_{viga} / L_{viga} = 0,150$) e, mesmo assim, a diferença foi mínima na resposta. Já no Modelo 2 a diferença foi um pouco maior, mesmo com um menor valor da relação entre altura e vão da viga ($H_{viga} / L_{viga} = 0,075$). Por fim, no Modelo 3 ($H_{viga} / L_{viga} = 0,150$) ocorreu uma maior diferença na resposta. Portanto, os resultados indicam que as estruturas excêntricas estão mais suscetíveis a efeitos do cisalhamento. Tal constatação é mais clara na comparação entre o Modelo 1 e o Modelo 3, pois ambos modelos possuem as mesmas relações entre L_{placa} / H_{placa} e H_{viga} / L_{viga} .

3.2 Resultados da Estrutura 2

Os resultados dos deslocamentos em z (U_z) para os Modelos 1, 2 e 3 são apresentados nas Figuras 16, 17 e 18.

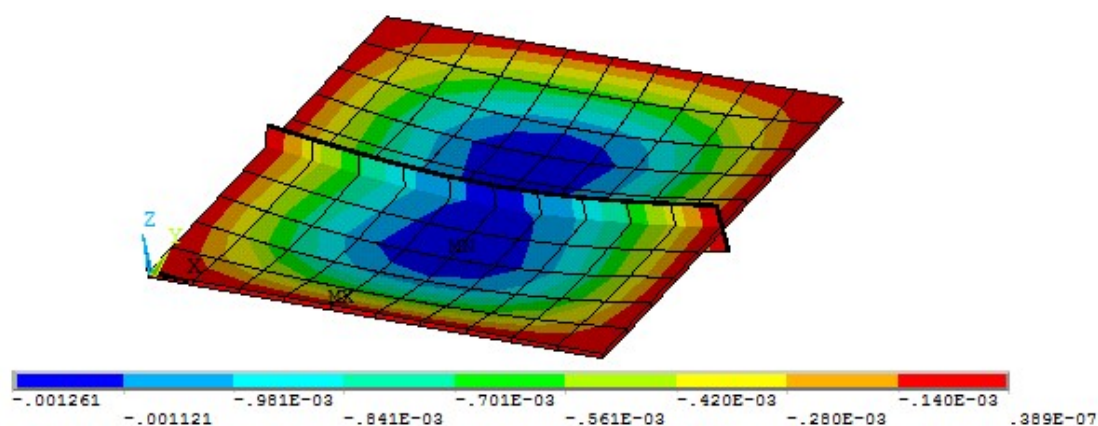


Figura 16.Deslocamento em z (cm) para o Modelo 1.

Fonte: Autoria própria (2021).

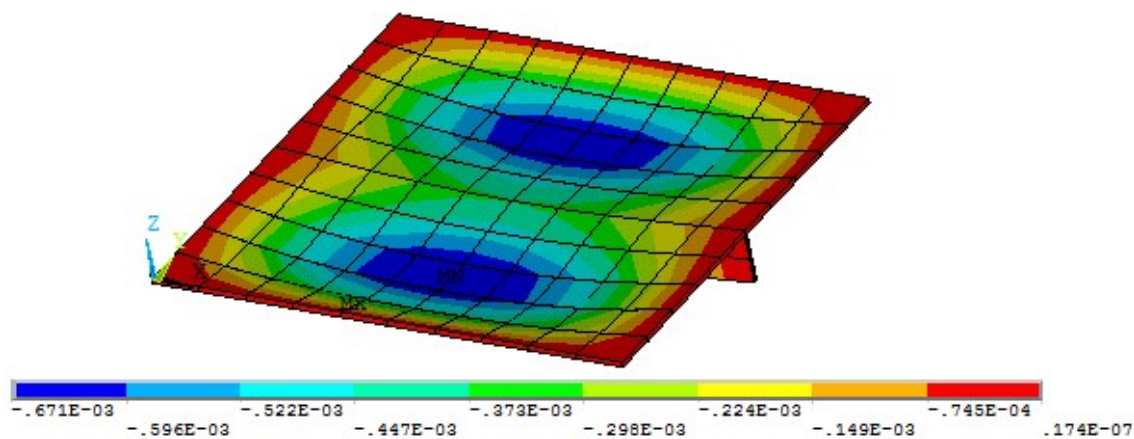


Figura 17.Deslocamento em z (cm) para o Modelo 2.

