Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

Estudo Comparativo entre Métodos de Cálculo da Carga Equivalente em Vigas Hiperestáticas Protendidas

Comparative study between methods of calculating the equivalent load in prestressed hyperestatic beams

Winston Junior Zumaeta Moncayo[1]
Rafael Alves de Souza[2]
Carlos Humberto Martins[2]

Resumo

Na maioria dos casos de vigas hiperestáticas de concreto moldadas no local, onde obviamente os apoios são restringidos, as ações hiperestáticas podem ser significativas e devem ser consideradas em um projeto. Com o intuito de simplificar o cálculo manual de vigas contínuas protendidas e obter uma boa precisão considerando a inversão dos cabos protendidos sobre os apoios, este trabalho tem por objetivo mostrar qual o método mais simples e com boa precisão para o cálculo da carga equivalente em vigas protendidas. Para isso, um exemplo de viga contínua será resolvido considerando três métodos distintos de cálculo de cargas equivalentes, que foram apresentados em Naaman (2004), Thomaz (2009) e Skaf e Stucchi (1995). Todos os resultados serão analisados considerando o método apresentado em Naaman (2004) como sendo o método com maior precisão. E a conclusão obtida é que o método mais simples, prático e com boa precisão considerando o cálculo manual é o que foi apresentado em Skaf e Stucchi (1995).

Palavras-chaves: Vigas protendidas; Vigas hiperestáticas; Vigas Contínuas; Carga equivalente; Balanceamento de carga; Cabo parabólico.

Abstract

In most cases of cast-in-place hyperstatic concrete beams, where obviously supports are restricted, the hyperstatic actions can be significant and should be considered in a design. To simplify the manual calculation of prestressed continuous beams and obtain good accuracy

[1]Departamento de Engenharia Civil - Universidade Federal do Amazonas
[2]Departamento de Engenharia Civil - Universidade Estadual de Maringá
Autor correspondente: zumaeta@ufam.edu.br

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

considering the inversion of prestressed cables on the supports, this work aims to show the simplest and most accurate method for calculating the equivalent load on prestressed beams. For this, an example of a continuous beam will be solved considering three different methods of calculating equivalent loads, which were presented in Naaman (2004), Thomaz (2009) and Skaf and Stucchi (1995). All results will be analyzed considering the method presented in Naaman (2004) as the most accurate method. And the conclusion obtained is that the simplest, most practical and with good precision method considering the manual calculation is the one presented in Skaf and Stucchi (1995).

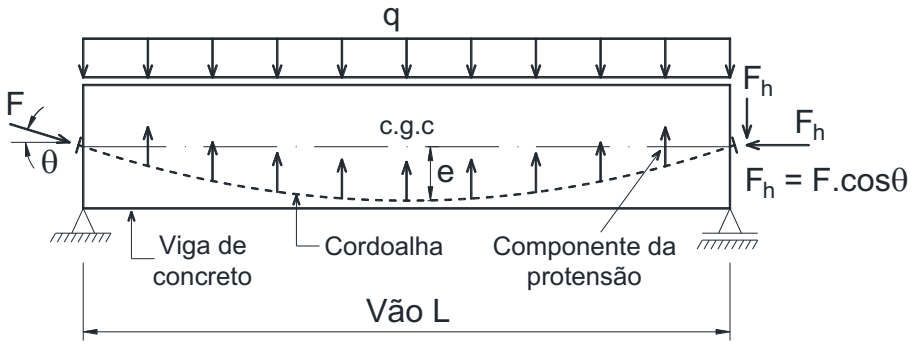
Keywords: Prestressed beams; Hyperstatic beams; Continuous beams; Equivalent load; load-balancing; Parabolic cable.

1. Introdução

Lin (1963) apresentou o conceito de balanceamento de carga para estruturas de concreto protendido como uma terceira abordagem após a tensão elástica e os métodos de resistência última de projeto e análise.

O balanceamento de carga vê a protensão como uma forma de equilibrar uma parte da carga na estrutura. Esse conceito possui uma abordagem bem mais simples para o projeto e análise de concreto protendido, porém sua vantagem sobre os métodos anteriores não é tão significativa quando a estrutura é isostática. Já para os casos de estruturas hiperestáticas, que é o foco deste estudo, o método de balanceamento de carga oferece grandes vantagens tanto no cálculo quanto na visualização. De acordo com esse método, a força de protensão equilibra uma parte das cargas, de modo que uma viga com cargas transversais não estaria submetida à flexão até uma determinada condição de carregamento, ou seja, mesmo com cargas transversais estaria submetida apenas às tensões axiais devido à força de protensão.

Na Figura 1, pode-se ver uma carga *q* uniformemente distribuída aplicada a uma viga biapoiada, que é balanceada pela componente vertical produzida pelo cabo de protensão.



Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

Figura 1. Método do balanceamento de carga em uma viga de concreto protendido. Adaptada de Lin (1963).

Para cabos parabólicos com pequena excentricidade e vão L e carga distribuída q, encontra-se a seguinte expressão:

$$M_{\text{máx},F} = M_{\text{máx},q} \rightarrow F_h \cdot e = \frac{qL^2}{8} \rightarrow Fe = \frac{qL^2}{8} \rightarrow F = \frac{qL^2}{8\text{e}} \quad (1)$$

A viga da Figura 1 fica submetida a uma força axial $F \cdot \cos\theta$ e as tensões σ no concreto em qualquer seção são dadas pela expressão a seguir, onde A_c é a área da seção transversal de concreto.

$$\sigma = \frac{F \cdot \cos\theta}{A_c} \quad (2)$$

Ainda segundo Lin (1963), a aplicação do método de balanceamento de carga a vigas contínuas protendidas simplifica bastante o seu dimensionamento e análise. Uma viga contínua sob a ação equilibrada entre a componente transversal da protensão e a carga externa aplicada, tem uma tensão uniforme σ em qualquer seção da viga que pode ser calculada por meio da seguinte expressão.

$$\sigma = \frac{F}{A_c} \quad (3)$$

Para qualquer alteração dessa condição de carga balanceada, a viga ficará submetida à flexão e a análise elástica comum pode ser aplicada à diferença de carga para obter o momento fletor *M* em qualquer seção, e as tensões normais resultantes são calculadas a partir da expressão a seguir, onde *c* é a distância da linha neutra até o ponto que se quer obter a tensão normal e *I* é o momento de inércia em relação à linha neutra.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad (4)$$

Com isso, Lin (1963) concluiu que após o balanceamento de carga, a análise de vigas contínuas protendidas se reduz à análise de vigas contínuas não protendidas. E a aplicação do método em vigas hiperestáticas não apenas economiza tempo, mas também apresenta uma abordagem realista que ajuda o engenheiro a visualizar o efeito da protensão.

A abordagem apresentada em Lin (1963) não considerou a inversão dos cabos protendidos sobre os apoios no caso de vigas contínuas. Segundo Aalami (2000), na prática, os cabos não podem ser colocados com ângulos agudos sobre os apoios, como mostra a figura 2.

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

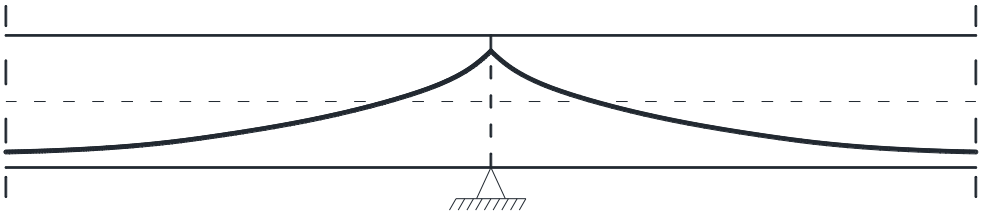


Figura 2. Viga contínua com cabo protendido sem inversão sobre o apoio.

O ideal é um cabo com curvatura gradual, ou seja, com a inversão sobre os apoios, conforme mostra a figura 3.

