

Revista

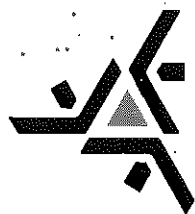
unimar

Ciências Exatas e da Terra

ÓRGÃO OFICIAL
DA UNIVERSIDADE
ESTADUAL
DE MARINGÁ

ISSN 0100-9354

MARINGÁ
PARANÁ



VOLUME 15
NÚMERO 3
DEZEMBRO/93

Revista
UNIMAR
 Ciências Exatas e da Terra

Órgão Oficial da Universidade Estadual de Maringá

ISSN 0100-9354

Revista UNIMAR, Maringá 15(3) Dezembro/93

SUMÁRIO

<i>Ricardo Sá Earp.</i> Uma fórmula do fluxo para superfícies compactas de curvatura média constante em R^3 . A flux formula for constant mean curvature surfaces in R^3 with planar boundary.	229-247
<i>Marcelo M. Cavalcanti e Valéria N. Domingos Cavalcanti.</i> Método do poço de potencial e a regularidade escondida de uma equação hiperbólica não-linear. Potential well method and the hidden regularity of a nonlinear hyperbolic equation.	249-277
<i>Paulo Arêas Burlandy.</i> Sobre reticulados de Banach multiplicativos de funções. On multiplicative Banach function lattices.	279-287
<i>Doherty Andrade.</i> Sobre uma classe de equações de evolução não lineares em espaços de Banach. On a class of nonlinear evolution equations in Banach spaces.	289-297
<i>Rosali Brusamarello.</i> Correspondências entre os ideais primos do anel de Witt sobre um anel local, ordens e assinaturas. Correspondence between prime ideals of Witt ring over a local ring, orders and signatures.	299-306
<i>Dalto Domingos Rodrigues.</i> Relação entre coordenadas geodésicas e coordenadas topocêntricas. Relation between geodetic coordinates and topocentric coordinates.	307-318

<i>Fred Wolff e Renato Spring. Montmorilonita e Magadiita pilarizadas com estruturas de sílica: preparação e estabilidade térmica. Pillared montmorillonite and magadiite with silicic structures: preparation and thermal stability.....</i>	319-336
<i>To Fu Ma. Sobre um problema ressonante de quarta ordem. On a fourth order B.V.P. at resonance.</i>	337-344
<i>Jonas Teixeira Nery. Estudo comparativo entre secagem de grãos utilizando energia solar em Porto Alegre e Maringá. Comparative study of grain drying using solar energy in Porto Alegre and Maringá.....</i>	345-355

Revista UNIMAR, V. 1 - 1974 -

Maringá, Universidade Estadual de Maringá.

Quadrimestral

Mudança de periodicidade e numeração:

1(1), 1974; 1(2), 1976; 1(3), 1977; 2(1), 1978; 2(2), 1979; 2(3), 1980; 3(1), 1981; 4(1), 1982; 5(1), 1983; 6(1), 1984; 7(1), 1985; 8(1), 1986; 9(1), 1987; 10(1), 1988; 11(1), 1989; 12(1), 1990; 12(2), 1990; 13(1), 1991; 13(2), 1991; 14(1), 1992; 14(2), 1992; 14(Suplemento), 1992; 15(1), 1993; 15(2), 1993.

1. Pesquisa. 2. Ciência. 3. Cultura.

CDD - 001.43

Solicita-se permuta - Exchange requested

A Revista UNIMAR possui indexação seletiva no Index Medicus Latino-Americano, C.A.B. International, Biosis, MLA International Bibliography, Institut des Hautes Etudes de L'Amerique Latine, Centro de Información Científica y Humanística, Aquatic Sciences and Fisheries Abstracts e Periódica.

Revista UNIMAR
Ciências Exatas e da Terra
Órgão Oficial da Universidade Estadual de Maringá
Volume 15(3) **Dezembro/1993**

FUNDADOR:

Reitor *José Carlos Cal Garcia*

GESTÃO:

Reitor: *Prof. Décio Sperandio*

Vice-Reitor: *Prof. Luiz Antônio de Souza*

SUPERVISÃO:

Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

.Prof. Ivanor Nunes do Prado

SUPERVISÃO EDITORIAL:

.Prof^{la} Maria Suely Pagliarini

CONSELHO EDITORIAL:

.Prof. Doherty Andrade

.Prof. Ivanor Nunes do Prado

.Prof^{la} Ivoneti Catarina Rigão Bastiani

.Prof. Marcelino Luiz Gimenes

.Prof^{la} Maria Suely Pagliarini

.Prof. Osvaldo Hidalgo da Silva

.Prof. Thomas Bonnici

DIVISÃO DE DIVULGAÇÃO CIENTÍFICA-PPG:

.Maria José de Melo Vandresen

Editoração Eletrônica:

.Marcos Kazuyoshi Sassaka

.Marcos Cipriano da Silva

REVISÃO EM LÍNGUA PORTUGUESA E INGLESA:

.Prof^{la} Deonízia Zimovski Germani

.Prof^{la} Marilurdes Zanini

.Prof. Antonio Augusto de Assis

.Prof. Leonildo Carnevali

.Prof. José Hiran Sallée

.Prof. Thomaz Bonnici
.Prof^{la} Edna Castilho Peres
.Prof. Silvestre Rudolfo Böing

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

.Maria Júlia Carneiro Giraldes

IMPRESSÃO E ENCADERNAÇÃO:

.Imprensa Universitária - UEM

CORRESPONDÊNCIA:

.UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Av. Colombo, 3690 - 87020-900
Fone: (0442) 26-2727 - Ramal 253
Maringá-Paraná-Brasil.

UMA FÓRMULA DO FLUXO PARA SUPERFÍCIES COMPACTAS DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM R^3 COM BORDO PLANAR

Ricardo Sá Earp*

RESUMO. Apresentamos uma fórmula do fluxo para superfície de curvatura média constante em R^3 que tem sido usada em recentes trabalhos na área, aplicando-a numa caracterização do hemisfério.

Palavras-chave: Curvatura Média, Ponto Umbilical, Superfície.

ABSTRACT. A FLUX FORMULA FOR CONSTANT MEAN CURVATURE SURFACES IN R^3 WITH PLANAR BOUNDARY. In this paper we present a flux formula for constant mean curvature surfaces in R^3 giving a characterization of the spherical cap.

Key words: Mean Curvature, Umbilical Points, Surfaces.

INTRODUÇÃO

A Fórmula do Fluxo apresentada nas próximas linhas, está calcada na noção do *vetor curvatura média* H que passamos a definir em seguida: Seja $M \subset R^3$ uma superfície diferenciável (de classe C^∞) imersa em R^3 cuja estrutura geométrica é naturalmente induzida pelo produto interno usual $\langle, \rangle$ de R^3 . Seja $p \in M$ e seja N um campo normal definido em uma vizinhança $U \subset M$ que contém p . Sejam $k_1(p) \leq k_2(p)$ as curvaturas principais de M em p relativas a N (confira no apêndice 1).

Definimos:

$$H(p) := \left(\frac{k_1(p) + k_2(p)}{2} \right) N \quad (1)$$

* Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica, Rua Marquês de São Vicente, 225, 22453, Rio de Janeiro-Rio de Janeiro, Brasil.

Observamos que o vetor curvatura média H pode ser mais geralmente definida sobre uma hipersuperfície $M^n \subset R^{n+1}$ e possui o seguinte significado geométrico: *Apointa no sentido que faz decrescer a área.* Isto segue da fórmula de variação da área (c.f.: [6], [7], [10]). Por exemplo, quando $M \subset R^3$ é conexa, mergulhada, fechada (compacta e sem bordo) e de curvatura média não nula, H aponta (através de M) para a componente limitada de R^3 delimitada por M ("interior de M "). Além disto, quando $M \subset R^3$, segue diretamente de (1) que H aponta no sentido que M "se curva". Quando a área de uma superfície é menor que qualquer área de uma superfície próxima, que possui o mesmo contorno, então esta superfície é mínima ($H = 0$). Dizemos que $M \subset R^3$ é uma *superfície de curvatura média constante* H (abreviamos C.M.C), se a norma do vetor curvatura média $|H|$ é constante e igual a H sobre M . Exemplos de superfície de curvatura média constante não nula são as esferas e os cilindros. Tais superfícies surgem naturalmente do problema de se procurar uma superfície menor área cujo contorno ou fronteira é dado, e que engloba certo volume determinado: As superfícies mínimas ($H = 0$) correspondem ao modelo físico de se formarem bolhas de sabão com pressão igual nos dois lados da película. Enquanto as superfícies de C.M.C. (H não nula), são realizadas fisicamente exercendo-se uma diferença de pressão constante nos dois lados da película. Isto tem sido feito na prática, em toda parte, pelas crianças no ato de "soprar criando uma bolha de sabão". Este ato lúdico de (soprar) nos faz visualizar intuitivamente *que dado um contorno (curva) suave qualquer no plano existe uma gráfico de C.M.C.H (possivelmente "pequena", porém não nula), leia-se película de sabão, cuja fronteira consiste no dado contorno* (c.f.: [10], [12]).

Variantes de fórmulas do fluxo têm sido aplicadas no estudo atual das superfícies mergulhadas de curvatura média constante. As recentes descobertas de Kapouleas de superfícies completas de C.M.C. em R^3 exibem certo "equilíbrio" detectado pela chamada "balancing formula" (c.f.: [4], [13], [14]) baseada no *princípio do máximo* (c.f.: [12], [17]) tem-se mostrado hábil instrumento de pesquisas de propriedades estruturais de superfícies de C.M.C. em R^3 (c.f.: [2], [4], [14]). Diga-se de passagem que tal princípio reside na estrutura elíptica revelada por tais

superfícies (c.f.: [7], [12])¹. Cumpre notar que a fórmula do fluxo para superfícies mínimas foi elegantemente aplicada em [11] para reproduzir uma bem conhecida caracterização do catenóide (como superfície mínima não planar de revolução). Apresentamos aqui uma *Fórmula do Fluxo para superfícies compactas de C.M.C. imersas em R^3 com bordo planar*, consoante (c.f.: [2]).

Distribuímos, o texto nas seguintes seções:

1. O enunciado da Fórmula do Fluxo.
2. Uma caracterização da esfera.
3. Dedução da Fórmula do Fluxo.

Apêndice 1. Coordenadas isotérmicas e as equações de Codazzi-Mainardi.

Apêndice 2. A divergência e o laplaciano sobre uma superfície.

Na primeira seção desenvolvemos certas considerações geométricas em torno do conceito de vetor curvatura média H , com enfoque no aspecto manifesto na Fórmula do Fluxo. Na seção 2 visamos ilustrar a Fórmula enunciada em 1, demonstrando que *o hemisfério de raio R é a única superfície imersa de curvatura média constante $\frac{1}{R}$ em R^3 cujo bordo é um círculo de raio R* . No apêndice 1, fazemos uma espécie de sinopse da geometria diferencial das superfícies, definindo as noções de curvatura média e curvatura de Gauss, com o objetivo de deduzir (a partir do teorema da existência de ordenadas isotérmicas) as equações de Codazzi-Mainardi de uma superfície de C.M.C. de R^3 . Finalmente, no apêndice 2 estabelecemos os conceitos "riemannianos" da divergência e do laplaciano, com ênfase no teorema da divergência intrínseco.