Fonte: Autoria própria (2021).

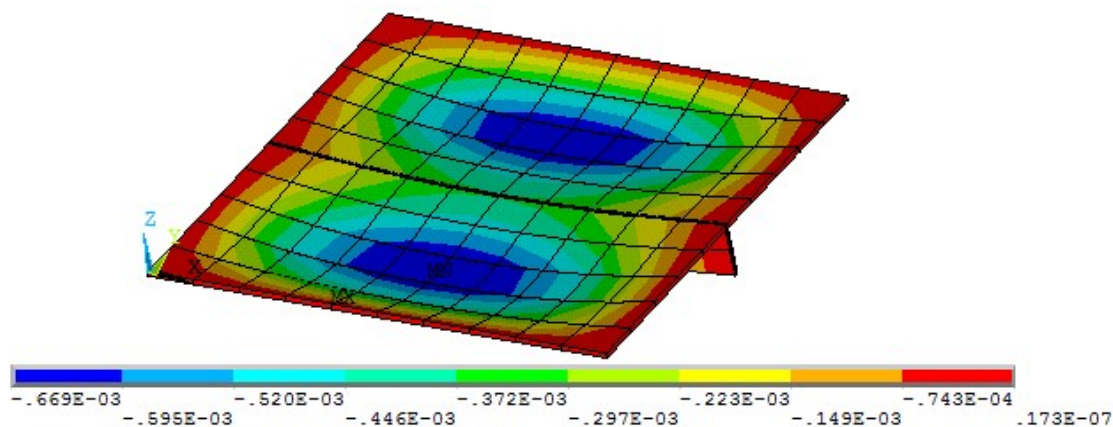


Figura 18.Deslocamento em z (cm) para o Modelo 3.

Fonte: Autoria própria (2021).

Nas Figuras 20 e 21 são mostrados os resultados dos deslocamentos ao longo dos cortes 1-1 e 2-2 da Figura 19. Nas duas direções, o Modelo 1 corresponde ao conjunto mais flexível e sua resposta difere bastante em relação aos demais casos. Isso ocorre porque na situação sem excentricidade a rigidez do conjunto estrutural é composta apenas pela contribuição das parcelas de rigidez local de cada elemento. De modo geral, os Modelos 2 e 3

apresentam deslocamentos menores em decorrência da excentricidade, que contribui para o ganho de rigidez do conjunto estrutural. No entanto, neste caso a diferença entre os Modelos 2 e 3 é pequena, o que é justificado devido à pequena espessura da placa em relação à viga. Com isso, a excentricidade varia pouco e as respostas são muito próximas nos Modelos 2 e 3.

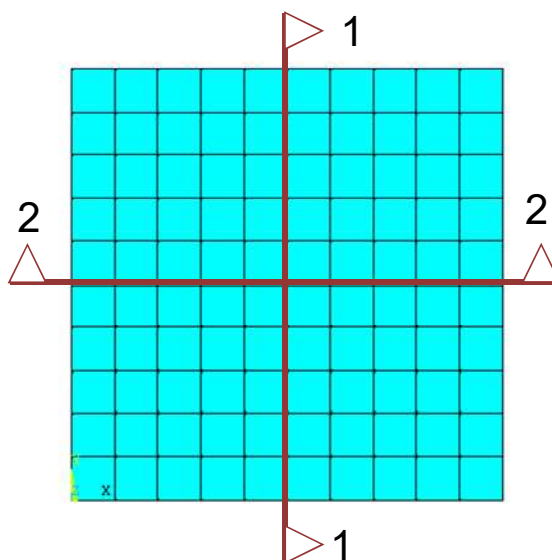


Figura 19.Corte 1-1 e corte 2-2.

Fonte: Autoria própria (2021).