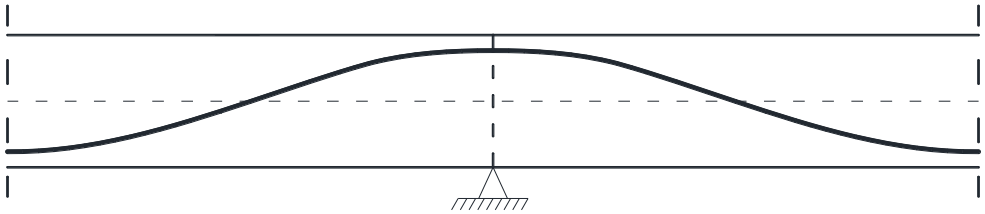


Figura 3. Viga contínua com cabo protendido considerando inversão sobre o apoio.

Quando a inversão dos cabos sobre os apoios é considerada, a força transmitida por um cabo protendido ao concreto torna-se bem mais complexa e isso dificulta o cálculo manual. Normalmente esse refinamento da precisão do cálculo é realizada em conjunto com um software.

Aalami (2000) enfatiza que a modelagem e análise estrutural de elementos protendidos não está completa a menos que sejam consideradas as ações hiperestáticas causadas pela protensão. Tais ações desenvolvem-se em uma viga protendida devido a restrição dos apoios ao movimento livre. Se a viga protendida pode se deslocar livremente, como no caso de estruturas isostáticas, nenhum momento hiperestático é gerado. Na maioria dos casos de vigas hiperestáticas de concreto moldadas no local, onde obviamente os apoios são restringidos, as ações hiperestáticas podem ser significativas e devem ser consideradas em um projeto.

Com o intuito de simplificar o cálculo manual e obter uma boa precisão considerando a inversão dos cabos protendidos sobre os apoios, este trabalho tem por objetivo mostrar qual o método mais simples e com boa precisão para o cálculo da carga equivalente em vigas contínuas. Para isso, um exemplo de viga contínua será resolvido considerando três métodos distintos de cálculo de cargas equivalentes, que foram apresentados em Naaman (2004), Thomaz (2009) e Skaf e Stucchi (1995). Todos os resultados serão analisados considerando o método apresentado em Naaman (2004) como sendo o método com maior precisão.

Neste trabalho também há um anexo mostrando todo o procedimento para o traçado dos

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

diagramas de esforços solicitantes, mostrando em detalhes os cálculos para a obtenção dos momentos hiperestáticos pelo método indireto, conforme definido em Aalami (1998).

2. Métodos da carga equivalente analisados neste estudo

A seguir serão abordados os três métodos que foram analisados neste estudo, que são os métodos apresentados em Naaman (2004), Thomaz (2009) e Skaf e Stucchi (1995). Nos três métodos as perdas de protensão foram desprezadas, considerando-se uma força de protensão média ao longo de toda a viga. Vale destacar que a primeira publicação do livro de Naaman foi em 1982 e Thomaz (2009) utilizou como base o seguinte trabalho, KUCHLER, T. W. Consistent treatment of prestress in the concept of structural concrete. International association for bridge and structural engineering. Anais. New Delhi, 1993.

2.1 Método apresentado em Naaman (2004)

2.1.1 Formulações consideradas

As formulações foram apresentadas em Naaman (2004). Em Emerick (2005) foi apresentada a mesma formulação com uma pequena adaptação no sentido das ordenadas e na nomenclatura da excentricidade, passando de e_{0B} para e_0, conforme poderá ser visto nos itens a seguir. Porém essa pequena adaptação não interferiu no método

2.1.1.1 Vãos de extremidade

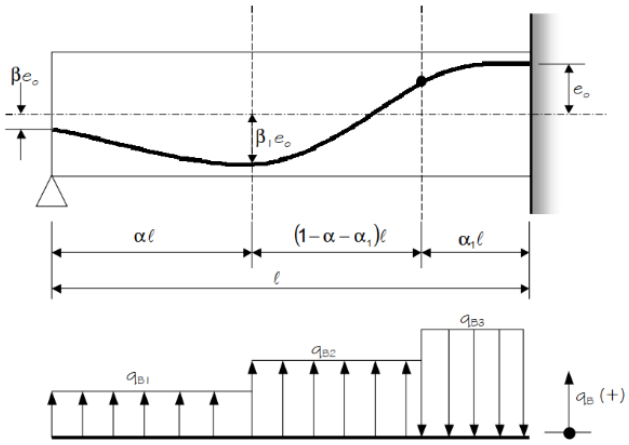


Figura 4. Cálculo da carga equilibrada com a protensão para vãos de extremidade.
Fonte: Emerick (2005)

$$q_{B1} = \frac{2P \cdot (\beta_1 - \beta) \cdot e_0}{(\alpha \ell)^2} \quad (5)$$

$$q_{B2} = \frac{2P \cdot \lambda \cdot e_0}{\ell^2} \quad (6)$$

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

$$q_{B3} = -\frac{2P \cdot \mu \cdot e_0}{\ell^2} \quad (7)$$

Sendo:

$$\lambda = \frac{1+\beta_1}{(1-\alpha)\cdot(1-\alpha-\alpha_1)} \quad (8)$$

$$\mu = \frac{1+\beta_1}{(1-\alpha)\cdot\alpha_1} \quad (9)$$

Para os valores das constantes α, α_1 e β, usualmente, adotam-se 0,50 (meio do vão), 0,10 e 0,0 (cabo ancorado no C.G), respectivamente.

2.1.1.2 Vãos internos

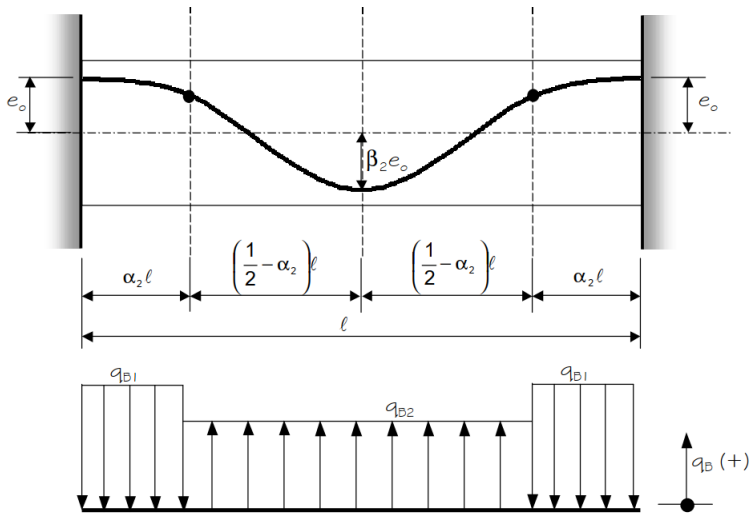


Figura 5. Cálculo da carga equilibrada com a protensão para vãos internos.
Fonte: Emerick (2005)

$$q_{B1} = -\frac{4P \cdot (1+\beta_2) \cdot e_0}{\alpha_2 \ell^2} \quad (10)$$

$$q_{B2} = \frac{4P \cdot (1+\beta_2) \cdot e_0}{\left(\frac{1}{2}-\alpha_2\right) \cdot \ell^2} \quad (11)$$

Para o valor da constante α_2, usualmente, adota-se de 0,05 a 0,15, neste trabalho será considerado igual a 0,10.

2.2 Método apresentado em Thomaz (2009)

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

2.2.1 Cálculo das cargas atuantes nos apoios de extremidade

2.2.1.1 Componente vertical da força de protensão

A componente vertical é calculada considerando o ângulo α de aplicação da força de protensão, com a expressão a seguir.

$$P_V = P \cdot sen\ \alpha \tag{12}$$

2.2.1.2 Componente horizontal da força de protensão

A componente horizontal é calculada considerando o ângulo α de aplicação da força de protensão, com a expressão a seguir.

$$P_H = P \cdot cos\ \alpha \tag{13}$$

2.2.2 Cálculo das cargas equivalentes atuantes nos trechos

As cargas equivalentes são calculadas para cada trecho específico *i*, considerando o ângulo α_j da tangente à parábola no trecho analisado, com a expressão a seguir.

$$q_{Bi} = \frac{P \cdot sen\ \alpha_j}{\ell_i} \tag{14}$$

2.2.3 Equações das parábolas e ângulos das retas tangentes

Observa-se que no método apresentado em Naaman (2004) não foi necessário considerar os ângulos que as retas tangentes formam com a horizontal, pois as formulações apresentadas no método independem desses ângulos. Já neste que foi apresentado por Thomaz (2009) e no que será apresentado no item 2.3, serão necessários conhecer esses ângulos das tangentes à parábola.