A referência das seções 1 e 2 é basicamente [2]. O leitor pode consultar [4], [8] para outros desdobramentos no caso mergulhado. Enquanto as referências dos apêndices 1 e 2 são [6], [12], [15], [17]. Mais precisamente, na referência [4], mostra-se que a distribuição inicial de uma superfície M de C.M.C. em R^3 ao longo de seu bordo planar e convexo γ , propaga-se ao longo de toda a superfície, i.e., se M é transversal ao plano de γ ao longo de γ então M está globalmente contida num semi-espaco delimitado pelo plano de γ . Por conseguinte, se γ é um

¹ A curvatura média H de uma superfície M dada por um gráfico de uma função $u: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaz a seguinte equação (elíptica, quase-linear):

$$(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 2H(1+p^2+q^2)^{3/2}$$

onde p, q, r, s, t têm os significados usuais (i.e. $p = u_x, q = u_y, r = u_{xx}, s = u_{xy}, t = u_{yy}$)

círculo então M é uma calota esférica; já que o princípio de reflexão de Alexandrov se aplica, fazendo-se uso da família de planos verticais, a fim de provar que M tem simetria esférica (i.e., M é superfície de revolução). Claro que na situação extrema da curvatura média de M ser igual à curvatura média do hemisfério que contém γ , este resultado segue diretamente da fórmula do fluxo, como já foi mencionado acima. A configuração estrutural para o caso geral (a curva γ não necessariamente convexa) é também descrita em [4].

Os pré-requisitos para uma fácil leitura deste artigo são certa familiaridade com os conceitos centrais da geometria diferencial das superfícies de R^3 , paralelo com certa vivência da teoria de uma variável complexa.

Aproveitamos o ensejo para agradecer ao professor Manfredo P. do Carmo pelas oportunas observações no tocante à redação deste texto de divulgação matemática. Dizemos também obrigado ao professor Derek Hacon pela sua séria e atenta relida nas notas originais, corroborando úteis sugestões e real aprimoramento na forma final deste texto.

À guisa de informação, escrevemos ao leitor interessado que a Fórmula do Fluxo aqui excogitada é ainda válida numa categoria mais ampla de superfícies de curvatura média prescrita. Isto está analisado em [3]. Outrossim, adiantamos que há uma fórmula correlata no universo hiperbólico H^3 (trabalho em forma de pre-"print" intitulado "Some properties of surfaces of prescribed mean curvature in H^3 ", em colaboração com B. Nelli.) que, tem como consequência uma similar caracterização da esfera hiperbólica de raio R .

1. O enunciado da Fórmula do Fluxo

A FÓRMULA DO FLUXO: Seja M uma superfície compacta conexa de curvatura média constante imersa em R^3 , cujo bordo é uma curva de Jordan simples e fechada γ contida no plano horizontal $\mathcal{H} = \{z = 0\}$, de modo que $\gamma = \partial D$, $D \subset \mathcal{H}$. Então, vale a seguinte igualdade:

$$\int_{\gamma} \langle n, k \rangle ds = 2H \int_D \langle K, N_D \rangle dA$$

onde:

- (a) η é o campo conormal interior de M ao longo de γ .
- (b) $k = (0, 0, 1)$ é o campo constante normal à $\mathcal{H}$.

$$(c) N_D = k, \text{ se } \langle v \times \eta, H \rangle > 0^* \text{ e } N_D = -k, \text{ se } \langle v \times \eta, H \rangle < 0$$

sendo v o vetor velocidade da curva γ quando atribuímos à γ a orientação horária.

Note que a Fórmula do Fluxo descrita acima detecta a distribuição de H ao longo de γ . Com efeito.: Não é difícil ver que H se estende através de D de maneira que a superfície fechada $\hat{M} = M \cup D$ é orientável, definindo o normal N_D sobre D como item (c) acima. O fato que M não é diferenciável ao longo de $\partial D = \gamma$ não interfere neste processo. Suponha agora que M , localmente ao longo de γ , está contida em um dos semi-espacos delimitado por $\mathcal{H}$, i.e., suponha que existe um "colarinho" V de M ao longo de γ , com V ou bem contido em $\{z \geq 0\}$ ou bem contido em $\{z \leq 0\}$; então, segue de (2)², a seguinte propriedade geométrica (veja Figura 1):

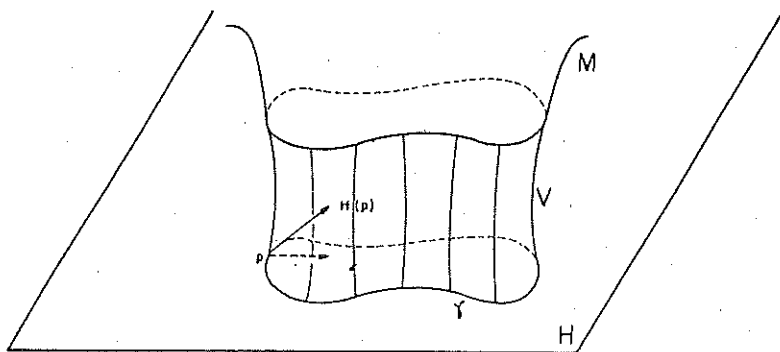


FIGURA 1

A projeção ortogonal de H sobre $\mathcal{H}$ ao longo de γ aponta para o interior de D .

Para melhor visualizar isto, considere a situação em que $M \cap \text{int } D = \emptyset$. Assim, neste caso, fechando-se o colarinho V com duas tampas, uma das quais é D , a outra é um disco topológico $D\mathcal{E}$, delimitado pela interseção de M com uma cópia $\mathcal{H}\mathcal{E}$ do plano horizontal um

² Note que na situação " M contida localmente em $\{z \geq 0\}$ ao longo de γ ", a fórmula do fluxo toma o seguinte aspecto:

$$\int_{\gamma} \langle \eta, k \rangle ds = 2H \text{Area}(D)$$

pouquinho acima (ou abaixo) do $\mathcal{H}$, obtém-se uma superfície fechada e mergulhada V cujo "interior" faz parte do "interior" de M (veja Figura 2). A partir da mencionada propriedade geométrica conclui-se que as configurações estruturais sugeridas pelas Figuras 3 e 4 são impossíveis. Note também que o disco imerso obtido pela notação da curva α da Figura 5, em torno do eixo z , é também impossível, por um argumento similar, quando M tem curvatura média constante.

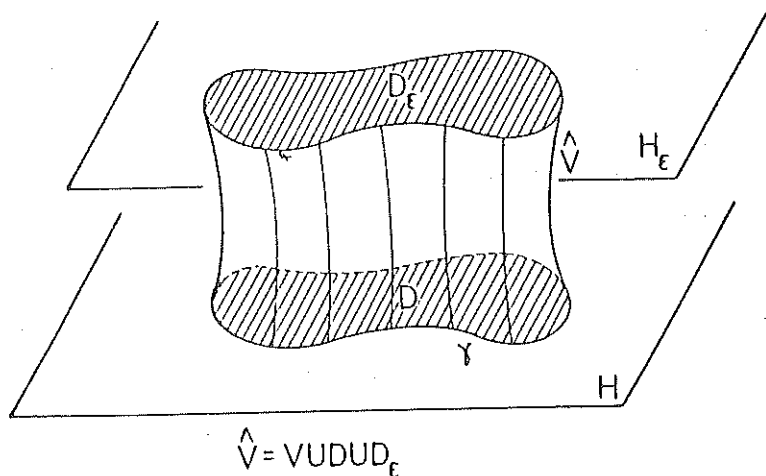


FIGURA 2

Quando o bordo de M não é conexo a precedente propriedade geométrica não é válida. Basta considerar uma apropriada parte mergulhada de uma superfície de Delaunay D não mergulhada (c.f.: [5], [7]) para verificar um contra-exemplo (veja Figura 6).

2. Uma Caracterização da Esfera

Nesta seção, utilizamos (2) para demonstrar seguinte resultado:

Aplicação: O hemisfério de raio R é a única superfície (conexa e compacta) de curvatura média constante $\frac{1}{R}$ imersa em R^3 cujo bordo consiste num círculo C_R de raio R .

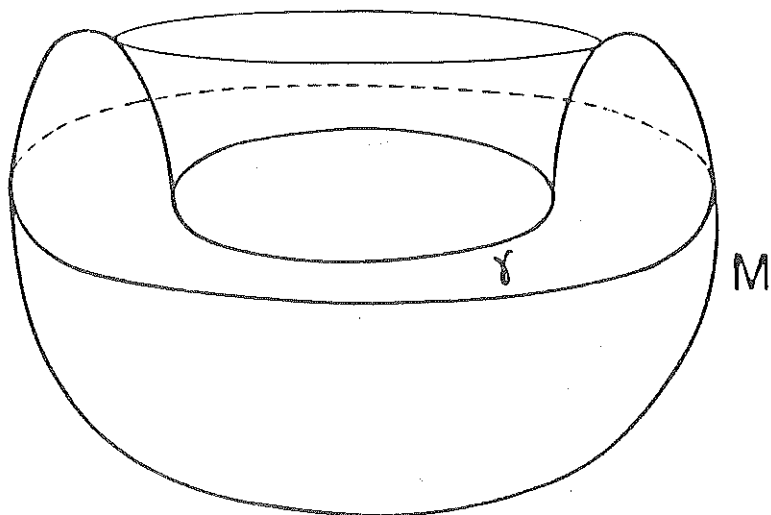


FIGURA 3

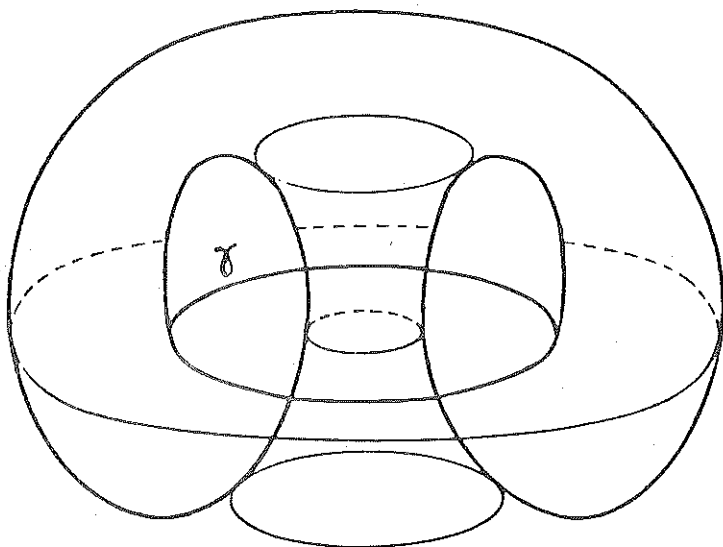


FIGURA 4

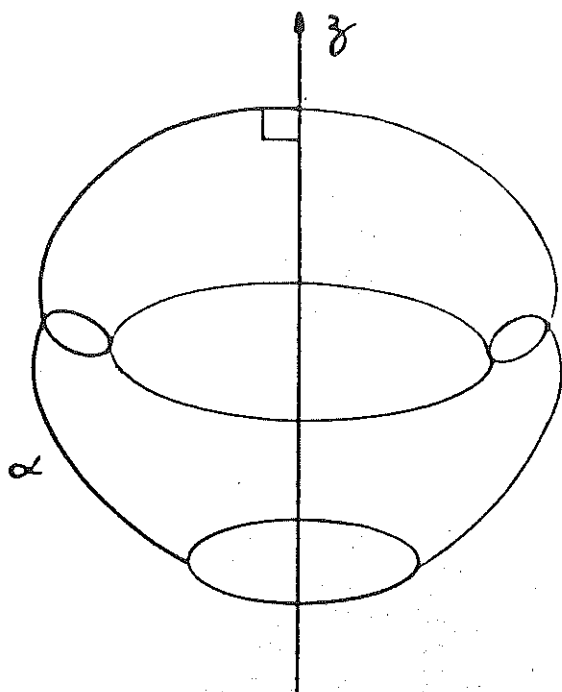


FIGURA 5

Com efeito: Seja $p \in M$. Escolha uma carta local isotérmica $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = p$, ao redor de p , i.e., $E = G$ e $F = 0$.