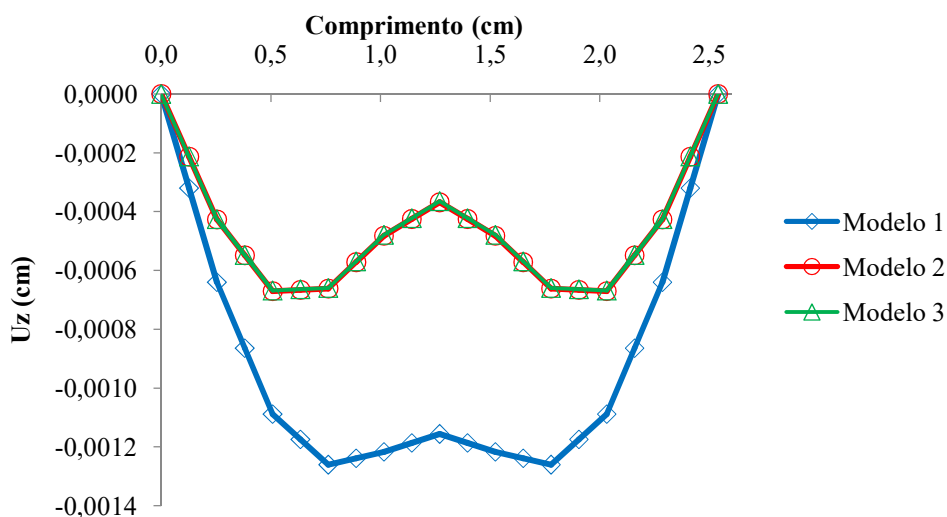


Figura 20.Deslocamentos em z (U_z) ao longo do corte 1-1(ver Figura 19) para cada modelo.

Fonte: Autoria própria (2021).

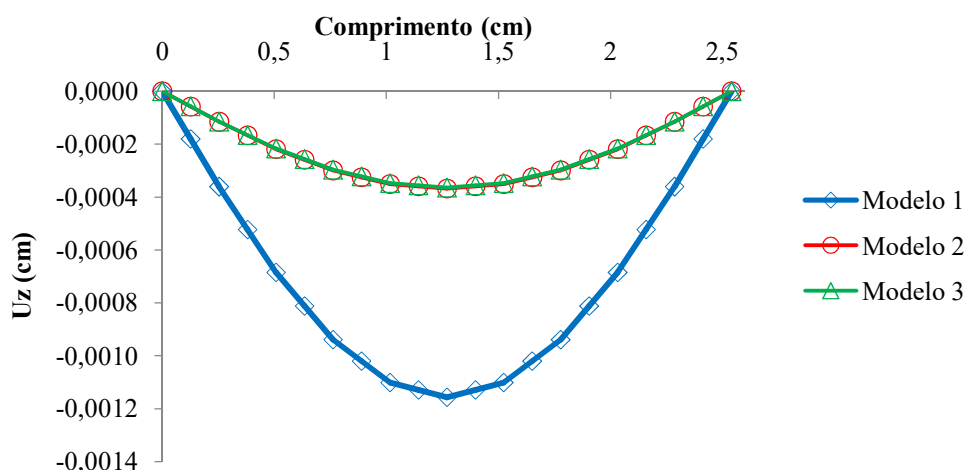


Figura 21. Deslocamentos em z (U_z) ao longo do corte 2-2 (ver Figura 19) para cada modelo.
Fonte: Autoria própria (2021).

Os valores máximos dos deslocamentos em z no centro da placa são mostrados na Tabela 3. Também são apresentados os resultados da literatura de Rossow e Ibrahimkhail (1978), Tanaka e Bercin (1998) e Silva (2010) que não consideram o efeito das deformações por força cortante. De modo geral, as respostas do presente trabalho foram próximas das respostas da literatura.

Tabela 3 - Deslocamentos em z (U_z) no centro da placa.

Referência	Uz (cm)	
	Concêntrico	Excêntrico
Rossow e Ibrahimkhail (1978)	0,001157	0,00035
Tanaka e Bercin (1998)	0,001147	0,00031
Silva (2010): Modelo 1	0,00114	-
Silva (2010): Modelo 2	-	0,00035
Silva (2010): Modelo 3	-	0,00035
Presente trabalho: Modelo 1	0,001157	-
Presente trabalho: Modelo 2	-	0,000368
Presente trabalho: Modelo 3	-	0,000365

Fonte: Autoria própria (2021).

A comparação em termos percentuais com Silva (2010) é apresentada na Tabela 4.

Tabela 4 - Comparação dos deslocamentos em z (U_z).

Local	Uz (cm)						Diferenças do presente trabalho em relação a Silva (2010)		
	Silva (2010)			Presente trabalho					
	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3
Centro	0,00114	0,00035	0,00035	0,001157	0,000368	0,000365	1,46%	5,25%	4,33%

Fonte: Autoria própria (2021).