Por esse motivo, com o intuito de agilizar esse cálculo, foram deduzidas pelo próprio autor toda a formulação para calcular esses ângulos das tangentes. A seguir serão apresentadas as formulações para encontrar as equações dos traçados parabólicos e os ângulos já mencionados.

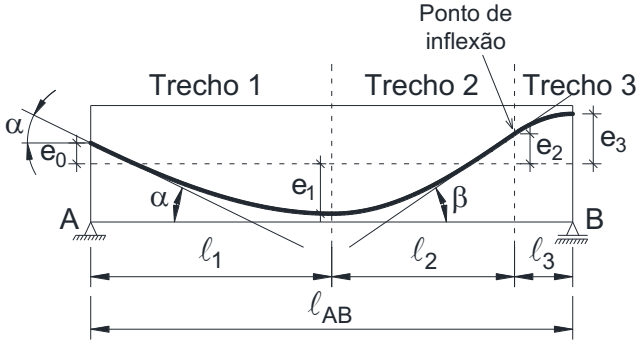


Figura 6. Traçado do cabo de protensão parabólico em vão de extremidade.
Fonte: Autoria própria.

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

A equação da parábola e o ângulo da tangente no trecho 1 ($0 \leq x_1 \leq \ell_1$) podem ser encontradas com as equações (15) e (16), respectivamente.

$$y_1(x_1) = \left(\frac{e_0 + e_1}{\ell_1^2}\right) x_1^2 - 2\left(\frac{e_0 + e_1}{\ell_1}\right) x_1 + e_0 \tag{15}$$

$$\alpha = Arctg\left[-2\left(\frac{e_0 + e_1}{\ell_1}\right)\right] \tag{16}$$

A equação da parábola e o ângulo da tangente no trecho 2 ($0 \leq x_2 \leq \ell_2$) podem ser encontradas com as fórmulas 17 e 18, respectivamente.

$$y_2(x_2) = \left(\frac{e_1 + e_2}{\ell_2^2}\right) x_2^2 - e_1 \tag{17}$$

$$\beta = Arctg\left[2\left(\frac{e_1 + e_2}{\ell_2}\right)\right] \tag{18}$$

Onde:

$$e_2 = \frac{e_3 \ell_2 - e_1 \ell_3}{\ell_2 + \ell_3} \tag{19}$$

A equação da parábola e o ângulo da tangente no trecho 3 ($0 \leq x_3 \leq \ell_3$) podem ser encontradas com as fórmulas 20 e 21, respectivamente.

$$y_3(x_3) = \left(\frac{e_2 - e_3}{\ell_3^2}\right) x_3^2 - 2\left(\frac{e_2 - e_3}{\ell_3}\right) x_3 + e_2 \tag{20}$$

$$\beta = Arctg\left[-2\left(\frac{e_2 - e_3}{\ell_3}\right)\right] \tag{21}$$

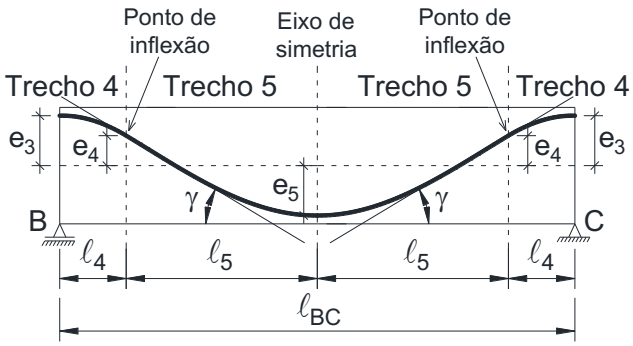


Figura 7. Traçado do cabo de protensão parabólico em vão interno.
Fonte: Autoria própria.

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

A equação da parábola e o ângulo da tangente no trecho 4 ($0 \leq x_4 \leq \ell_4$) podem ser encontradas com as equações (22) e (23), respectivamente.

$$y_4(x_4) = \left(\frac{e_4 - e_3}{\ell_4^2}\right) x_4^2 + e_3 \quad (22)$$

$$\gamma = Arctg\left[2\left(\frac{e_4 - e_3}{\ell_4}\right)\right] \quad (23)$$

Onde:

$$e_4 = \frac{e_3\ell_5 - e_5\ell_4}{\ell_4 + \ell_5} \quad (24)$$

A equação da parábola e o ângulo da tangente no trecho 5 ($0 \leq x_5 \leq \ell_5$) podem ser encontradas com as equações (25) e (26), respectivamente.

$$y_5(x_5) = \left(\frac{e_4 + e_5}{\ell_5^2}\right) x_5^2 - 2\left(\frac{e_4 + e_5}{\ell_5}\right) x_5 + e_4 \quad (25)$$

$$\gamma = Arctg\left[-2\left(\frac{e_4 + e_5}{\ell_5}\right)\right] \quad (26)$$

2.3 Método apresentado em Skaf e Stucchi (1995)

O método apresentado em Skaf e Stucchi (1995) têm a mesma premissa do apresentado em Thomaz (2009), porém a diferença é que as componentes verticais utilizadas no cálculo das cargas equivalentes são calculadas utilizando-se a tangente do ângulo e não o seno, conforme foi apresentado no item 2.2.2. Outra diferença importante é em relação a componente horizontal da força de protensão, que devido a consideração de ângulos pequenos, resulta em uma componente horizontal praticamente igual a própria força *P*.

De acordo com MENEGATTI (2004), deve ser utilizado a tangente do ângulo para se obter um equilíbrio exato das cargas, esse fato se justifica devido as aproximações feitas no cálculo da carga equivalente, que são consideradas perpendiculares ao eixo da viga e não perpendiculares à trajetória do cabo, como realmente é.

2.3.1 Cálculo das cargas atuantes nos apoios de extremidade

2.3.1.1 Componente vertical da força de protensão

A componente vertical é calculada considerando o ângulo α de aplicação da força de protensão, com a expressão a seguir.

$$P_V = P \cdot tg\ \alpha \quad (27)$$

2.3.1.2 Componente horizontal da força de protensão

A componente horizontal é aproximadamente igual a própria força de protensão *P*.

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

2.3.2 Cálculo das cargas equivalentes atuantes nos trechos

As cargas equivalentes são calculadas para cada trecho específico i, considerando o ângulo α_j da tangente à parábola no trecho analisado, com a expressão a seguir.

$$q_{Bi} = \frac{P \cdot tg\ \alpha_j}{\ell_i} \tag{28}$$

Assim como no método apresentado em Thomaz (2009), neste também é necessário saber o ângulo que a reta tangente à parábola forma com a horizontal, e podem ser utilizadas as mesmas formulações já apresentadas no item 2.2.3.

3 Resolução do exemplo

3.1 Viga estudada

A viga que será estudada está apresentada na Figura 8. Serão calculadas as cargas equivalentes geradas pela protensão por três métodos diferentes, com o objetivo de avaliar qual o método mais simples de calcular manualmente e que possui boa precisão. Observa-se que está sendo representada apenas a metade da viga, com o intuito de melhorar a visualização.

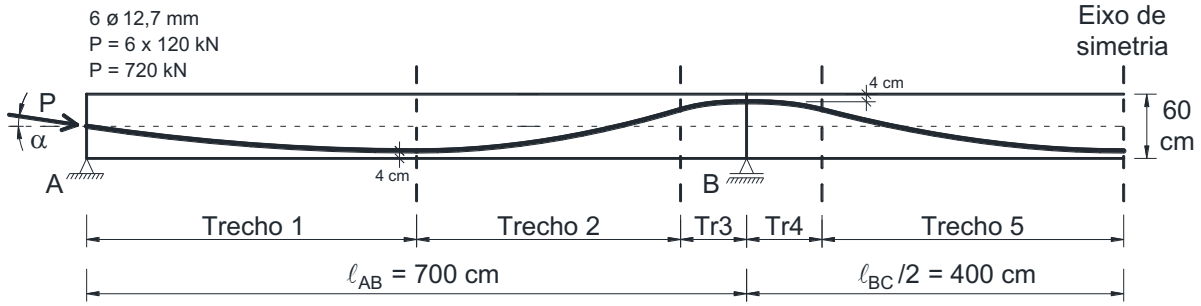


Figura 8. Viga que será estudada.