Considere $\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$ a matriz da 2a. forma fundamental relativa à X .

Segue das equações de Codazzi-Mainardi que a função $\mathcal{O} = \frac{\ell - n}{2} - im$ é holomorfa (confira no Apêndice 1, equações (13) e (14)). O leitor pode verificar por cálculo direto que os zeros de $\mathcal{O}$ são exatamente os pontos umbílicos de M .

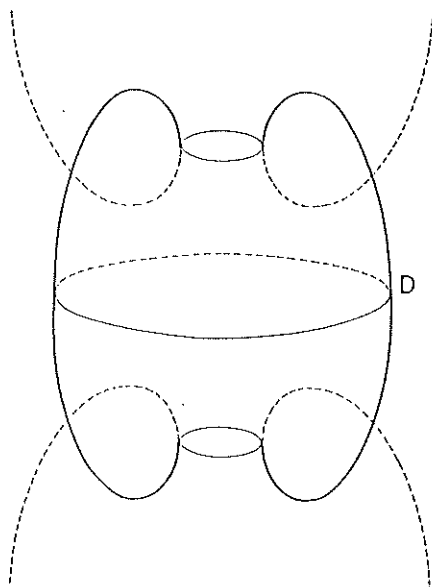


FIGURA 6

Disto se conclui que os pontos umbílicos de M são isolados, a menos que M seja totalmente umbílica, i.e., a menos que M seja constituída inteiramente de pontos umbílicos. Agora, note que (2) implica (supondo sem perda de generalidade que $C_R \subset \mathcal{H}$):

$$\int_{C_R} \langle n, k \rangle ds = 2\pi R$$

Conseqüentemente,

$$n = k \text{ ao longo de } C_R$$

Ou seja, M corta ortogonalmente $\mathcal{H}$ ao longo de C_R . Disto se deduz facilmente que o normal N , ao longo de C_R é horizontal, e que C_R é constituído de pontos umbílicos; o que leva ao resultado almejado. Mais detalhadamente: Note que a curvatura média de M em $p \in C_R$ é dada pela semi-soma das curvaturas normais à M em p segundo direções ortogonais v e w . Tomando-se v como sendo tangente à C_R em p , deduz-se que tal ponto é umbílico, já que a curvatura de C_R é igual a $\frac{1}{R}$, ou seja é igual à curvatura média pré-estabelecida de M . Ora, é bem sabido dos cursos elementares de Geometria

Diferencial, de que superfície totalmente umbilica é, ou bem parte de uma esfera ou parte de um plano. Contudo, sendo M totalmente umbilica, segue que M é parte de uma esfera de raio R , já que M tem curvatura média constante igual à $\frac{1}{R}$ ♣.

Enfatizamos que outra caracterização das demais calotas esféricas pode ser encontrada em [4]. Digressões para superfícies de Weingarten fazem parte de uma pesquisa ainda em andamento. A referência exata é: "On the Structure of Certain Weingarten Surfaces with Boundary a Circle", colaboração de F. Braga Brito.

3. Dedução da Fórmula do Fluxo

Nesta seção deduzimos (2) seguindo os moldes perpetrados em [2] e [3].

Com efeito: Seja X o vetor posição de $M \subset R^3$. Do apêndice 2 infere-se a seguinte fórmula:

$$\Delta \langle X, k \rangle = 2 \langle H, k \rangle \quad (3)$$

onde Δ denota a laplaciano sobre M . Além disto segue do teorema da divergência intrínseco e de (3) (confira no apêndice 2, equações (16) e (18) que:

$$\int_{\gamma} \langle n, k \rangle ds = -2H \int_M \langle N, k \rangle dA$$

onde n é o conormal interior e $N = \frac{H}{H}$.

Caso M mergulhada (c.f.: [4]): Note que quando M está mergulhada em R^3 ; pode-se aplicar o bem conhecido teorema da divergência à região de R^3 cujo bordo é a superfície orientável $\hat{M} = M \cup D$ (Por quê? c.f.: [15]), inferindo-se as seguintes relações:

(Fluxo de k através de M) =

$$\int_M \langle k, N \rangle dA = - \int_D \langle k, N_D \rangle dA = (\pm \text{area}(D))$$

A fórmula do fluxo na sua variante chamada "Balancing Formula" é obtida comparando-se a fórmula acima com a equação (4), levando-se em conta os sinais e convenções estabelecidas.

*Em geral, note que:

$$\operatorname{rot} u = 2k$$

onde u é o campo de vetores de R^3 dado por:

$$u(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

Assim, aplicando o conhecido Teorema de Stokes de cálculo, obtém-se

$$\int_M \langle N, 2k \rangle dA = \int_\gamma -y dx + x dy \quad (5)$$

onde a integral de linha do lado direito da igualdade deve ser calculada de maneira que γ seja orientada pela orientação induzida de M (quando M está orientada pelo vetor curvatura média H).

Aplicando agora o Teorema de Green, vemos que o lado direito da equação (5) é igual a $2 \times \text{Área}(D)$ quando γ está orientada no sentido horário. Ora, enfocando o lado esquerdo de (5) e comparando com (4) inferimos a requerida fórmula, já que:

$$\int_\gamma \langle n, k \rangle ds = H \int_\gamma -y dx + x dy = 2H \int_D \langle k, N \rangle dA$$

onde $N_D = +R$ se $\langle v \times n, H \rangle > 0$ e $N_D = -R$, se $\langle v \times n, H \rangle < 0$, sendo v o vetor velocidade da curva γ quando atribuímos a γ a orientação horária $\star$.

Recomendamos ao leitor interessado que esboce uma demonstração mais simples da fórmula do fluxo quando M é globalmente coberta por uma carta isotérmica $X: U \subset R^3 \rightarrow M$. Mais interessante ainda é investigar uma variante da Fórmula do Fluxo quando o bordo não é conexo (por exemplo, quando $\partial M = C_1 \cup C_2$, C_1 e C_2 duas curvas "concêntricas" contidas em $\mathcal{H}$). Em seguida, pode tentar extrair propriedades geométricas disto (c.f.: [3]).

Apêndice 1. Coordenadas isotérmicas e as equações de Codazzi-Mainardi

Neste apêndice, fazemos uma incursão na geometria diferencial das superfícies de R^3 , via uma trilha assaz conveniente, oriunda das equações diferenciais parciais que assegura a existência de coordenadas isotérmicas (ou conformes). Mais precisamente: Seja $p \in M$. Afirmamos que é sempre

de p , chamada de isotérmica, tal que a 1a. forma fundamental³ relativa à X é dada por (c.f.: [17]):

$$E = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = G \quad (6)$$

e

$$F = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = 0. \quad (7)$$

Em seguida, abrimos um parênteses em nossa discussão a fim de ilustrar o leitor não familiarizado, com esta noção de coordenadas isotérmicas:

- a) Verifica-se que as projeções estereográficas da esfera S^2 menos um ponto sobre o plano complexo C são aplicações conformes (por quê?), preservando ângulos e invertendo orientações; destarte, as respectivas aplicações inversas conduzem a um sistema de cartas isotérmicas da esfera.
- b) Verifica-se que qualquer superfície de revolução de eixo z pode ser parametrizada da seguinte maneira: Se a curva geratriz γ está parametrizada pelo comprimento de arco s por $\gamma(s) = (x(s), z(s))$; γ contida no semi-plano $x > 0$ do plano xz , obtêm-se coordenadas isotérmicas reparametrizando γ de tal maneira que satisfaça $x(s) = \frac{ds}{dt}$

(onde $s = s(t)$)

Considere:

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

a matriz que representa a 2a. forma fundamental⁴ na base $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\}$; ou

seja:

$$\ell = \langle X_{uu}, N \rangle, n = \langle X_{vv}, N \rangle \quad (8)$$

³ Lembre que a 1a. forma fundamental é a forma quadrática no espaço tangente à M dada pelo produto interno, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de R^3 .

⁴ Lembre que a 2a. forma fundamental é a forma quadrática no espaço tangente à M em p , dada por:

$$v \rightarrow \langle -\nabla_v N, v \rangle$$

e

$$m = \langle X_{uv}, N \rangle \quad (9)$$

Agora considere $g: M \rightarrow S^2$ a aplicação normal de Gauss dada por :

$$g(p) = N(p)$$

onde $N(p)$ é considerado como elemento de S^2 de maneira que os espaços tangentes à M em p , denotado por $T_p M$ e o espaço tangente à S^2 em $N(p)$ estão identificados. Isto faz com que a derivada covariante $-\nabla N$ seja considerada como uma aplicação de $T_p M$ em si mesmo. A curvatura de Gauss K e a curvatura média H em $P \in M$ são definidos como sendo o determinante e o traço de $-\nabla N: T_p M \rightarrow T_p M$ que, na verdade, é uma aplicação linear auto-adjunta cujos auto-valores (reais) $k_1(p)$ e $k_2(p)$ são chamados de curvaturas principais de M em p . Assim, das fórmulas (6), (7), (8), (9) segue que:

$$K = \frac{\ell n - m^2}{E^2}, H = \frac{\ell + n}{2E} \quad (10)$$

De fato, a fórmula da curvatura média na equação (10) pode ser extraída do seguinte argumento elementar intuitivo: Considere $c(s)$ uma curva contida em uma superfície $M \subset R^3$, onde s é o parâmetro dado pelo comprimento de arco (i.e., $\|c'(s)\| = 1$). A curvatura normal de C relativa a um campo normal à M ao longo de C é dada por:

$$\langle C''(s), N(s) \rangle$$

Agora, se reparametrizarmos C com $s = s(t)$ (t parâmetro arbitrário) temos que $C(s(t)) = \tilde{C}(t)$ (digamos), e além disto:

$$\frac{1}{(s'(t))^2} \langle \tilde{C}''(t), N \rangle = \langle C''(s), N(s) \rangle$$

Disto segue facilmente (por quê?) que a curvatura média em termos de coordenadas isotérmicas é de fato dada pela fórmula na equação (10).