De acordo com a Tabela 4, as diferenças são pequenas. Em todos os casos a estrutura analisada deslocou mais, porém com uma variação inferior a 10%. Com uma ótica mais criteriosa são notadas diferenças maiores para os Modelos 2 e 3. Neste caso, a relação entre altura e comprimento da placa é pequena ($H_{placa} / L_{placa} = 0,010$) e, portanto, a influência na deformação por cisalhamento é baixa. Para a viga, nos Modelos 1 e 2 a relação entre altura e

comprimento é a mesma ($H_{\text{viga}} / L_{\text{viga}} = 0,100$). Já no Modelo 3 ocorreu um leve aumento na relação entre altura e comprimento ($H_{\text{viga}} / L_{\text{viga}} = 0,110$). Tais características não foram suficientes para promover mudanças significativas no comportamento da estrutura com a consideração do efeito da deformação cisalhante. Além disso, observa-se uma maior sensibilidade da resposta dos casos excêntricos, o que é análogo ao descrito para a Estrutura 1.

3.3 Resultados da Estrutura 3

Os resultados dos deslocamentos na direção z para os Modelos 1, 2 e 3 são apresentados nas Figuras 22, 23 e 24.

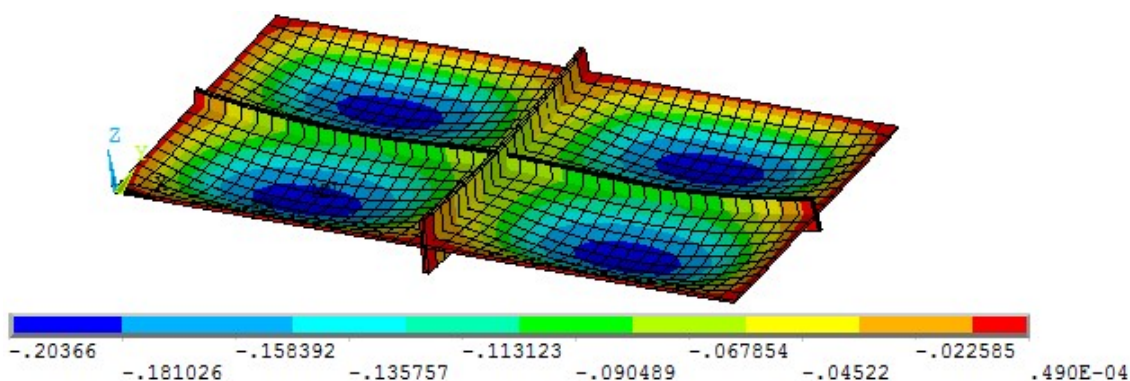


Figura 22. Deslocamento em z (cm) para o Modelo 1.

Fonte: Autoria própria (2021).

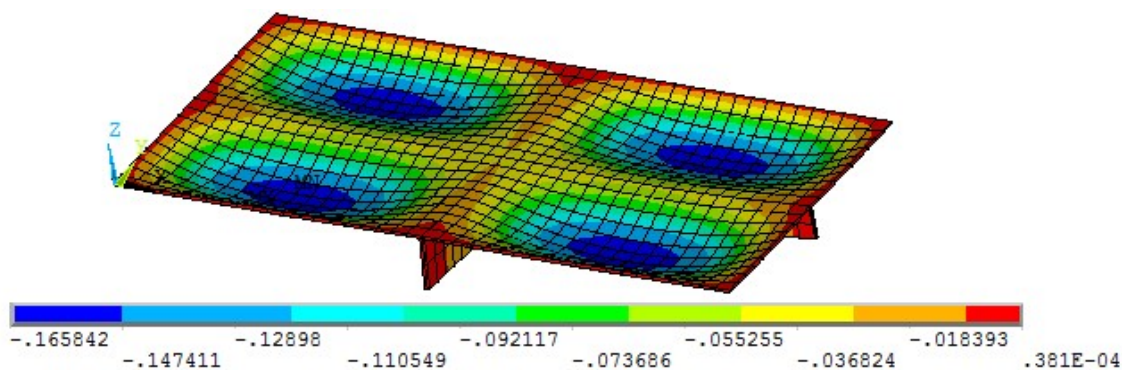


Figura 23. Deslocamento em z (cm) para o Modelo 2.

Fonte: Autoria própria (2021).