Adaptada de Emerick (2005).

3.1.1 Cálculo do comprimento dos trechos

Os comprimentos dos 5 trechos são calculados de acordo com as expressões apresentadas na Figura 9, que foram adaptadas a partir das expressões apresentadas nas Figuras 4 e 5.

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

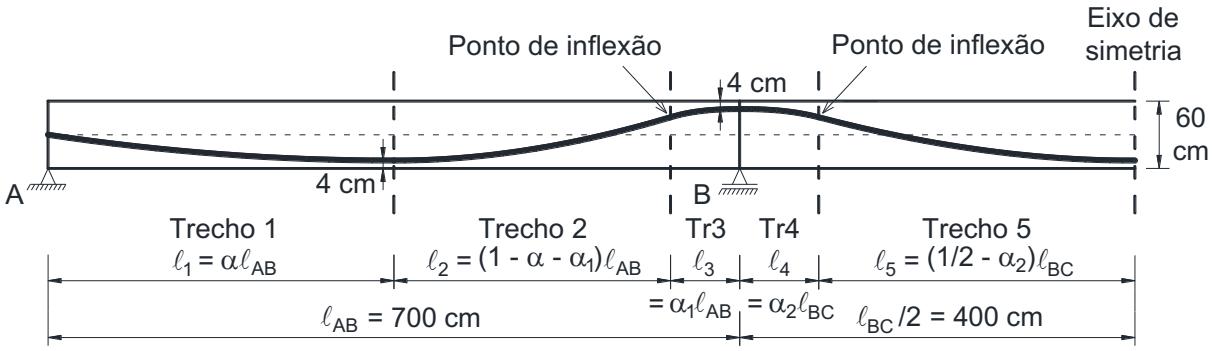


Figura 9. Expressões para o cálculo dos comprimentos dos trechos da viga contínua protendida

$$\ell_1 = \alpha\ell_{AB} = 0{,}5 \cdot 700 = 350 \text{ cm}$$
$$\ell_2 = (1 - \alpha - \alpha_1)\ell_{AB} = (1 - 0{,}5 - 0{,}1) \cdot 700 = 280 \text{ cm}$$
$$\ell_3 = \alpha_1\ell_{AB} = 0{,}1 \cdot 700 = 70 \text{ cm}$$
$$\ell_4 = \alpha_2\ell_{BC} = 0{,}1 \cdot 800 = 80 \text{ cm}$$
$$\ell_5 = \left(\frac{1}{2} - \alpha_2\right) \cdot \ell_{BC} = \left(\frac{1}{2} - 0{,}1\right) \cdot 800 = 320 \text{ cm}$$

Na Figura 10 estão representados os comprimentos calculados dos trechos da viga. Esses comprimentos serão considerados na análise dos três métodos.

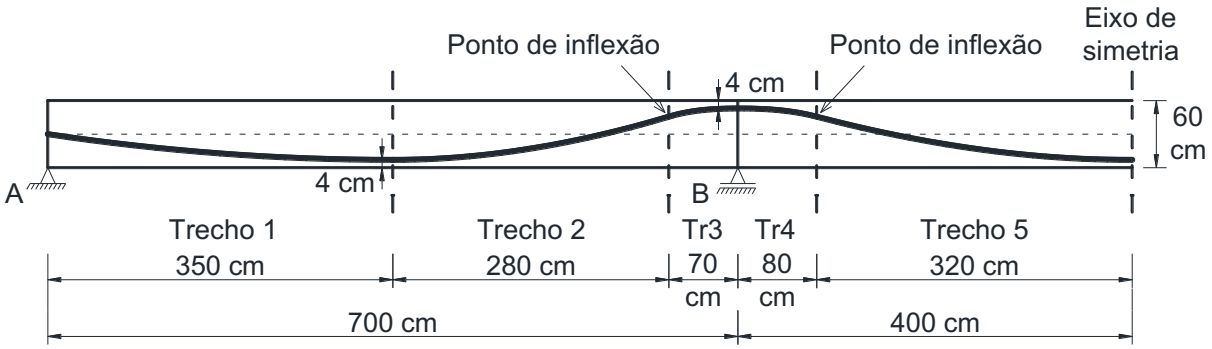


Figura 10. Comprimentos calculados dos trechos da viga contínua protendida.

3.1.2 Método apresentado em Naaman (2004)

Na Figura 11, pode-se observar um esquema estático com as cargas equivalentes distribuídas que serão calculadas.

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

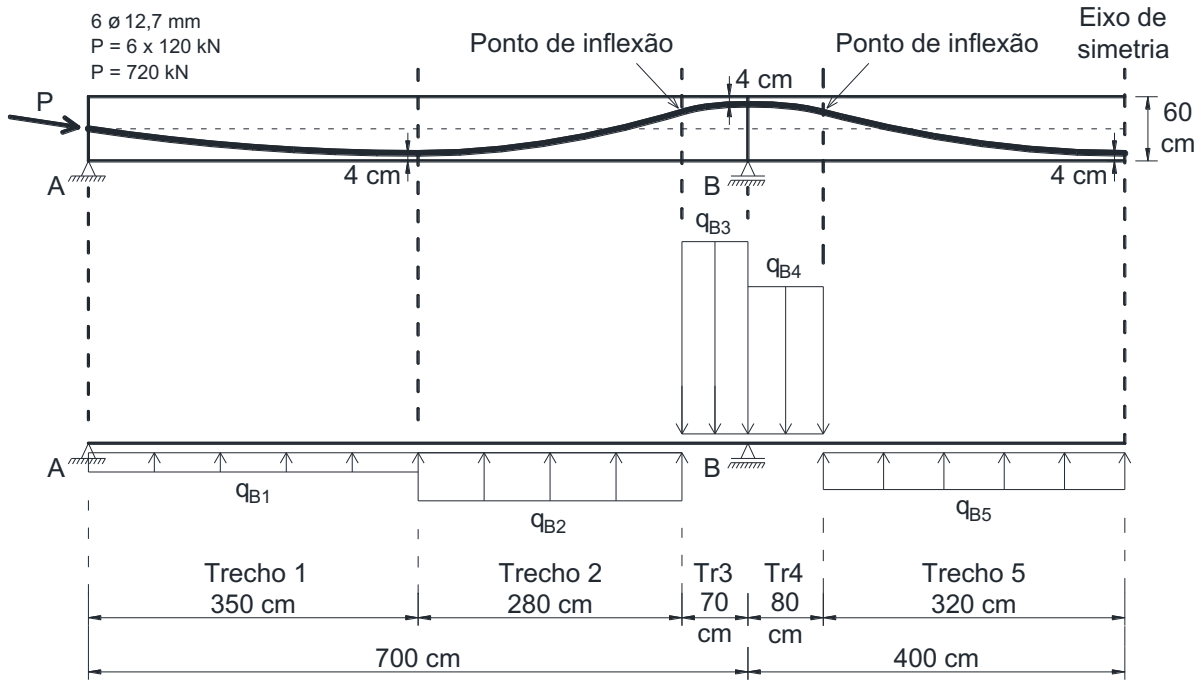


Figura 11. Esquema estático da viga com cargas equivalentes distribuídas.

Fonte: Autoria própria.