Agora, do fato que N é normal e unitário segue imediatamente que:

$$\langle N, N \rangle = 1, \langle N, \frac{\partial X}{\partial u} \rangle = 0 = \langle N, \frac{\partial X}{\partial v} \rangle \quad (11)$$

Diferenciando-se a 1a. equação (11) obtemos que:

$$\langle N, \frac{\partial N}{\partial u} \rangle = \langle N, \frac{\partial N}{\partial v} \rangle = 0$$

Assim,

$$\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{1}{E} \left\{ \langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \rangle \frac{\partial X}{\partial u} + \langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \rangle \frac{\partial X}{\partial v} \right\} \quad (12)$$

Análoga fórmula para $\frac{\partial N}{\partial v}$ é obtida, trocando-se u por v em na equação (12). A expressão:

$$\begin{aligned} \ell_v - m_u &= \langle X_{uu}, N \rangle_v - \langle X_{uv}, N \rangle_u \\ &= \langle X_{uu}, N_v \rangle - \langle X_{uv}, N_v \rangle \\ &= \frac{E_v}{2E} (\langle N, X_{uu} \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle) \end{aligned}$$

é obtida aplicando-se sucessivamente equações: (12), (11), (6) e (7).

Ou seja,

$$\ell_v - m_u = E_v \frac{\ell + n}{2E} = E_v H$$

Donde

$$\ell_v - m_u = \left(\frac{\ell + n}{2} \right)_v$$

quando H é constante.

Ou seja,

$$\left(\frac{\ell - n}{2} \right)_v = m_u \quad (13)$$

Analogamente obtemos

$$\left(\frac{\ell - n}{2}\right)_u = -m_v \quad (14)$$

Por conseguinte concluímos das equações (13) e (14) que a função complexa,

$$\varnothing(u + iv) = \left(\frac{\ell - n}{2}\right) - im$$

é de fato holomorfa, já que $Re\varnothing$ e $Im\varnothing$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann $\clubsuit$.

Apêndice 2: A divergência e o laplaciano sobre uma superfície

Consideramos novamente M uma superfície suave em R^3 com campo normal unitário N , seja $p \in M$. A 2-forma *elemento de área* dA é definida em uma base positiva⁵ $\{v, w\}$ de $T_p M$ por $dA(v, w) = \|v \times w\|$ (área do paralelogramo definida por v e w).

É fácil verificar que o elemento da área dA relativo a uma parametrização local $X: U \subset R^2 \rightarrow M$, $X(u, v) = p$ e dado por,

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Claro que,

$$dA = E du dv$$

quando a parametrização X é isotérmica (Confira no apêndice 1).

Definimos a *divergência* de uma campo de vetores suave Y (de Classe C^∞) sobre M denotada por $div Y$, por (com respeito a uma isotérmica):

$$div Y(p) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left\langle Y, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \right) + \frac{1}{E} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left\langle Y, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \right)$$

Na verdade, apesar da definição acima fazer uso de uma carta local, a noção de divergência é *intrínseca* à geometria de M , dependendo apenas da 1a. forma fundamental. De fato, efetuando um cálculo simples que utiliza a expressão local de dA e do campo Y relativa à carta X , não é difícil mostrar que (c.f.: [15]):

⁵ A base $\{v, w\}$ de $T_p M$ é chamada de positiva se $\langle v \times w, N(p) \rangle > 0$ para $p \in M$.

$$d(c_Y dA) = (\operatorname{div} Y) dA \quad (15)$$

onde d é derivação exterior e $c_Y dA$ é contração⁶ de dA por Y .

Uma importante consequência de (15) e do Teorema de Stokes para a geometria diferencial é o chamado *Teorema da Divergência* (intrínseco), dado pela seguinte fórmula:

$$\int_M \operatorname{div} Y dA = - \int_{\partial M} \langle Y, \eta \rangle ds \quad (16)$$

onde η é o vetor conormal interior de M ao longo de ∂M .

Vamos discutir com mais detalhes (16) a fim de elucidar um pouco esta útil fórmula geométrica:

Com efeito, seja $\tilde{n}$ a 1-forma dual (sobre um "colarinho" de M) definida por :

$$\tilde{n}(\eta) = 1$$

e

$$\tilde{n}(T) = 0$$

para todo vetor tangente T ao longo de ∂M . Considere também ds a 1-forma elemento de comprimento de arco de ∂M dada por:

$$ds(T) = \|T\|$$

onde T é um vetor tangente à ∂M quando ∂M está orientado com a orientação induzida. Segue, imediatamente, que o elemento de área dA pode ser decomposto no produto:

$$dA = ds \wedge \tilde{n}^7$$

Consequentemente,

$$(c_Y dA)(u) = dA(Y, h > \|v\|)$$

Ou seja,

$$c_Y dA = - \langle Y, \eta \rangle ds \quad (17)$$

⁶ i.e., $c_Y dA$ é a 1-forma sobre M , tal que para $p \in M$; $c_Y dA(v) = dA(Y, v)$, $v \in T_p M$.

⁷ Lembremos que T é um vetor tangente à M quando M tem orientação induzida e $\{-n, T\}$ é uma base positiva ao longo de M , i.e., $\langle T \times, N \rangle > 0$.

Agora a fórmula (16) segue de (15) e de (17), por uma aplicação direta do Teorema de Stokes (c.f.: [15]).

Em seguida, abordaremos o laplaciano: Seja f uma função suave (de classe C^∞) sobre M . O laplaciano de f denotado por Δf , está definido por:

$$Df(p) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} (f \circ X) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} (f \circ X) \right)$$

onde, $X: U \subset R^2 \rightarrow M$ é uma carta local isotérmica, com $X(u, v) = p$. É um exercício de regra da cadeia, fazendo uso das equações de Cauchy-Riemann, mostrar que a definição acima não depende da escolha da carta isotérmica X .

Por outro lado, o caráter intrínseco de Δf pode ser também computado pela seguinte fórmula:

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f \quad (18)$$

onde Δf é o gradiente⁸ de f .

Agora, observe que:

$$\left\langle \Delta X, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \frac{1}{E} (\langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_{uv}, X_v \rangle),$$

por definição de ΔX ,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{E} (\langle X_{uu}, X_u \rangle - \langle X_{uv}, X_v \rangle) \\ &= \frac{1}{E} (\langle X_{uu}, X_u \rangle - \langle X_{uv}, X_v \rangle) \\ &= \frac{1}{2E} (\langle X_u, X_u \rangle_u - \langle X_v, X_v \rangle_v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

⁸ O gradiente de f , está definido por $\langle \nabla f, Y \rangle(p) = df_p(Y(p))$, para todo campo Y de vetores tangente à M .

Analogamente, deduz-se que $\left\langle \Delta X, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = 0$.

Finalmente,

$$\langle \Delta X, N \rangle = \frac{1}{E} (\langle X_m, N \rangle + \langle X_v, N \rangle) = 2H$$

Donde se conclui,

$$\Delta X = 2H \mathbf{a}. \quad (19)$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

- ALEXANDROV, A. Uniqueness theorems for surfaces in the large I, *A.M.S. Translations, series 2*, 21:341-354, 1962.
- BRITO, F. & EARP, R.S. Geometric configurations of constant mean curvature surfaces with planar boundary. *An Acad. Bras. Ci.*, 63(1):5-19, 1991.
- BRITO, F. & EARP, R.S., On the configurations of certain prescribed mean curvature surface with planar boundary (Preprint).
- BRITO, F., EARP, R.S., MEEKS, W. & ROSENBERG, H. Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve, *Indiana U. Math. Journ.*, 40:333-343, 1991.
- CARMO, M. Differential Geometry of Curves and Surfaces, [s.l.], Prentice-Hall, 1976, 503 p.
- DELAUNAY, C. Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constant. *J. Math. Pures Appl.*, 309-315, 1941.
- EARP, R.S. & ROSENBERG, H. Some Remarks on surfaces of prescribed mean curvature. IN SYMPOSIUM IN HONOR OF MANFREDO P. DO CARMO, PITMAN MONOGRAPHS AND SURVEYS IN PURE AND APPLIED MATHEMATICS, 1991, 123-148.
- EARP, R.S. & ROSENBERG, H. Some structure theorems for complete constant mean curvature surfaces with boundary a convex curve. *A.M.S. Proceedings*, 113(4), 1991. (In press).
- GOMES, J.M. A curvatura média das superfícies II. *Matemática Universitário*, 2:20-48, 1985.
- GOMES, J.M. *Sobre hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço hiperbólico*. Rio de Janeiro: IMPA, 1985. Tese (Doutorado).

- HOFFMAN, D. & MEEKS, W. Minimal surfaces based on the catenoid. *Am. Math. Mon.*, 97(8):702-730, 1990.
- HOPF, H. Lectures differential geometry in the large. New York: Springer - verlag, 1983. (Lecture Notes in Mathematics, 1000).
- KAPOULEAS, N. Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean Three-Spaces. *Ann. of Math.*, 131, 239-330, 1990.
- KOREVAAR, N., & KUSNER, R., SOLOMON, B. The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature. *J. Diff. Geom.* 30:465-503, 1989.
- LANG, S. Differential Manifolds, Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- MEEKS, W. The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature. *Journ. Diff. Geom.*, 27:539-552, 1988.
- SPIVAK, M. A Comprehensive introduction differential geometry. Berkley: Perish, 1975, 5v.

MÉTODO DO POÇO DE POTENCIAL E A REGULARIDADE ESCONDIDA DE UMA EQUAÇÃO HIPERBÓLICA NÃO-LINEAR

Marcelo M. Cavalcanti e Valéria N. Domingos Cavalcanti*

RESUMO. Consideremos a equação da onda não-linear:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u^2 \quad *$$

no cilindro $Q = \Omega \times]0, \infty[$, onde Ω é um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \leq 6$, com fronteira Γ bem regular. Os dados iniciais $u(x, 0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$, são apropriadamente escolhidos e a condição de fronteira é

do tipo Dirichlet, isto é, $u = 0$ em $\Sigma = \Gamma \times]0, \infty[$. Neste "paper" estudamos a existência de solução do problema acima, utilizando o "Método do Poço de Potencial", conceito introduzido por D.H. Sattinger em [17](1968). Além disso, estudamos também a regularidade de $\frac{\partial u}{\partial v}$ onde u é a solução de (*), com

$n \leq 4$, utilizando um método desenvolvido por J.L. Lions em [04](1987). Esse tipo de resultado foi denominado por ele de "Regularidade Escondida" de u .

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Método do Poço de Potencial, Regularidade Escondida.

ABSTRACT. POTENTIAL WELL METHOD AND THE HIDDEN REGULARITY OF A NONLINEAR HYPERBOLICAL EQUATION. We consider the nonlinear wave equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u^2 \quad *$$

* Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 3690, Campus Universitário, 87020-900, Maringá-Paraná, Brasil.

in the cilinder $Q = \Omega \times]0, T[$, where Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^n$, $n \leq 6$, with smooth boundary Γ . The initial data $u(x, 0) = u_0(x)$ $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$,

are appropriately chosen and the boundary condition is of Dirichlet's type, that is, $u = 0$ in $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$. In this paper we study the existence of solution of the above problem using the "Potential Well Method", concept introduced by D.H. Sattinger in [17] (1968). Furthermore, we also study the regularity of

$\frac{\partial u}{\partial \nu}$, where u is the solution of (*), with $n \leq 4$, using a method developed by

J.L. Lions in [04] (1987). He called this type of result "Hidden Regularity" of u .

Key words: Partial Differential Equations, Potential Well Method, Hidden Regularity.