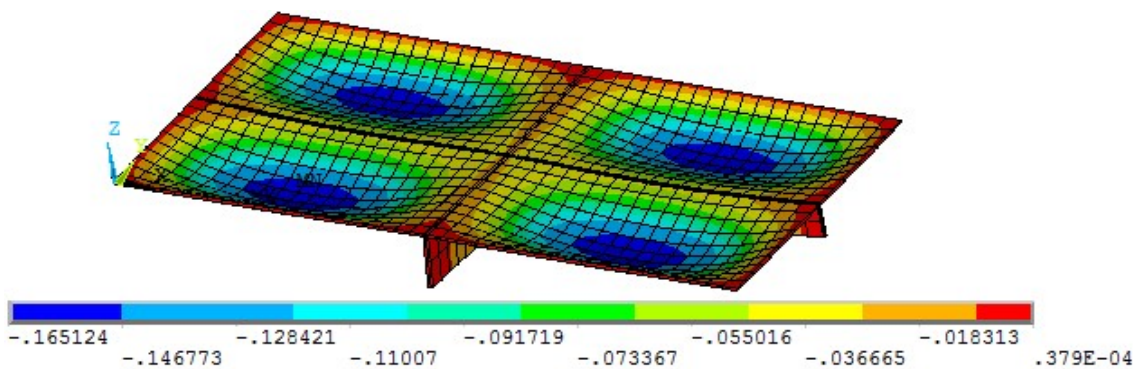


Figura 24. Deslocamento em z (cm) para o Modelo 3.

Fonte: Autoria própria (2021).

Foram realizados ainda gráficos com os deslocamentos ao longo dos cortes 1-1 e 2-2 mostrados na Figura 25, cujos resultados estão nas Figuras 26 e 27. Note que a viga V2 (vista no corte 1-1) tem um menor vão e apoia a viga V1 (vista no corte 2-2) que passa na outra direção. O Modelo 1 é o mais flexível e os Modelos 2 e 3 são mais rígidos e possuem valores próximos. Neste caso o deslocamento também é fortemente condicionado pelo efeito da excentricidade. Como a espessura da placa é pequena, faz sentido a proximidade entre respostas excêntricas.

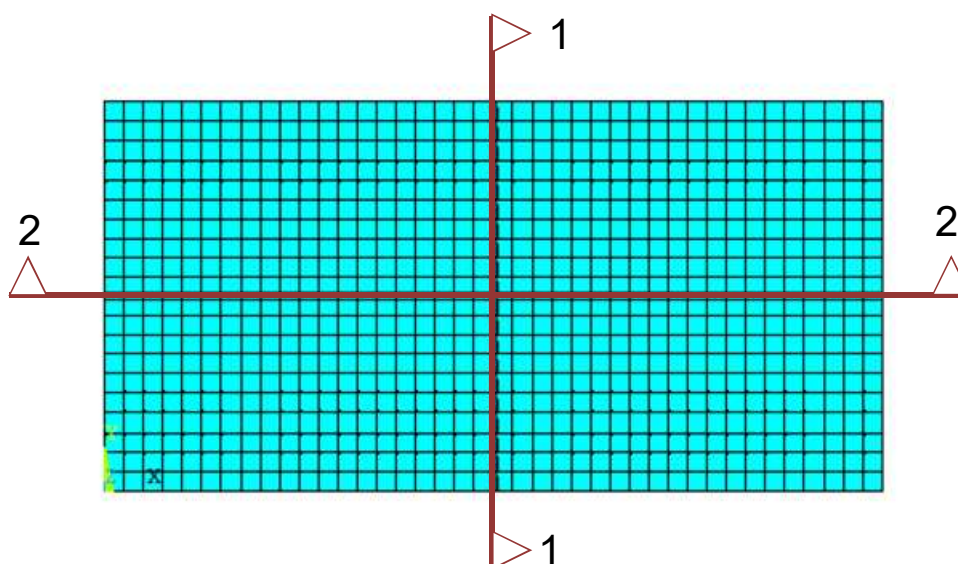


Figura 25. Corte 1-1 e corte 2-2.

Fonte: Autoria própria (2021).