A seguir serão calculadas as cargas equivalentes distribuídas no vão de extremidade da viga contínua, seguindo os procedimentos do item 2.1.1.1.

$$e_0 = \frac{h_{viga}}{2} - y = \frac{0{,}60}{2} - 0{,}04 = 0{,}30 - 0{,}04 = 0{,}26 \text{ m}$$

$$q_{B1} = \frac{2P \cdot (\beta_1 - \beta) \cdot e_0}{(\alpha \ell_{AB})^2} = \frac{2 \cdot 720 \cdot (1-0) \cdot 0{,}26}{(0{,}5 \cdot 7{,}0)^2} = \frac{374{,}40}{12{,}25} \cong 30{,}56 \text{ kN/m}$$

Para o cálculo de q_{B2}, será necessário obter o valor de λ primeiro, dessa forma, obtém-se:

$$\lambda = \frac{1+\beta_1}{(1-\alpha)\cdot(1-\alpha-\alpha_1)} = \frac{1+1}{(1-0{,}5)\cdot(1-0{,}5-0{,}1)} = \frac{2}{(0{,}5)\cdot(0{,}4)} = \frac{2}{0{,}2} = 10$$

$$q_{B2} = \frac{2P \cdot \lambda \cdot e_0}{\ell_{AB}^2} = \frac{2 \cdot 720 \cdot 10 \cdot 0{,}26}{7{,}0^2} = \frac{3744}{49} \cong 76{,}41 \text{ kN/m}$$

Para o cálculo de q_{B3}, será necessário obter o valor de μ primeiro, dessa forma, obtém-se:

$$\mu = \frac{1+\beta_1}{(1-\alpha)\cdot\alpha_1} = \frac{1+1}{(1-0{,}5)\cdot 0{,}1} = \frac{2}{0{,}05} = 40$$

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

$$q_{B3} = -\frac{2P \cdot \mu \cdot e_0}{\ell_{AB}^2} = -\frac{2 \cdot 720 \cdot 40 \cdot 0{,}26}{7{,}0^2} = -\frac{14976}{49} \cong -305{,}63\ \text{kN/m}$$

A seguir serão calculadas as cargas equivalentes distribuídas no vão interno da viga contínua, seguindo os procedimentos do item 2.1.1.2.

$$q_{B4} = -\frac{4P \cdot (1+\beta_2) \cdot e_0}{\alpha_2 \ell_{BC}^2} = -\frac{4 \cdot 720 \cdot (1+1) \cdot 0{,}26}{0{,}1 \cdot 8{,}0^2} = -\frac{1497{,}6}{6{,}4} = -234{,}00\ \text{kN/m}$$

$$q_{B5} = \frac{4P \cdot (1+\beta_2) \cdot e_0}{\left(\frac{1}{2} - \alpha_2\right) \cdot \ell_{BC}^2} = \frac{4 \cdot 720 \cdot (1+1) \cdot 0{,}26}{\left(\frac{1}{2} - 0{,}1\right) \cdot 8{,}0^2} = \frac{1497{,}6}{25{,}6} = 58{,}50\ \text{kN/m}$$

Na Figura 12 está representado o esquema estático da viga com as cargas equivalentes calculadas por meio do método apresentado em Naaman (2004).

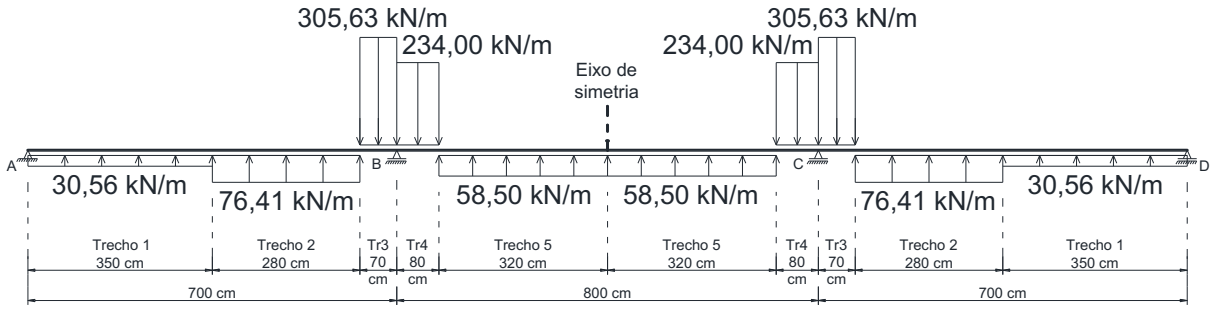


Figura 12. Esquema estático da viga com cargas equivalentes distribuídas calculadas.
Fonte: Autoria própria.

3.1.3 Método apresentado em Thomaz (2009)

Conforme já citado no item 2.2.3, para a consideração deste método será necessário fazer o cálculo dos ângulos das retas tangentes. Os ângulos que serão calculados estão apresentados na Figura 13.

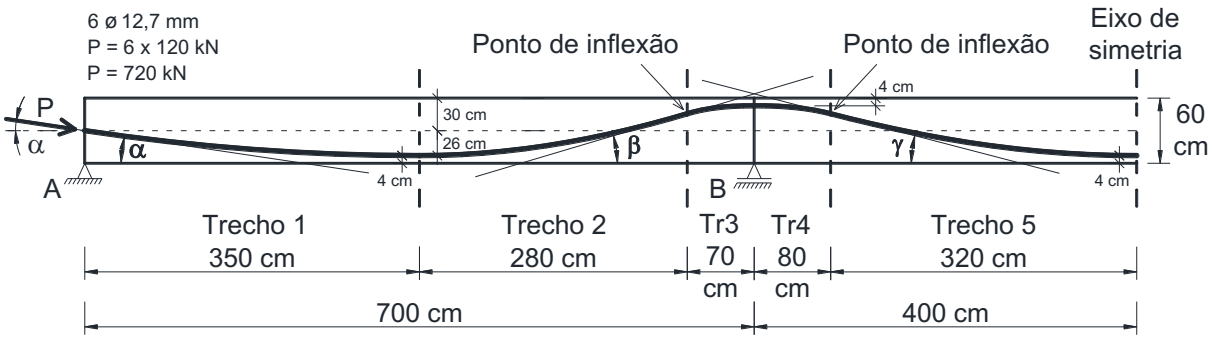


Figura 13. Viga com os ângulos que serão calculados: α, β e γ.

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

Cálculo do valor de α:

$$\alpha = \text{Arctg}\left[-2\left(\frac{e_0 + e_1}{\ell_1}\right)\right] = \text{Arctg}\left[-2\left(\frac{0 + 0{,}26}{3{,}50}\right)\right] = \text{Arctg}\left[-2\left(\frac{0{,}26}{3{,}50}\right)\right] \rightarrow \alpha = -8{,}451°$$

O sinal negativo no valor do ângulo α indica o sentido horário do ângulo quando analisado o sentido da horizontal para a parábola. Para o cálculo de β é necessário calcular o valor de e_2 primeiramente.

$$e_2 = \frac{e_3\ell_2 - e_1\ell_3}{\ell_2 + \ell_3} = \frac{0{,}26 \cdot 2{,}80 - 0{,}26 \cdot 0{,}70}{2{,}80 + 0{,}70} = \frac{0{,}728 - 0{,}182}{3{,}5} = \frac{0{,}546}{3{,}5} \rightarrow e_2 = 0{,}156$$

$$\beta = \text{Arctg}\left[\,2\left(\frac{e_1 + e_2}{\ell_2}\right)\right] = \text{Arctg}\left[\,2\left(\frac{0{,}26 + 0{,}156}{2{,}80}\right)\right] = \text{Arctg}\left[\,2\left(\frac{0{,}416}{2{,}80}\right)\right] \rightarrow \beta = 16{,}549°$$

Para verificação, pode-se fazer o cálculo com a expressão do trecho 3.

$$\beta = \text{Arctg}\left[-2\left(\frac{e_2 - e_3}{\ell_3}\right)\right] = \text{Arctg}\left[-2\left(\frac{0{,}156 - 0{,}26}{0{,}70}\right)\right] \rightarrow \beta = 16{,}549°$$

Para o cálculo de γ é necessário calcular o valor de e_4 primeiramente.

$$e_4 = \frac{e_3\ell_5 - e_5\ell_4}{\ell_4 + \ell_5} = \frac{0{,}26 \cdot 3{,}20 - 0{,}26 \cdot 0{,}80}{0{,}80 + 3{,}20} = \frac{0{,}832 - 0{,}208}{4{,}00} = \frac{0{,}624}{4{,}00} \rightarrow e_4 = 0{,}156$$

$$\gamma = \text{Arctg}\left[\,2\left(\frac{e_4 - e_3}{\ell_4}\right)\right] = \text{Arctg}\left[\,2\left(\frac{0{,}156 - 0{,}26}{0{,}80}\right)\right] \rightarrow \gamma = -14{,}574°$$

Para verificação, pode-se fazer o cálculo com a expressão do trecho 5.

$$\gamma = \text{Arctg}\left[-2\left(\frac{e_4 + e_5}{\ell_5}\right)\right] = \text{Arctg}\left[-2\left(\frac{0{,}156 + 0{,}26}{3{,}20}\right)\right] \rightarrow \gamma = -14{,}574°$$

Na Figura 14, apresenta-se a viga com os ângulos e as cotas dos pontos de inflexão que foram calculados.