INTRODUÇÃO

Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \leq 6$, com fronteira Γ bem regular. Seja $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional definido por:

$$J(z) = \frac{1}{2} \|z\|^2 + \frac{1}{3} \int_{\Omega} z^3(x) dx, \quad z \in H_0^1(\Omega) \quad (1)$$

onde $\| \cdot \|$ representa a norma de z em $H_0^1(\Omega)$ proveniente da fórmula de Dirichlet:

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega) \quad (2)$$

Observação 1: $H_0^1(\Omega)$ denota o clássico espaço de Sobolev das funções Φ tais que $\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \in L^2(\Omega)$ e além disso $\Phi = 0$ em Γ .

Todas as funções consideradas aqui têm valores reais.

Observação 2: De acordo com a desigualdade de Sobolev, $H_0^1(\Omega) \subset L^3(\Omega)$ se e só se $n \leq 6$. Consequentemente o funcional em (1) está bem posto, além de ser contínuo em $H_0^1(\Omega)$.

Introduzamos:

$$d = \inf_{\substack{z \in H_0^1(\Omega) \\ z \neq 0}} \left(\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda z) \right) \quad (3)$$

Mostraremos que $d > 0$ o que nos permitirá definir o conjunto de estabilidade:

$$\mathcal{W} = \{z / z \in H_0^1(\Omega), 0 \leq J(\lambda z) < d, \forall \lambda \in [0, 1]\} \quad (4)$$

o qual provaremos ser um conjunto aberto e limitado de $H_0^1(\Omega)$.

No cilindro $Q = \Omega \times]0, T[$, onde T é um número real positivo arbitrário, consideremos a equação hiperbólica não-linear:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u^2 = 0 \quad \text{em } Q \quad (5)$$

em condições iniciais:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \quad (6)$$

e sujeita à condição de fronteira:

$$u = 0 \quad \text{em } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\quad (7)$$

Assumamos que:

$$u_0 \in \mathcal{W}, \quad u_1 \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + J(u_0) < d \quad (8)$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma em $L^2(\Omega)$ proveniente do produto interno:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L^2(\Omega) \quad (9)$$

Provaremos que:

TEOREMA 1: Suponhamos que (8) seja satisfeito. Então existe uma solução $u: Q \rightarrow \mathbb{R}$ fraca do problema (5), (6) e (7) na classe:

$$u \in C_s(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u' = \frac{\partial u}{\partial t} \in C_s(0, T; L^2(\Omega)) \quad (10)$$

A questão da unicidade é resolvida para o caso em que $n \leq 4$.

Observação 3: $C_s(0, T; X)$ denota o espaço das funções $\Phi \in L^\infty(0, T; X)$ que são escalarmente contínuas de $[0, T]$ em X , ou seja, tal que a aplicação $t \mapsto \langle g, \Phi(t) \rangle_{X', X}$ é contínua para todo $g \in X'$.

Assumamos agora, que:

$$u_0 \in \mathcal{W} \cap H^2(\Omega), u_1 \in H_0^1(\Omega), \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + J(u_0) < d \text{ e } n \leq 4 \quad (11)$$

Provaremos o seguinte resultado de regularidade:

TEOREMA 2: Suponhamos que (11) seja satisfeito. Então existe uma única solução $u \rightarrow \mathbb{R}$ fraca do problema (5), (6) e (7), na classe:

$$\begin{aligned} u_0 &\in C_s(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad u' \in C_s(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ u' &\in C_s(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \quad (12)$$

Consideremos, agora, a equação da onda:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = f \text{ em } Q \quad (13)$$

$$\Phi = 0 \text{ em } \Sigma \quad (14)$$

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0) = \Phi_1(x), \quad x \in \Omega \quad (15)$$

Assumamos que:

$$\Phi_0 \in H_0^1(\Omega), \quad \Phi_1 \in L^2(\Omega) \text{ e } f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (16)$$

É sabido (conforme J.L. Lions [10] que o problema (13), (14) e (15) sujeito às condições dadas como em (16) tem uma única solução $\Phi: Q \rightarrow \mathbb{R}$ na classe:

$$\Phi \in C(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \Phi' \in C(0, T; L^2(\Omega)) \quad (17)$$

Provaremos que:

TEOREMA 3: A solução Φ de (13), (14), (15) juntamente com (16) satisfaz as condições:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma) \text{ e } \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \left(E_0 + \|f\|_{L^2(Q)}^2 \right)^{1/2} \quad (18)$$

onde C é uma constante positiva e $E_0 = E(0)$ é a energia inicial do problema (13)-(15).

Observação 4: Como $\Phi' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ segue-se que $\Phi'' \in H^{-1}(0, T; L^2(\Omega))$ onde este espaço é o dual de:

¹ Por ν representamos a normal Γ , dirigida para o exterior de Ω .

$$H_0^1(0, T; L^2(\Omega)) = \{v / v, v' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), v(0) = v(T) = 0\}$$

Logo:

$$-\Delta \Phi = f - \Phi'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) + H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)) \quad (19)$$

Então de (19), $\Phi = 0$ em Σ e os resultados standards de regularidade das equações elípticas implicam que:

$$\Phi \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) + H^{-1}(0, T; H^2(\Omega)) \quad (20)$$

e portanto, face aos teoremas de traço:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) + H^{-1}(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \quad (21)$$

o que mostra que $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$ faz sentido.

Observamos que (18) não segue de (21); isto é o que denominamos a propriedade da "regularidade escondida".

Observação 5: Notemos que a solução $u: Q \rightarrow \mathbb{R}$ do problema (5), (6) e (7) com dados iniciais como em (11) e na classe (12) é tal que:

$$u^2 \in C_s(0, T; L^2(\Omega))$$

e portanto temos em particular:

$$u'' - \Delta u = f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (22)$$

Mas (22), (6), (7) e (11) implicam de acordo com o Teorema 3 que $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$. Mais geralmente se $n \leq 4$ então $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ e de

maneira análoga temos que a solução $u: Q \rightarrow \mathbb{R}$ do problema (5), (6) e (7) sujeita, agora, aos dados iniciais como em (8) verifica também (22) e conseqüentemente temos $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$.

O POÇO DE POTENCIAL

No que segue, apresentaremos um método desenvolvido por D.H. Sattinger em [17], que nos será útil, na próxima seção, para determinarmos existência de solução do problema (5), (6) e (7).

Lema 2.1: Seja d dados como em (3). Então $d > 0$.

Demonstração:

Para cada $z \in H_0^1(\Omega)$, $z \neq 0$ consideremos a aplicação $M_z(\lambda)$ real definida por:

$$M_z(\lambda) = J(\lambda z) = \frac{\lambda^2}{2} \|z\|^2 + \frac{\lambda^3}{3} \int_{\Omega} z^3 dx \quad (23)$$

Temos dois casos a considerar:

$$1^{\text{º}} \text{ Caso: } \int_{\Omega} z^3 dx \geq 0$$

Sendo $\int_{\Omega} z^3 dx = 0$ então $M_z(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} \|z\|^2$ representa uma parábola côncava para cima com mínimo em $\lambda_0 = 0$. Portanto:

$$\sup_{\lambda \geq 0} M_z(\lambda) = +\infty \quad (24)$$

Se $\int_{\Omega} z^3 dx > 0$ então $M_z(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} \|z\|^2 + \frac{\lambda^3}{3} \int_{\Omega} z^3 dx \geq \frac{\lambda^2}{2} \|z\|^2$ e também neste caso:

$$\sup_{\lambda \geq 0} M_z(\lambda) = +\infty \quad (25)$$

$$2^{\text{º}} \text{ Caso: } \int_{\Omega} z^3 dx < 0$$

De (23) temos que:

$$\frac{d}{d\lambda} (M_z(\lambda)) = \lambda \|z\|^2 + \lambda^2 \int_{\Omega} z^3 dx \quad (26)$$

Igualando-se a expressão em (26) a zero para a obtenção dos pontos críticos de M_z vem que tais pontos críticos são:

$$\lambda_0 = 0 \text{ e } \lambda_1 = -\frac{\|z\|^2}{\int_{\Omega} z^3 dx} \quad (27)$$

Convém notar que $\lambda_1 > 0$. Além disso de (26) temos que $\frac{d}{d\lambda} (M_z(\lambda))$ representa uma parábola côncava para baixo cujos zeros são dados por λ_0 e λ_1 em (27).

Desta forma, sempre que $\int_{\Omega} z^3 dx < 0$ a aplicação $M_z(\lambda)$ será crescente no intervalo $[0, \lambda_1]$. Em verdade, para $\lambda_0 = 0$, obtém-se:

$\frac{d^2}{d\lambda^2}(M_z(0)) = \|z\|^2 > 0$ pois $z \neq 0$. Portanto $\lambda_0 = 0$ é um ponto de **mínimo local** de M_z .

Analogamente:

$\frac{d^2}{d\lambda^2}(M_z(\lambda_1)) = -\|z\|^2 < 0$ e conseqüentemente em λ_1 tem-se um ponto de **máximo local** de M_z (em verdade absoluto para $\lambda \geq 0$).

Por outro lado, temos:

$$M_z(\lambda_1) = \frac{1}{6} \frac{\|z\|^6}{\left(\int_{\Omega} z^3 dx\right)^2} \quad (28)$$

Lembremos que $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$ e por conseguinte $\exists K_0 > 0$ tal que:

$$\|z\|_{L^3(\Omega)} \leq K_0 \|z\|, \quad \forall z \in H^1_0(\Omega) \quad (29)$$

Como

$$\left| \int_{\Omega} z^3 dx \right| \leq \int_{\Omega} |z|^3 dx = \|z\|_{L^3(\Omega)}^3, \quad \forall z \in H^1_0(\Omega)$$

então por (29) vem que:

$$\left(\int_{\Omega} z^3 dx \right)^2 \leq \|z\|_{L^3(\Omega)}^6 \leq K_0^6(\Omega) \|z\|^6$$

Daí

$$\|z\|^6 \geq \frac{1}{K_0^6} \left(\int_{\Omega} z^3 dx \right)^2$$

Substituindo-se a desigualdade acima em (28), obtemos:

$$M_z(\lambda_1) \geq \frac{1}{6K_0^6} > 0, \quad \forall z \in K_0^1(\Omega), \quad z \neq 0$$

Segue-se daí que:

$$\sup_{\lambda \geq 0} M_z(\lambda_1) = M_z(\lambda_1) \geq \frac{1}{6K_0^6} > 0, \quad \forall z \in K_0^1(\Omega), \quad z \neq 0$$

Donde:

$$d = \inf_{\substack{z \in H_0^1 \\ z \neq 0}} \left\{ \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda z) \right\} > 0 \quad (30)$$

Logo, de (24), (25) e (30) temos o desejado.

Agora, introduziremos o conjunto de estabilidade supracitado.

Definição: Seja $d > 0$ conforme definido em (3). O "Poço de Potencial" $\mathcal{W}$ é definido como subconjunto de $H_0^1(\Omega)$ dado por:

$$\mathcal{W} = \{z \in H_0^1(\Omega), 0 \leq J(\lambda z) < d, \forall \lambda \in [0, 1]\} \quad (31)$$

Observação: Note-se que de acordo com a definição de $\mathcal{W}$ se $z \in \mathcal{W}$ então $\theta z \in \mathcal{W}, \forall \theta \in [0, 1]$.