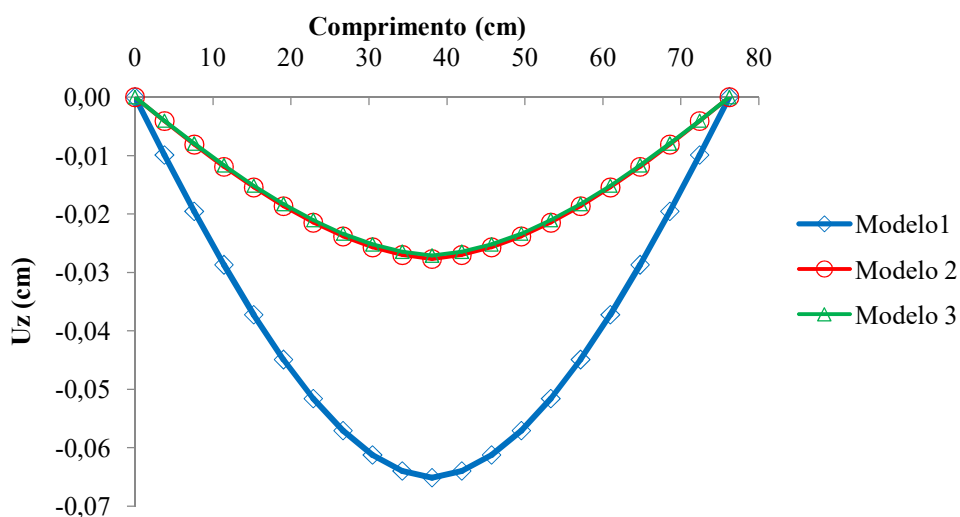


Figura 26. Deslocamentos em z (U_z) ao longo do corte 1-1 (ver Figura 25) para cada modelo.

Fonte: Autoria própria (2021).

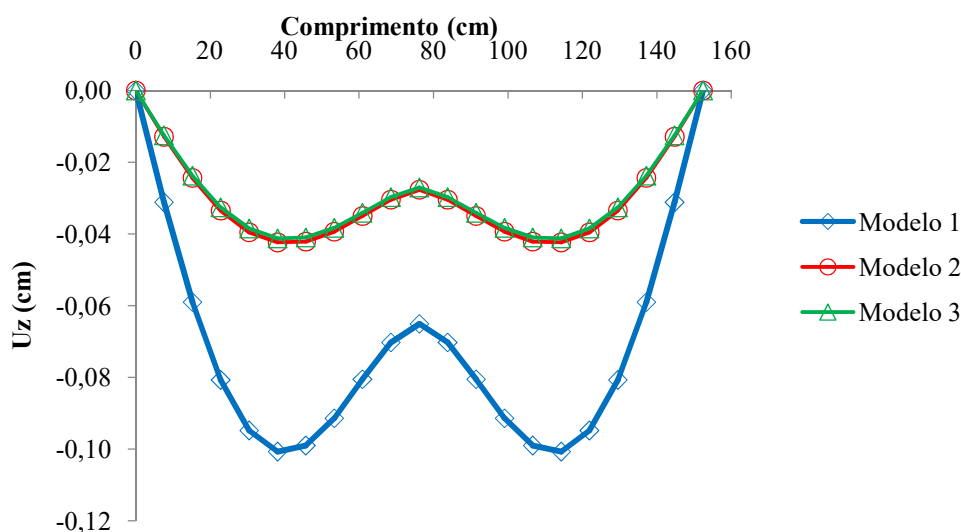


Figura 27. Deslocamentos em z ao longo do corte 2-2 (ver Figura 25) para cada modelo.
Fonte: Autoria própria (2021).

Na Tabela 5 estão os valores máximos dos deslocamentos em z no centro da placa. Aliás, também são apresentados os resultados de Rossow e Ibrahimkhail (1978), Bedair (1997) e Silva (2010), que não consideram o efeito de deformações por cisalhamento. Neste caso, fica evidente uma maior diferença nas respostas, principalmente para os casos excêntricos.

Tabela 5 - Deslocamentos em z (U_z) no centro da placa.

Referência	Uz (cm)	
	Concêntrico	Excêntrico
Rossow e Ibrahimkhail (1978)	0,06122	0,02245
Bedair (1997)	0,06096	0,02032
Silva (2010): Modelo 1	0,06099	-
Silva (2010): Modelo 2	-	0,021830
Silva (2010): Modelo 3	-	0,021480
Presente trabalho: Modelo 1	0,065100	-
Presente trabalho: Modelo 2	-	0,027683
Presente trabalho: Modelo 3	-	0,027096

Fonte: Autoria própria (2021).