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

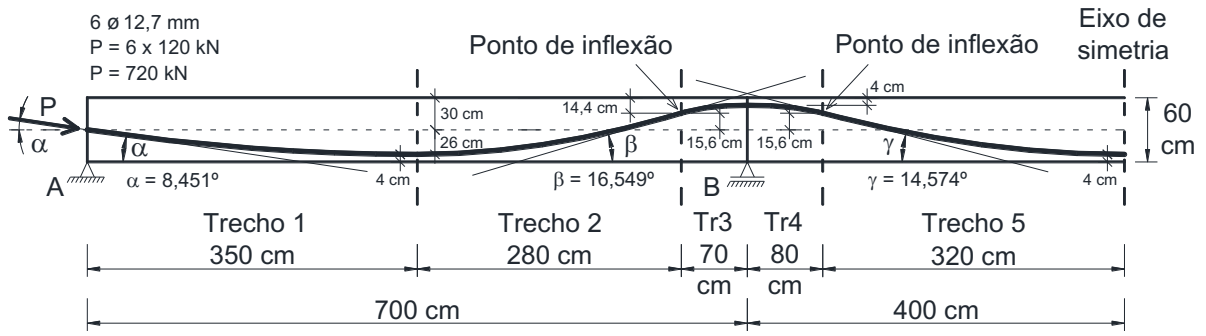


Figura 14. viga com os ângulos e as cotas dos pontos de inflexão que foram calculados.

3.1.3.1 Cálculo das cargas atuantes nos apoios de extremidade

3.1.3.1.1 Componente vertical da força de protensão

$P_V = P \cdot \operatorname{sen} \alpha = 720 \cdot \operatorname{sen} 8{,}451^{\circ} = 105{,}81 \text{ kN}$

3.1.3.1.2 Componente horizontal da força de protensão

$P_H = P \cdot \cos \alpha = 720 \cdot \cos 8{,}451^{\circ} = 712{,}18 \text{ kN}$

3.1.3.2 Cálculo das cargas equivalentes atuantes nos trechos

$$q_{B1} = \frac{P \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\ell_1} = \frac{720 \cdot \operatorname{sen} 8{,}451^{\circ}}{3{,}50} \cong 30{,}23 \text{ kN/m}$$

$$q_{B2} = \frac{P \cdot \operatorname{sen} \beta}{\ell_2} = \frac{720 \cdot \operatorname{sen} 16{,}549^{\circ}}{2{,}80} \cong 73{,}24 \text{ kN/m}$$

$$q_{B3} = -\frac{P \cdot \operatorname{sen} \beta}{\ell_3} = -\frac{720 \cdot \operatorname{sen} 16{,}549^{\circ}}{0{,}70} \cong -292{,}97 \text{ kN/m}$$

$$q_{B4} = -\frac{P \cdot \operatorname{sen} \gamma}{\ell_4} = -\frac{720 \cdot \operatorname{sen} 14{,}574^{\circ}}{0{,}80} \cong -226{,}47 \text{ kN/m}$$

$$q_{B5} = \frac{P \cdot \operatorname{sen} \gamma}{\ell_5} = \frac{720 \cdot \operatorname{sen} 14{,}574^{\circ}}{3{,}2} \cong 56{,}62 \text{ kN/m}$$

Na Figura 15 está representado o esquema estático da viga com as cargas equivalentes calculadas pelo método apresentado em Thomaz (2009).

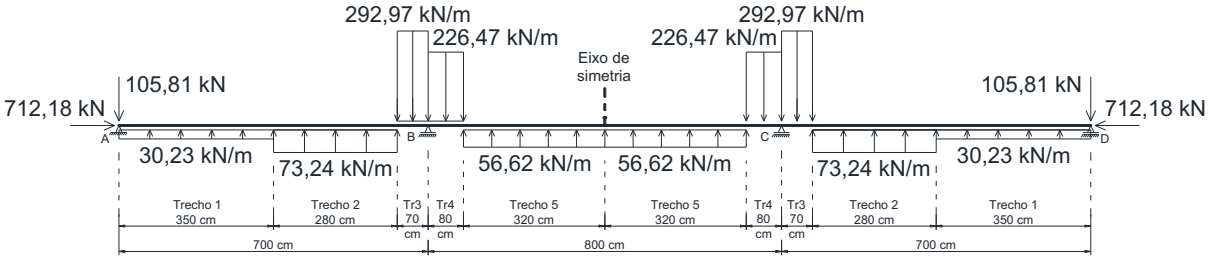


Figura 15. Esquema estático da viga com cargas equivalentes distribuídas calculadas

Aalami *et al* (2016), deixam claro que as forças geradas pelos cabos protendidos estão sempre em auto-equilíbrio estático. Isso significa que a soma dessas forças deve ser igual a zero.

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

Portanto, verifica-se o equilíbrio vertical desconsiderando as reações de apoio da viga. Dessa forma, obtêm-se:

$(-105{,}81 + 30{,}23 \cdot 3{,}5 + 73{,}24 \cdot 2{,}8 - 292{,}97 \cdot 0{,}7 - 226{,}47 \cdot 0{,}8 + 56{,}62 \cdot 3{,}2) \cdot 2 = -0{,}008$

$-0{,}008 \cong 0 \ \therefore Ok$

Vale observar que o valor não é exatamente igual a zero devido aos arredondamentos considerados no cálculo da carga equivalente.

3.1.4 Método apresentado em Skaf e Stucchi (1995)

Para o cálculo considerando este método, pode-se utilizar as mesmas informações calculadas e apresentadas na Figura 14.

3.1.4.1 Cálculo das cargas atuantes nos apoios de extremidade

3.1.4.1.1 Componente vertical da força de protensão

$P_V = P \cdot \text{sen}\ \alpha = 720 \cdot \text{tg}\ 8{,}451^{\text{o}} = 106{,}97\ \text{kN}$

3.1.4.1.2 Componente horizontal da força de protensão

$P_H = P = 720\ \text{kN}$

3.1.4.2 Cálculo das cargas equivalentes atuantes nos trechos

$$q_{B1} = \frac{P \cdot \text{tg}\ \alpha}{\ell_1} = \frac{720 \cdot \text{tg}\ 8{,}451^{\text{o}}}{3{,}50} \cong 30{,}56\ \text{kN/m}$$

$$q_{B2} = \frac{P \cdot \text{tg}\ \beta}{\ell_2} = \frac{720 \cdot \text{tg}\ 16{,}549^{\text{o}}}{2{,}80} \cong 76{,}41\ \text{kN/m}$$

$$q_{B3} = -\frac{P \cdot \text{tg}\ \beta}{\ell_3} = -\frac{720 \cdot \text{tg}\ 16{,}549^{\text{o}}}{0{,}70} \cong -305{,}63\ \text{kN/m}$$

$$q_{B4} = -\frac{P \cdot \text{tg}\ \gamma}{\ell_4} = -\frac{720 \cdot \text{tg}\ 14{,}574^{\text{o}}}{0{,}80} \cong -234{,}00\ \text{kN/m}$$

$$q_{B5} = \frac{P \cdot \text{tg}\ \gamma}{\ell_5} = \frac{720 \cdot \text{tg}\ 14{,}574^{\text{o}}}{3{,}2} \cong 58{,}50\ \text{kN/m}$$

Na Figura 16 está representado o esquema estático da viga com as cargas equivalentes calculadas pelo método apresentado em Skaf e Stucchi (1995).