Lema 2.2: O conjunto $\mathcal{W}$ contém a bola $\mathcal{B}$ Definida por:

$$\mathcal{B} = \{z / z \in H_0^1(\Omega), \|z\| < \rho \text{ onde } \rho > 0 \text{ é escolhido} \\ \text{satisfazendo à } \rho \leq \frac{3}{2K_0^3}, \frac{\rho^2}{2} + \frac{K_0^3}{3} \rho^3 < d\} \quad (32)$$

Demonstração:

Seja $z \in \mathcal{B}$. Provaremos que $0 < J(\lambda z) < d$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Com efeito, seja $\lambda \in [0, 1]$ e consideremos:

$$J(z) = \frac{\lambda^2}{2} \|z\|^2 + \frac{\lambda^3}{2} \int_{\Omega} z^3 dx$$

Então:

$$\frac{\lambda^2}{2} \|z\|^2 - \frac{\lambda^3}{3} \|z\|_{L^3(\Omega)}^3 \leq J(\lambda z) \leq \frac{\lambda^2}{2} \|z\|^2 + \frac{\lambda^3}{3} \|z\|_{L^3(\Omega)}^3$$

De (29) vem que:

$$\frac{\lambda^2}{2} \|z\|^2 - \frac{\lambda^3}{3} K_0^3 \|z\|^3 \leq J(\lambda z) \leq \frac{\lambda^2}{2} \|z\|^2 + \frac{\lambda^3}{3} K_0^3 \|z\|^3$$

Donde:

$J(\lambda z) \geq 0$ desde que

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{3} K_0^3 \|z\| \geq 0 \quad (33)$$

Pelo fato de $0 \leq \lambda \leq 1$ então:

$$\frac{1}{2} - \frac{K_0^3}{3} \|z\| \leq \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{3} K_0^3 \|z\|$$

Desta forma, para obtermos (33) basta que tenhamos

$$\frac{1}{2} - \frac{K_0^3}{3} \|z\| \geq 0 \quad (34)$$

Contudo, como $z \in \mathcal{B}$ então $\|z\| < \rho < \frac{3}{2K_0^3}$ e portanto (34) é

satisfeito e conseqüentemente $J(\lambda z) \geq 0$.

Por outro lado, como $\lambda \leq 1$ e ainda de (29) obtemos:

$$J(\lambda z) \leq \frac{1}{2} \|z\|^2 + \frac{1}{3} K_0^3 \|z\|^3$$

Como $z \in \mathcal{B}$ da última desigualdade vem que:

$$J(\lambda z) \leq \frac{1}{2} \rho^2 + \frac{1}{3} K_0^3 \rho^3 < d. \blacksquare$$

Lema 2.3: Seja $\mathcal{W}_* = \left\{ z \in H_0^1(\Omega), \|z\|^2 + \int_{\Omega} z^3 dx > 0 \text{ e } J(z) < d \right\}$.

Então: $\mathcal{W} = \mathcal{W}_* \cup \mathcal{B}$ onde $\mathcal{B}$ é definido como em (32).

Demonstração:

Basta provarmos que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_* \cup \{0\}$ pois supondo-se que tal aconteça então $\mathcal{W} \cup \mathcal{B} = \mathcal{W}_* \cup \mathcal{B}$ pois $0 \in \mathcal{B}$. De acordo com o Lema 2.2, $\mathcal{B} \cup \mathcal{W}$ e da última igualdade vem que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_* \cup \mathcal{B}$.

Provemos então que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_* \cup \{0\}$.

Seja $z \in \mathcal{W}$. Se $z = 0$ então $z \in \mathcal{W}_* \cup \{0\}$. Suponhamos, então, que $z \neq 0$. Logo, $0 \leq J(\lambda z) < d, \forall \lambda \in [0, 1]$. Em particular, $J(z) < d$. Resta-nos provar que $\|z\|^2 + \int_{\Omega} z^3 dx > 0$. Temos 2 casos a considerar:

$$(1^{\text{a}}) \quad \int_{\Omega} z^3 dx \geq 0$$

Neste caso nada temos a provar.

$$(2^{\text{a}}) \quad \int_{\Omega} z^3 dx < 0$$

De acordo com o que vimos na demonstração do Lema 2.1 (2^a caso) temos que:

$$\sup_{\lambda \in [0, \lambda_1]} J(\lambda z) = J(\lambda_1 z) = J\left(-\frac{\|z\|^2}{\int_{\Omega} z^3 dx} z\right) \geq \inf_{\substack{z \in H_0^1(\Omega) \\ z \neq 0}} \left(\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda z) \right) = d$$

Segue-se daí que $\lambda_1 = -\frac{\|z\|^2}{\int_{\Omega} z^3 dx} > 1$, pois, caso contrário, se $\lambda_1 \leq 1$,

como $\lambda_1 > 0$ então $\lambda_1 \in [0, 1]$ e pelo fato de $z \in \mathcal{W}$ seguir-se que $0 \leq J(\lambda_1 z) < d$ o que é uma contradição!

Assim:

$$\lambda_1 = -\frac{\|z\|^2}{\int_{\Omega} z^3 dx} > 1$$

o que implica:

$$\|z\|^2 + \int_{\Omega} z^3 dx > 0$$

e portanto $z \in \mathcal{W}_*$.

Reciprocamente seja $z \in \mathcal{W}_*$. Provaremos que $0 \leq J(\lambda z) < d$, $\forall \lambda \in [0, 1]$.

Tomemos então $\lambda_0 \in [0, 1]$. Temos 2 casos a considerar:

$$(1^{\text{a}}) \quad \int_{\Omega} z^3 dx \geq 0$$

Neste caso $J(\lambda_0 z) = \frac{\lambda_0^2}{2} \|z\|^2 + \frac{\lambda_0^3}{3} \int_{\Omega} z^3 dx \geq 0$. Além disso, pelo fato de:

$$J(\lambda z) = \frac{\lambda^2}{2} \|z\|^2 + \frac{\lambda^3}{3} \int_{\Omega} z^3 dx \leq \frac{1}{2} \|z\|^2 + \frac{1}{3} \int_{\Omega} z^3 dx = J(z), \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

temos, em particular, que:

$$J(\lambda_0 z) \leq J(z) < d \quad \text{já que } z \in \mathcal{W}_*. \text{ Assim } z \in \mathcal{W}$$

$$(2^{\text{a}}) \quad \int_{\Omega} z^3 dx < 0$$

De acordo com o que vimos na demonstração do Lema 2.1, em seu 2º caso, $M_z(\lambda) = J(\lambda z)$ assumia um mínimo local no ponto 0. Em verdade, tal número é absoluto no intervalo $[0, 1]$.

De fato que $\lambda_1 = -\frac{\|z\|^2}{\int_{\Omega} z^3 dx} > 1$, pois se não o fosse, ou seja, se

$$-\frac{\|z\|^2}{\int_{\Omega} z^3 dx} \leq 1 \quad \text{então} \quad \|z\|^2 + \int_{\Omega} z^3 dx \leq 0 \quad \text{o que contraria a hipótese de}$$

$z \in \mathcal{W}_*$. Por outro lado, como $\frac{d}{d\lambda}(M_z(\lambda))$ é uma função positiva no intervalo $[0, \lambda_1]$ segue-se que $M_z(\lambda)$ é crescente em $[0, \lambda_1]$. Em particular, $M_z(\lambda)$ é crescente em $[0, 1]$ o que implica que 0 é o mínimo absoluto em $[0, 1]$. Segue-se daí que:

$0 = M_z(0) \leq M_z(\lambda_0) = J(\lambda_0 z)$. Além disso, como $\lambda_0 \leq 1$ temos: $M_z(\lambda_0) = J(\lambda_0 z) \leq J(z) = M_z(1)$ e como $z \in \mathcal{W}_*$, vem:

$$J(\lambda_0 z) \leq J(z) < d, \quad z \in \mathcal{W}_*.$$

Corolário 1: O conjunto $\mathcal{W}$ definido em (31) é aberto em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração:

Consideremos os funcionais $J, L: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$L(z) = \|z\|^2 + \int_{\Omega} z^3 dx$$

$$J(z) = \frac{1}{2}\|z\|^2 + \frac{1}{3}\int_{\Omega} z^3 dx$$

que são claramente contínuos em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, temos que os conjuntos:

$$\mathcal{W}_1 = \{z \in H_0^1(\Omega), L(z) > 0\} = L^{-1}(0, +\infty)$$

$$\mathcal{W}_2 = \{z \in H_0^1(\Omega), L(z) < d\} = J^{-1}(-\infty, d)$$

são abertos em $H_0^1(\Omega)$.

Como $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ segue-se que $\mathcal{W}_*$ é aberto em $H_0^1(\Omega)$ e pelo fato de $\mathcal{W} = \mathcal{W}_* \cup \mathcal{B}$ temos então que $\mathcal{W}$ é aberto em $H_0^1(\Omega)$. ■

Corolário 2: O conjunto $\mathcal{W}$ é limitado em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração:

Provaremos que $\mathcal{W} \subset B_r(0)$ para algum $r > 0$. De fato: seja $z \in \mathcal{W}$. Temos 2 casos a considerar:

$$(1^\circ) \quad \int_{\Omega} z^3 dx \geq 0$$

Neste caso $J(z) = \frac{1}{2}\|z\|^2 + \frac{1}{3}\int_{\Omega} z^3 dx \geq \frac{1}{2}\|z\|^2$. Onde:

$$\|z\|^2 \leq 2J(z) < 2d$$

Logo $\|z\| < (\sqrt{2d})$.

$$(2^o) \int_{\Omega} z^3 dx < 0$$

Como $\mathcal{W} = \mathcal{W}_* \cup \mathcal{B}$ então $\int_{\Omega} z^3 dx + \|z\|^2 > 0$ (uma vez que se $z \in \mathcal{B}$ o desejado segue trivialmente) e portanto $\int_{\Omega} z^3 dx > -\|z\|^2$. Daí

$$J(z) = \frac{1}{2}\|z\|^2 + \frac{1}{3}\int_{\Omega} z^3 dx > \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\|z\|^2 = \frac{1}{6}\|z\|^2$$

e conseqüentemente:

$$\|z\|^2 (6J(z) < 6d)$$

Assim:

$$\|z\| < (\sqrt{6d}). \blacksquare$$

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES GLOBAIS

No próximo passo é demonstrar um teorema de estabilidade para o problema (5), (6) e (7).

TEOREMA 1: Seja Ω um aberto limitado com fronteira Γ bem regular de $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 6$), de e $\mathcal{W}$ definidos como em (3) e (4). Assumamos que os dados iniciais satisfaçam (8). Então existe uma função $u: Q \rightarrow \mathbb{R}$ na classe:

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (35)$$

tal que u é solução fraca de $u'' - \Delta u + u^2 = 0$, ou seja:

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + a(u(t), v) + \left\langle u^2(t), v \right\rangle = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

no sentido de $\mathcal{D}'[0, T[$.

$$u(0) = u_0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega) \quad (36)$$

$$u'(0) = u_1 \quad \text{em } H^2(\Omega) \quad (37)$$

Demonstração:

Para provarmos o teorema em questão, aplicaremos o Método de Faedo-Galerkin, juntamente com o Método do Poço de Potencial desenvolvido na seção anterior.