A comparação em termos percentuais com Silva (2010) é apresentada na Tabela 6.

Tabela 6 - Comparação dos deslocamentos em z (U_z).

Local	Uz (cm)						Diferenças do presente trabalho em relação a Silva (2010)		
	Silva (2010)			Presente trabalho					
	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3
Centro	0.06099	0.02183	0.02148	0.065100	0.027683	0.027096	6,74%	26.81%	26.15%

Fonte: Autoria própria (2021).

Para esta estrutura, no Modelo 1 ($H_{viga1} / L_{viga1} = 0,050$ e $H_{viga2} / L_{viga2} = 0,167$) a diferença foi inferior a 10%. Mesmo assim, é possível identificar uma maior divergência nas respostas perante as demais estruturas estudadas anteriormente. No Modelo 2 ($H_{viga1} / L_{viga1} =$

0,050 e $H_{\text{viga2}} / L_{\text{viga2}} = 0,167$) e no Modelo 3 ($H_{\text{viga1}} / L_{\text{viga1}} = 0,054$ e $H_{\text{viga2}} / L_{\text{viga2}} = 0,175$) ocorreram diferenças significativas, com deslocamentos superiores a mais 25% em comparação com a referência de Silva (2010). Ou seja, a deformação por cisalhamento influenciou de forma acentuada na resposta, propiciando maiores deslocamentos na estrutura. Também é importante destacar o fato da espessura da placa ser delgada ($H_{\text{placa}} / L_{\text{placa}} = 0,004$)e, conseqüentemente, pouco interferir no resultado. Esse resultado sugere que a diferença entre as respostas está relacionada com maior relação H / L da viga V2 (ver Figuras 8 e 10).

Cabe ressaltar ainda que a Estrutura 3 difere das demais (Estrutura 1 e Estrutura 2) pelo fato de vigas se cruzarem no centro sem a existência de apoio rígido neste ponto. Inclusive, na Figura 27 observa-se que o deslocamento da viga V1 (indicada na Figura 8) é reduzido próximo do meio do vão. Neste caso, devido à diferença de rigidez das vigas, no centro da placa a viga V1 se apoia sobre a viga V2, configurando como um carregamento concentrado ou apoio indireto. Tal fato torna essa região mais propensa a sofrer efeitos da deformação por força cortante, o que certamente influenciou nos resultados dos deslocamentos. Neste caso, a consideração do efeito das deformações por cisalhamento influenciou de forma mais pronunciada nas respostas com excentricidade. Isso confirma a tendência observada nas estruturas anteriores de que as estruturas excêntricas são mais suscetíveis a efeitos do cisalhamento.

4 Conclusões

O trabalho desenvolvido analisou, sobretudo, o efeito das deformações cisalhantes no deslocamento vertical de estruturas considerando a excentricidade entre o plano médio da placa e o eixo longitudinal da viga. De modo geral, dependendo do carregamento aplicado e das características dimensionais e geométricas da estrutura, tanto a deformação por força cortante quanto a excentricidade podem influenciar significativamente nas flechas elásticas da estrutura.

Na análise comparativa entre os modelos estudados, os resultados dos deslocamentos evidenciam que o modelo concêntrico é aquele mais flexível. Já os modelos excêntricos são mais rígidos. Tal constatação é explicada pela maior rigidez do conjunto excêntrico, que contempla a rigidez de cada elemento e também a parcela adicional decorrente da excentricidade existente. Isso mostra que a consideração da excentricidade pode promover projetos mais eficientes por meio do melhor aproveitamento da capacidade resistente da estrutura. Na comparação específica entre os modelos excêntricos, foi possível observar que a divergência nas respostas está diretamente relacionada com a diferença entre as excentricidades.

Sobre o efeito das deformações cisalhantes, a comparação com trabalhos da literatura levou a conclusões interessantes. Em todos os casos, a adição da parcela da deformação cisalhante levou a maiores deslocamentos. Para os conjuntos viga-placa com alturas menores em relação ao comprimento, a deformação por força cortante interfere pouco nos resultados. Por outro lado, em estruturas cujos elementos apresentem uma maior relação entre altura e comprimento, bem como concentração de carregamento, a consideração do efeito das deformações por cisalhamento é relevante, sobretudo, nos casos excêntricos. Portanto, no contexto das estruturas aqui estudadas, os casos excêntricos são mais suscetíveis aos efeitos do esforço cortante na deformação.