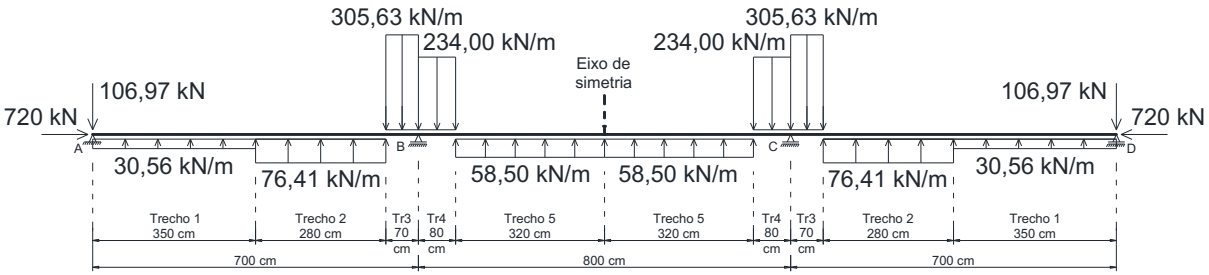


Figura 16. Esquema estático da viga com cargas equivalentes distribuídas calculadas

Verifica-se o equilíbrio vertical desconsiderando as reações de apoio da viga. Dessa forma,

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

obtêm-se:

$(-106{,}97 + 30{,}56 \cdot 3{,}5 + 76{,}41 \cdot 2{,}8 - 305{,}63 \cdot 0{,}7 - 234 \cdot 0{,}8 + 58{,}50 \cdot 3{,}2) \cdot 2 = -0{,}006$

$-0{,}006 \cong 0 \ \therefore Ok$

4 Resultados e discussões

Os resultados obtidos na resolução do exemplo no item 3, estão listados na Tabela 1.

Tabela 1 - Comparativo entre os valores calculados de cargas equivalentes

Cargas equivalentes	NAAMAN (2004)	THOMAZ (2009)	SKAF e STUCCHI (1995)
q_{B1}	30,56 kN/m	30,23 kN/m	30,56 kN/m
q_{B2}	76,41 kN/m	73,24 kN/m	76,41 kN/m
q_{B3}	− 305,63 kN/m	− 292,97 kN/m	− 305,63 kN/m
q_{B4}	− 234,00 kN/m	− 226,47 kN/m	− 234,00 kN/m
q_{B5}	58,50 kN/m	56,62 kN/m	58,50 kN/m

Como já foi dito, o método que será considerado com maior precisão é o que foi apresentado em Naaman (2004), o qual possui uma formulação extensa e um pouco mais complexa em relação aos outros dois métodos. Observa-se que os valores encontrados por meio do método apresentado em Skaf e Stucchi (1995) foram idênticos ao obtidos em Naaman (2004), e a maior vantagem é a facilidade do cálculo, pois possui uma formulação simples e muito fácil de decorar, diferente do método apresentado em Naaman (2004).

Comparando os resultados obtidos com o método apresentado em Thomaz (2009) em relação aos obtidos com o método apresentado em Naamam (2004), o valor de q_{B1} foi 1,08% menor, de q_{B2} foi 4,15% menor, de q_{B3} foi 4,14% menor, de q_{B4} foi 3,22% menor e de q_{B5} foi 3,21% menor.

Observa-se que todos os resultados tiveram diferença menor que 5%, o que para Engenharia Civil é aceitável como uma diferença sem muita relevância. Porém, vale destacar mais uma vez que Skaf e Stucchi (1995) obtiveram resultados idênticos aos de Naamam (2004), sendo o método apresentado em Skaf e Stucchi (1995) o escolhido por este autor como o método mais prático, simples e com boa precisão quando calculado manualmente.

5. Conclusões

O método apresentado em Thomaz (2009) apresentou bons resultados, com diferença de precisão menor que 5% quando comparados ao método apresentado em Naaman (2004). Já os resultados obtidos com o método apresentado em Skaf e Stucchi (1995) foram excelentes, pois os resultados foram idênticos aos obtidos com Naaman (2004).

Analisando o procedimento de resolução, Naaman (2004) apresenta uma resolução um pouco

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

mais trabalhosa, devido às formulações mais complexas e com muitos detalhes. Quando comparamos Thomaz (2009) e Skaf e Stucchi (1995), os dois são bem mais simples que Naaman (2004), e o procedimento de resolução dos dois é praticamente a mesma coisa, só muda que em um utiliza-se o seno do ângulo e no outro a tangente do ângulo.

Uma pequena desvantagem do método apresentado em Thomaz (2009) e Skaf e Stucchi (1995) em relação ao método apresentado em Naamam (2004), é a necessidade de saber os ângulos que as retas tangentes à parábola do cabo formam com a horizontal, informação que nem sempre é tão simples de obter. Foi por esse motivo que o autor deduziu as expressões para cálculo desses ângulos, tomando como base uma parábola do 2° grau, o que facilitou ainda mais o procedimento.

Notou-se durante a resolução do exemplo, que os valores são muito sensíveis a esse ângulo, se não for considerado o ângulo tomando como base uma parábola do 2° grau, os resultados entre os métodos acabam divergindo e com valores significativos.

Portanto, diante de tudo que foi analisado, o método mais prático, simples e com boa precisão quando calculado manualmente é o método apresentado em Skaf e Stucchi (1995).

Agradecimentos

À Universidade Federal do Amazonas, à Universidade Estadual de Maringá e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq pelo apoio concedido para a elaboração deste trabalho.

Referências

Aalami, B. O. 1998. **Hyperstatic (secondary) actions in prestressing and their computation.** Post-Tensioning Institute. Technical Notes. December. Disponível em: <https://www.post-tensioning.org/Portals/13/Files/Pdfs/Education/Technote7.pdf>. Acesso em: 25 de março de 2023

Aalami, B. O. 2000. Structural modeling os posttensioned members. **Journal os Structural Engineering.** Vol. 126, No. 2. Feb, 2000.

Aalami, B. O. *et al.* 2016. **Novel application of post-tensioning solves high-rise design challenges.** Concrete Internacional, october.

Emerick, A. A. 2005. **Projeto e execução de lajes protendidas.** Editora Interciência. Rio de Janeiro.

Lin, T. Y. 1963. Load-Balancing Method for Design and Analysis of Prestressed Concrete Structures. No. 60-36. **Journal of The American Concrete Institute.** June, pp. 719-742.

Menegatti, M. 2004. **A protensão como um conjunto de cargas concentradas equivalentes.** Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: <

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3144/tde-12052005-222648/publico/MarceloMenegatti.pdf>. Acesso em: 25 de março de 2023.

Naaman, A. E. 2004. **Prestressed concrete analysis and design.** 2nd ed. Techno press 3000, Michigan, USA.

Skaf, K. J.; Stucchi, F. R. 1995. **Alternativas de representação da protensão no projeto de Estruturas de Concreto.** Boletim Técnico da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em: <http://200.144.255.181/xmlui/bitstream/handle/123456789/25/15.pdf?sequence=155&isAllowed=y>. Acesso em: 25 de março de 2023.

Thomaz, E. C. S. 2009. **Momentos hiperestáticos de protensão.** Notas de aula. Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro. Disponível em: <http://aquarius.ime.eb.br/~webde2/prof/ethomaz/pontes/momento_hiperestatico_protensao.pdf>. Acesso em: 25 de março de 2023.

ANEXO. Diagramas de esforços solicitantes

Conforme já visto anteriormente, os métodos de Naaman (2004) e Skaf e Stucchi (1995), apresentaram resultados idênticos. Portanto, aqui neste anexo serão apresentados apenas os diagramas de esforços solicitantes resultantes da carga equivalente obtidas nesses métodos, e que está apresentada na Figura 17.

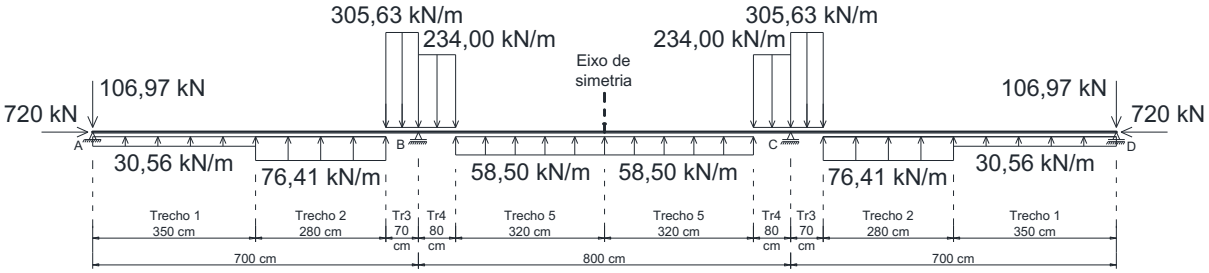


Figura 17. Esquema estático da viga protendida com carga equivalente.