1ª Etapa: Soluções Aproximadas

Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço separável, existe uma base $(\omega_v^*)_{v \in \mathbb{N}}$ para tal espaço. Em outras palavras, podemos considerar a existência de uma sequência $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_v^*, \dots$ de funções de $H_0^1(\Omega)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $\forall m, \omega_1^*, \dots, \omega_m^*$ são linearmente independentes.
- (ii) As combinações lineares finitas são densas em $H_0^1(\Omega)$.

De posse da base (ω_v^*) podemos construir uma outra base (u_v) de modo que existam sequências $(u_{om}), (u_{lm})$ tais que:

$$u_{om} \in \mathcal{W}, u_{om} \rightarrow u_o \text{ em } H_0^1(\Omega) \quad (38)$$

$$u_{lm} \in H_0^1(\Omega), u_{lm} \rightarrow u_l \text{ em } L^2(\Omega) \quad (39)$$

$$u_{om}, u_{lm} \in V_m = [\omega_o, \dots, \omega_m] \text{ (subespaço gerado por } \omega_o, \dots, \omega_m, m \geq 1) \quad (40)$$

$$\frac{1}{2}|u_{lm}|^2 + J(u_{om}) < d \quad (41)$$

De fato:

Ponhamos, por exemplo, $\omega_o = u_o, \omega_1 = \omega_1^*, \omega_2 = \omega_2^*, \dots$

Então:

(i) $\exists u_{om} \in \mathcal{W}, u_{om} \rightarrow u_o \text{ em } H_0^1(\Omega)$. Basta considerarmos $u_{om} = u_o$.

(ii) $\exists u_{om} \in H_0^1(\Omega), u_{lm} \rightarrow u_l \text{ em } L^2(\Omega)$. A existência é garantida já que as combinações lineares finitas de elementos de (ω_v^*) são densas em $H_0^1(\Omega)$ que por sua vez é denso em $L^2(\Omega)$.

(iii) $u_{om}, u_{lm} \in V_m$ já que $V_m = [u_o, \omega_1^*, \dots, \omega_m^*], u_{om} = u_o$ e além disso pelo item (ii) u_{lm} é dado por uma combinação linear dos $\omega_1^*, \dots, \omega_m^*$.

(iv) $\frac{1}{2}|u_{lm}|^2 + J(u_{om}) < d$, para m suficientemente grande.

Com efeito, dado $\varepsilon = d - \left(\frac{1}{2}|u_l|^2 + J(u_o) \right) < 0$, $\exists m_o \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall m \geq m_o$ temos:

$$\left| \left(\frac{1}{2} |u_{1m}|^2 + J(u_{0m}) \right) - \left(\frac{1}{2} |u_1|^2 + J(u_0) \right) \right| < \varepsilon$$

(isto porque $u_{0m} \rightarrow u_0$ em $H_0^1(\Omega)$, $u_{1m} \rightarrow u_1$ em $L^2(\Omega)$ e $K(u) = \frac{1}{2}|u|^2$ e J são funcionais contínuos).

$$\frac{1}{2} |u_{1m}|^2 + J(u_{0m}) < \varepsilon + \left(\frac{1}{2} |u_1|^2 + J(u_0) \right) = d, \quad \forall m \geq m_0$$

Agora, com a garantia da existência de uma base que satisfaça as condições (38) - (41), consideremos, então, ainda com a mesma notação (ω_j) esta tal base e seja $u_m(t)$ uma solução aproximada do problema sob a forma:

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \omega_j \quad (42)$$

Com os $g_{mj}(t)$ a determinar satisfazendo ao sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares.

$$\begin{cases} u_m(t) \in V_m = [\omega_1, \dots, \omega_m] \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} (u_m''(t), \omega_j) + a(u_m(t), \omega_j) + \int_{\Omega} u_m^2(t) \omega_j dx = 0, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases} \quad (44)$$

O sistema (43) - (44) estará completo com as condições iniciais:

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_{0m} = \sum \alpha_{jm} \omega_j \rightarrow u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega), \quad u_{0m} \in \mathcal{W} \quad (45)$$

$$u_m'(0) = u_{1m}, \quad u_{1m} = \sum \beta_{jm} \omega_j \rightarrow u_1 \text{ em } L^2(\Omega), \quad u_{1m} \in H_0^1(\Omega) \quad (46)$$

Os resultados gerais sobre sistemas de equações diferenciais, mais precisamente o Teorema de Caratheodory, nos assegura a existência de uma solução de (43), (44), (45) e (46) (note que $(\omega_i, \omega_j) \neq 0$ graças a independência linear de $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ em um intervalo $[0, t_m]$. As estimativas a priori servirão para mostrar que $t_m = T$.

2ª Etapa: Estimativas a Priori

Multiplicando-se a equação (44) por $g_{jm}'(t)$ e somando-se em j , vem:

$$(u_m''(t), u_m'(t)) + a(u_m(t), u_m'(t)) + \int_{\Omega} u_m^2(t) u_m'(t) dx = 0 \quad (47)$$

Donde:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m'(t)|^2 + a(u_m(t), u_m'(t)) + \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} u_m^3(x, t) dx \right] = 0 \quad (48)$$

Pondo-se $\|v\| = \sqrt{a(v, v)}$ (= norma sobre $H_0^1(\Omega)$) equivalente a $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ resulta de (48) que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} u_m^3(x, t) dx \right] = 0 \quad (49)$$

Integrando-se de 0 à t ($t \in [0, t_m]$) vem, de (49) que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{3} \int_{\Omega} u_m^3(x, t) dx = \\ = \frac{1}{2} |u_{1m}|^2 + \frac{1}{2} \|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{3} \int_{\Omega} u_{0m}^3 dx \end{aligned} \quad (50)$$

Equivalentemente:

$$\frac{1}{2} |u'_m(t)|^2 + J(u_m(t)) = \frac{1}{2} |u_{1m}|^2 + J(u_{0m}) \quad (51)$$

Afirmamos que para cada m temos:

$$u_m(t) \in \mathcal{W}, \forall t \in [0, t_m] \quad (t_m > 0) \quad (52)$$

Com efeito, dado $m \in \mathbb{N}$ (arbitrário, porém fixado) suponhamos que $\exists t_0 \in [0, t_m]$ tal que $u_m(t_0) \notin \mathcal{W}$. O ponto t_0 será diferente de zero pois $u_m(0) = u_{0m}$ e este por sua vez pertence a $\mathcal{W}$. Logo $0 < t_0 < t_m$.

Seja $t_1 = \inf\{t \in [0, t_m], u_m(t_0) \notin \mathcal{W}\}$; t_1 está bem definido pois o conjunto $\{t \in [0, t_m], u_m(t) \notin \mathcal{W}\}$ é não vazio (já que $u_m(t_0) \notin \mathcal{W}$) e é limitado inferiormente tendo 0 como cota inferior.

Observamos, também que $t_1 > 0$.

Com efeito, sendo $\mathcal{W}$ aberto em $H_0^1(\Omega)$ e pelo fato de $u_m(0) \in \mathcal{W}$ $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_0}(u_m(0)) \subset \mathcal{W}$. Sendo $u_m(t)$ contínua existirá $\delta > 0$ tal que $u_m(t) \in B_{\varepsilon_0}(u_m(0)) \subset \mathcal{W}, \forall t \in [0, \delta]$.

Desta forma, se $t_1 = 0$ então para $\delta > 0$ existiria $t_\delta \in [0, \delta]$ tal que $u_m(t_\delta) \notin \mathcal{W}$ que é uma absurdo!

Em verdade: $t_1 = \sup\{t \in [0, t_1], u_m(t) \in \mathcal{W}\}$.

Com efeito, o conjunto $\{t \in [0, t_1], \forall t \in [0, t_1]\}$ é não vazio pois o zero pertence a tal conjunto. além disso tal conjunto é claramente limitado superiormente por t_1 . Seja então $\varepsilon > 0$ dado. Afirmamos que $\exists t_\varepsilon$

$\in [0, t_1]$ tal que $u_m(t_\varepsilon) \in \mathcal{W}$ e $t_1 - \varepsilon < t_\varepsilon \leq t_1$. Suponhamos o contrário, isto é, que $\forall t \in [0, t_1]$ ou $u_m(t) \notin \mathcal{W}$ ou se $u_m(t) \in \mathcal{W}$ então $t \leq t_1 - \varepsilon$. A 1ª condição não pode ocorrer pois $t_1 = \inf \{t \in [0, t_m], u_m(t) \notin \mathcal{W}\}$. Agora, $\forall t \in [0, t_1]$ tal que $u_m(t) \in \mathcal{W}$ admitamos que $t \leq t_1 - \varepsilon$. Assim, $\forall t \in (t_1 - \varepsilon, t_1]$ segue que $u_m(t) \notin \mathcal{W}$ e conseqüentemente teríamos elementos do conjunto $\{t \in [0, t_m], u_m(t) \notin \mathcal{W}\}$ menores do que o ínfimo t_1 o que é um absurdo!

Portanto existem seqüências $(r_n) \cup A = \{t \in [0, t_1], u_m(t) \in \mathcal{W}\}$ e $(s_n) \subset B = \{t \in [0, t_m], u_m(t) \notin \mathcal{W}\}$ tais que $r_n \rightarrow t_1$ e $s_n \rightarrow t_1$. Pela continuidade de $u_m(t)$ segue-se:

$$u_m(r_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_m(t_1) \text{ e } u_m(s_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_m(t_1)$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que:

$$u_m(r_n) \in B_\varepsilon(u_m(t_1)) \text{ e } u_m(s_n) \in B_\varepsilon(u_m(t_1)), \forall n \geq n_0 \quad (53)$$

Entretanto, como $(r_n) \subset A$ e $(s_n) \subset B$ temos que:

$$u_m(r_n) \in \mathcal{W} \text{ e } u_m(s_n) \notin \mathcal{W}, \forall n \geq n_0 \quad (54)$$

Logo, de (53) e (54) vem que:

$$B_\varepsilon(u_m(t_1)) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset \text{ e } B_\varepsilon(u_m(t_1)) \cap \mathcal{C}\mathcal{W} \neq \emptyset$$

o que prova que:

$$u_m(t_1) \in \partial \mathcal{W} \quad (55)$$

Por outro lado, face a continuidade do funcional J dado em (1) e como $u_m(r_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_m(t_1)$ segue-se que $J(u_m(r_n)) \rightarrow J(u_m(t_1))$ e como $u_m(r_n) \in \mathcal{W}$ temos que:

$$0 \leq J(u_m(r_n)) < d$$

Conseqüentemente na passagem ao limite quando $n \rightarrow +\infty$, temos:

$$0 \leq J(u_m(t_1)) \leq d \quad (56)$$

Provaremos que $0 \leq J(u_m(t_1)) < d$.

Suponhamos então que:

$$J(u_m(t_1)) = d \quad (57)$$

De (41) e (51) temos:

$$J(u_m(t_1)) \leq \frac{1}{2} |u_m|^2 + J(u_{0m}) < d$$

o que contradiz (57). Portanto:

$$0 \leq J(u_m(t_1)) < d \quad (58)$$

e conseqüentemente $u_m(t_1) \in \mathcal{W}$ o que contradiz (55) e prova (52).