Por fim, os resultados aqui obtidos contribuem no sentido de promover uma análise minuciosa do comportamento de estruturas. Inclusive, ressalta que hipóteses simplificadoras

podem negligenciar fenômenos importantes e, conseqüentemente, não refletir de forma suficientemente precisa a realidade, principalmente em casos mais complexos.

Agradecimentos

Agradecemos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

Referências

ANSYS (2018). **Versão: Mechanical - Release 18.0.**

ARNOLD, D. N.; MADUREIRA, A.L.; ZHANG, S. On the Range of Applicability of the Reissner–Mindlin and Kirchhoff–Love Plate Bending Models. **Journal of Elasticity**. v.67, p.171–185, 2002.

BECK, A. T.; SILVA, C. R. A. Timoshenko versus Euler beam theory: Pitfalls of a deterministic approach. **Structural Safety**. v.33, p.19-25, 2011.

BEDAIR, O.K. Analysis of Stiffened Plates Under Lateral Loading Using Sequential Quadratic Programing (SQP). **Computer & Structures**. v.62, n.1, p.63-80, 1997.

CARVALHO, P. G. S. Análise estrutural de placas: modelagem computacional para as teorias de Reissner-Mindlin e Kirchhoff. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 37, 2016, Brasília. **Anais... Brasília** : ABMEC, 2016. 20p.

CARRER, J. A. M.; SCUCIATO, R. F.; GARCIA, L. F. T. The Boundary Element Method Applied to the Analysis of Euler – Bernoulli and Timoshenko Continuous Beams. **Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering**, v.44, n. 3, p.875–888, 2020.

DEB, A.; DEB, M. K.; BOOTON, M. Analysis of orthotropically modeled stiffened plates. **International Journal of Solids and Structures**. v.27, n.5, p. 647-664, 1991.

DESTUYNDER, F. Estimations d’erreur explicites pour les modèles de plaques de Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin. **Problèmes mathématiques de la mécanique**. v.325, n.1, p.233-238, 1997.

DIAS, R. H. **Análise numérica de pavimentos de edifícios em lajes nervuradas**. 2003. 455 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos/Universidade de São Paulo, EESC-USP. São Carlos, SP.

FREUND, J. Shear-corrected Reissner-Mindlin plate model. **Composite Structures**, v.211, p.144–153, 2019.

KIRCHHOFF, G. R. Über das gleichgewicht und die bewegungeinerelastischenscheibe. **Journal für die reine und angewandteMathematik**, v. 40, p.51–88, 1850.

LOVE, A. E. H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, JSTOR, v.179, p.491–546, 1888.

MILLER, R. E. Reduction of error in eccentric beammodelling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v.15, p.575-582, 1980.

MINDLIN, R. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic, elastic plates. **Journal of Applied Mechanics**.v.18, p.31-38, 1951.

OÑATE, E. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Volume 2. Beams, Plates and Shells**. Barcelona:Springer Netherlands, 2013.

OTA, N. S. N.; WILSON, L.; GAY NETO, A.; PELLEGRINO, S.; PIMENTA, P. M. Nonlinear dynamic analysis of creased shells. **Finite Elements in Analysis and Design**.v.121, p. 64–74, 2016.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. **Journal of Applied Mechanics**.v.12, p.69-76, 1945.

ROSSOW, M. P.; IBRAHIMKHAIL, A. K. 1978. Constraint Method Analysis of Stiffened Plates. **Computers&Structures**. v.8, p.51-60, 1978.

SILVA, H. B. S. **Análise numérica da influência da excentricidade na ligação placa-viga em pavimentos usuais de edifícios**. 2010. 195p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, EESC-USP. São Carlos, SP.

TANAKA, M.; BERCIN, A. N. Static bending analysis of stiffened plates using the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**.v.21, p.147-154, 1998.

TIMOSHENKO, S. P. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. **Philosophical Magazine**. v.41, p.744-746, 1921.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. Singapore: McGraw-Hill, 1959.

WAN, C.; AUDI, C.; SASANI, M. Modeling floor systems for collapse analysis. **Engineering Structures**.v.127, p.278-286, 2016.

WANG, S.; TONG, G.; ZHANG, L. Reduced stiffness of composite beams considering slip and shear deformation of steel. **Journal of Constructional Steel Research**, v.131, p.19-29, 2017.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 6^a Edição. [S.l.]: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.