Os diagramas de momentos fletores traçados para o esquema estático apresentado na Figura 17 são mostrados na Figura 18. Esses momentos já consideram a soma do efeito isostático e hiperestático da protensão, que podem ser representados matematicamente pela equação (29), que é definida por Aalami (1998) como sendo o método indireto.

$$M_{Total} = M_{hip} + M_{iso} \tag{29}$$

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

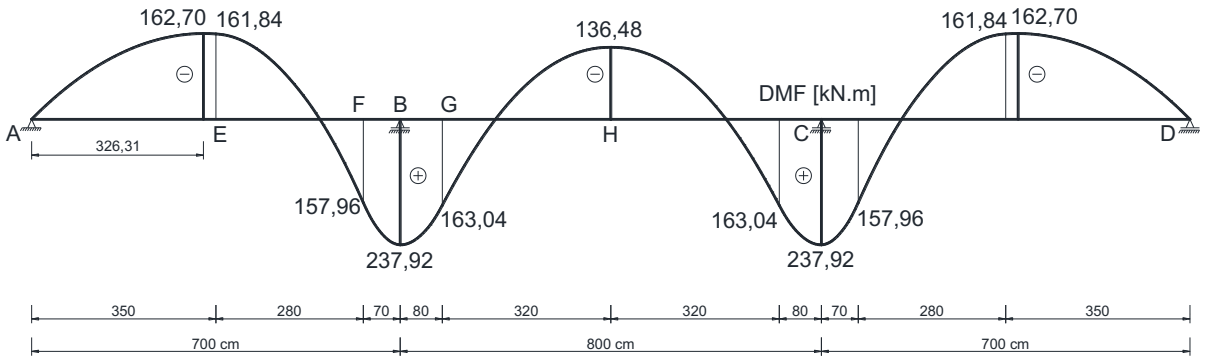


Figura 18. Diagrama de momentos fletores totais (Isostático + Hiperestático).

Fonte: Autoria própria.

Os momentos isostáticos devido ao efeito da protensão estão representados na Figura 19. Esses momentos são calculados simplesmente multiplicando a força P de protensão pela excentricidade do cabo, que estão detalhadas na figura 14. A seguir é mostrado o cálculo dos momentos.

$$M_{E,iso} = P \cdot e = -720 \cdot 0{,}26 = -187{,}20 \text{ kN.m}$$
$$M_{F,iso} = P \cdot e = -720 \cdot (-0{,}156) = 112{,}32 \text{ kN.m}$$
$$M_{B,iso} = P \cdot e = -720 \cdot (-0{,}26) = 187{,}20 \text{ kN.m}$$
$$M_{G,iso} = P \cdot e = -720 \cdot (-0{,}156) = 112{,}32 \text{ kN.m}$$
$$M_{H,iso} = P \cdot e = -720 \cdot 0{,}26 = -187{,}20 \text{ kN.m}$$

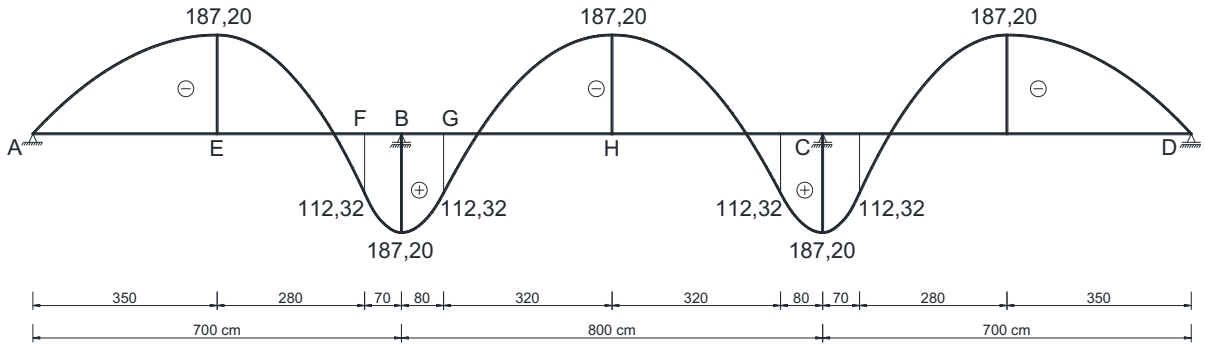


Figura 19. Diagrama de momentos devidos ao efeito isostático da protensão.

Fonte: Autoria própria.

Usando a equação (29), pode-se obter os momentos devido ao efeito hiperestático que estão representados na Figura 20. O cálculo dos momentos está mostrado a seguir.

$$M_{E,hip} = M_{E,Total} - M_{E,iso} = -161{,}84 - (-187{,}20) = 25{,}36 \text{ kN.m}$$
$$M_{F,hip} = M_{F,Total} - M_{F,iso} = 157{,}96 - 112{,}32 = 45{,}64 \text{ kN.m}$$
$$M_{B,hip} = M_{B,Total} - M_{B,iso} = 237{,}92 - 187{,}20 = 50{,}72 \text{ kN.m}$$

Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá - ISSN 1517-8048
DOI: 10.4025/revtecnol.v32i1.67681

$$M_{G,hip} = M_{G,Total} - M_{G,iso} = 163{,}04 - 112{,}32 = 50{,}72 \text{ kN.m}$$

$$M_{H,hip} = M_{H,Total} - M_{H,iso} = -136{,}48 - (-187{,}20) = 50{,}72 \text{ kN.m}$$

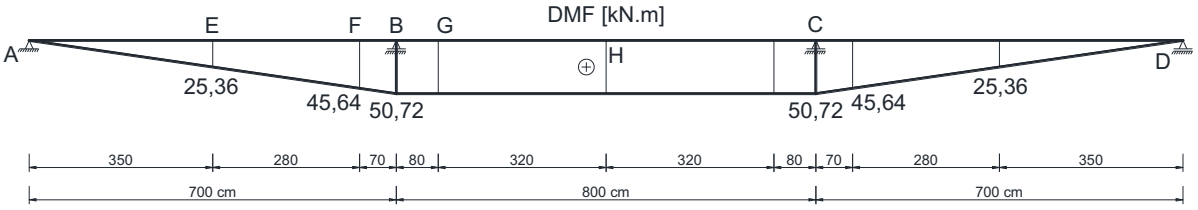


Figura 20. Diagrama de momentos devidos ao efeito hiperestático da protensão.
Fonte: Autoria própria.

Na Figura 21 pode-se observar o esquema estático da viga com as reações devido ao efeito hiperestático da protensão. O cálculo da reação no apoio *A* é mostrado a seguir.

$$V_{A,hip} = \frac{M_{B,hip}}{\ell_{AB}} = \frac{50{,}72}{7{,}0} \cong 7{,}25 \text{ kN}$$

Figura 21. Esquema estático da viga com as reações devido ao efeito hiperestático da protensão.
Fonte: Autoria própria.

Na Figura 22 pode-se observar o diagrama de esforços cortantes devido ao efeito hiperestático da protensão.

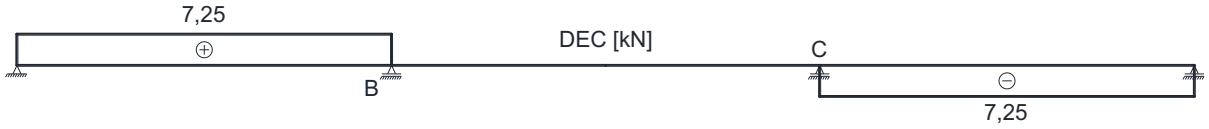


Figura 22. Diagrama de esforços cortantes devido ao efeito hiperestático da protensão.
Fonte: Autoria própria.