Conclui-se de (52) e do Corolário 2 que $\|u_m(t_1)\| \leq c$, $\forall m$ e $\forall t \in [0, t_m]$, ou seja:

$$u_m \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (59)$$

Além disso, de (29) e (59) e $\forall t \in [0, t_m]$ e $\forall m$ temos:

$$\begin{aligned} |J(u_m(t))| &\leq \frac{1}{2} \|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{3} \int_{\Omega} |u_m^3(t)| dx = \\ &= \frac{1}{2} \|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{3} \|u_m(t)\|_{L^3(\Omega)}^3 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{3} K_0^3 \|u_m(t)\|^3 \leq K \quad (\text{onde } K \text{ é uma constante}) \end{aligned}$$

De (51) finalmente obtemos, $\forall t \in [0, t_m]$ e $\forall m$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u_m'(t)|^2 &= \frac{1}{2} |u_{0m}|^2 + J(u_{0m}) - J(u_m(t)) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |u_{0m}|^2 + J(u_{0m}) + |J(u_m(t))| < \\ &< d + K \end{aligned}$$

Desta forma:

$$|u_m'(t)| \leq c, \forall m, \text{ e } \forall t \in [0, t_m] \text{ o que prova que:}$$

$$(u_m') \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L_0^2(\Omega)) \quad (60)$$

A passagem ao limite prova-se de maneira standard, utilizando-se o Método de Compacidade de Aubin-Lions (cf. J.L. Lions [08]). Mostram-se também, de maneira usual, as condições iniciais.

O problema da unicidade é resolvido para dimensão $n \leq 4$ utilizando-se o método desenvolvido por M. I. Visik e O. A. Ladyzenskaya em [19].

UM RESULTADO DE REGULARIDADE

A seguir, demonstraremos um teorema de regularidade para o problema (5), (6) e (7).

TEOREMA 2: Seja Ω um aberto limitado com fronteira Γ bem regular do $\mathbb{R}_n$ ($n \leq 4$), d e $\mathcal{W}$ definimos como em (3) e (4). Assumamos que os dados iniciais satisfaçam (11). Então existe uma única função $u: Q \rightarrow \mathbb{R}$ na classe:

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \quad (61)$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (62)$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (63)$$

que é solução fraca de (5), (6) e (7), ou seja:

$$(u''(t), v) + a(u(t), v) + ((u^2)t, v) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ em } \mathcal{D}'[0, T[\quad (64)$$

$$u(0) = u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad (65)$$

$$u'(0) = u_1 \text{ em } H_0^1(\Omega) \quad (66)$$

Demonstração:

Analogamente ao que foi feito no Teorema 1 consideraremos uma base (ω_n) de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ de modo que existam seqüências u_{0m}, u_{1m} tais que:

$$u_{0m} \in \mathcal{W} \cap H^2(\Omega), \quad u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad (67)$$

$$u_{1m} \in H_0^1(\Omega), \quad u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ em } H_0^1(\Omega) \quad (68)$$

$$u_{0m}, u_{1m} \in V_m = [\omega_0, \dots, \omega_m] \quad (69)$$

$$\frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + J(u_{0m}) < d \text{ (para } m \text{ suficientemente grande)} \quad (70)$$

Seja $u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \omega_j$ com os g_{jm} a determinar satisfazendo ao sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares:

$$u_m \in V_m = [\omega_0, \dots, \omega_m] \quad (71)$$

$$(u_m''(t), \omega_j) + a(u_m(t), \omega_j) + \int_{\Omega} u_m^2(t) \omega_j dx = 0, \quad 1 \leq j \leq m \quad (72)$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_{0m} = \sum_j \alpha_{jm} \omega_j \rightarrow u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad (73)$$

$$u_{0m} \in \mathcal{W} \cap H^2(\Omega)$$

$$u'_m(0) = u_{lm}, u_{lm} = \sum_j \beta_{jm} \omega_j \rightarrow u_l \text{ em } H_0^1(\Omega), u_{lm} \in H_0^1(\Omega) \quad (74)$$

Conforme 1ª estimativa a priori do Teorema 1, temos (cf. (59) e (60)) que:

$$(u_m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (75)$$

$$(u'_m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (76)$$

Estabeleceremos, agora, uma estimativa à priori suplementar que determinará a existência de uma solução com:

$$u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ e } u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

Com efeito, derivando-se (72) com respeito à variável t , multiplicando-se por $g''_{jm}(t)$ e somando-se em $j = 1, \dots, m$, temos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|u''_m(t)\|^2 + \|u'_m(t)\|^2 \} + 2 \int_{\Omega} u_m(t) u'_m(t) u''_m(t) dx = 0 \quad (77)$$

Contudo, face a desigualdade de Schwarz e como $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} u_m(t) u'_m(t) u''_m(t) dx \right| \leq \\ & \leq \|u_m(t)\|_{L^4(\Omega)} \|u'_m(t)\|_{L^4(\Omega)} |u''_m(t)| \leq \\ & \leq k_0 \|u_m(t)\| \|u'_m(t)\| |u''_m(t)| \end{aligned} \quad (78)$$

onde k_0 é uma constante positiva.

Assim, de (77) e (78), chegamos a:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|u''_m(t)\|^2 + \|u'_m(t)\|^2 \} \leq 2k_0 \|u_m(t)\| \|u'_m(t)\| |u''_m(t)| \quad (79)$$

Entretanto, de (75) temos que $\|u_m(t)\| \leq c_1$, $\forall t \in [0, t_m]$ e $\forall m \in \mathbb{N}$. Logo, de (79) vem que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|u''_m(t)\|^2 + \|u'_m(t)\|^2 \} \leq 2k_1 \|u'_m(t)\| |u''_m(t)| \leq \\ & \leq k_1 \{ \|u''_m(t)\|^2 + \|u'_m(t)\|^2 \}, \quad \forall t \in [0, t_m] \text{ e } \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Integrando-se a desigualdade acima de 0 a t , ($t \leq t_m$):

$$\frac{1}{2}|u_m''(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_m'(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}|u_m'(0)|^2 + \frac{1}{2}\|u_{lm}\|^2 + k_1 \int_0^t \{ \|u_m'(s)\|^2 + |u_m''(s)|^2 \} ds \quad (80)$$

Por outro lado, de (72) em particular para $t = 0$, temos:

$$|u_m''(0)|^2 - (\Delta u_{0m}, u_m''(0)) + \int_{\Omega} u_{0m}^2 u_m''(0) dx = 0$$

Donde:

$$|u_m''(0)|^2 \leq |\Delta u_{0m}| |u_m''(0)| + |u_{0m}^2| |u_m''(0)|$$

e consequentemente:

$$|u_m''(0)|^2 \leq |\Delta u_{0m}| + |u_{0m}^2| \quad (81)$$

Agora, de (73) e do fato que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ segue-se de (81) que:

$$|u_m''(0)|^2 \leq k_2, \forall m \quad (82)$$

De (72) obtemos também:

$$\|u_{lm}\|^2 \leq k_3, \forall m \quad (83)$$

Desta forma, de (82) de (83) retornando-se a (80) podemos escrever:

$$\frac{1}{2}|u_m''(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_m'(t)\|^2 \leq k_4 + k_1 \int_0^t \{ |u_m''(s)|^2 + \|u_m'(s)\|^2 \} ds \quad (84)$$

Face a desigualdade de Gronwall de (84) obtemos:

$$|u_m''(t)|^2 + \|u_m'(t)\|^2 \leq C, \forall m, \forall t \in [0, tm]$$

Assim:

$$(u_m') \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (85)$$

$$(u_m'') \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (86)$$

Analogamente ao Teorema 1, a passagem ao limite assim como as condições iniciais prova-se de maneira standard (cf. J.L.Lions[08]). Resta-nos provar que:

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)) \quad (87)$$

Com efeito, de (64) deduzimos que:

$$\Delta u = u'' + u^2 \quad (88)$$

Contudo, de acordo com o Teorema de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ para $n \leq 4$. Desta forma, $u^2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e de (63) e (88) deduzimos:

$$\Delta u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (88)$$

e o resultado em (87) segue de acordo com os resultados de regularidade das soluções de equações lineares elípticas (cf. [01]).

A unicidade é provada de maneira usual (cf. J.L. Lions [08]).

A REGULARIDADE ESCONDIDA NO CASO LINEAR

No que segue provaremos o seguinte resultado:

TEOREMA 3. A solução Φ do problema (13), (14), e (15) juntamente com (16) satisfaz as condições:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi} \in L^2(\Sigma) \text{ e } \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \left[E_0 + \|f\|_{L^2(Q)}^2 \right]$$

onde C é uma constante positiva e E_0 é a energia inicial do problema em questão.

Demonstração:

1º Passo: Aproximação dos Dados Iniciais por Funções Regulares

Primeiramente, aproximaremos Φ_0 , Φ_1 e f por funções regulares e resolveremos o problema regular. Com efeito, sejam $(\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ e $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ respectivamente, autofunções e autovalores do operador Δ definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u, v)\}$ onde:

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \quad (89)$$

é a fórmula de Dirichlet. Sabemos, pelo Teorema Espectral (conforme

[13] que $\left[\frac{\omega_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}} \right]$ é completo em $H_0^1(\Omega)$ e (ω_ν) é completo em $L^2(\Omega)$.

Segue-se daí que:

$$\Phi_{k,0} = \sum_{\nu=1}^k (\Phi_0, \frac{\omega_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}}) \frac{\omega_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \Phi_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \quad (90)$$

com $\Phi_{k,0} \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

$$\Phi_{k,1} = \sum_{v=1}^k (\Phi_v, \omega_v) \omega_v \rightarrow \text{em } L^2(\Omega), \text{ com } \Phi_{k,1} \in H_0^1(\Omega) \quad (91)$$

onde $((, .))$ e $(, .)$ são, respectivamente, os internos em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ como $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ existe $(f_k) \subset C^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ tal que:

$$f_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (92)$$

Temos, para cada $k \in \mathbb{N}$, o problema aproximado:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial t^2} - \Delta \Phi_k = f_k \\ \Phi_k = 0 \text{ em } \Sigma \\ \Phi_k(x, 0) = \Phi_{k,0}(x), \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}(x, 0) = \Phi_{k,1}(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (93)$$

Com $\Phi_{k,0} \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $f_k \in C^1(0, T; H_0^1(\Omega))$, a única solução de (93) satisfaz:

$$\begin{aligned} \Phi_k &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial t^2} &\in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \quad (94)$$

conforme pode ser constatado em J.L. Lions [10].

Considerando-se o produto escalar de ambos os lados da 1ª equação em (93), com $\Phi'_k(t)$, obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|\Phi'_k(t)\|^2 + \|\Phi'_k(t)\|^2 \} = (f_k(t), \Phi'_k(t))$$

o que implica:

$$E_k(t) \leq E_k(0) + \|f_k\|_{L^2(Q)}^2 \quad (95)$$

onde $E_k(t)$ é a energia do problema (93) no tempo t .

Das convergências (90), (91) e (92) temos, quando $k \rightarrow +\infty$:

$$E_k(0) + \|f_k\|_{L^2(Q)}^2 \rightarrow E(0) + \|f\|^2 \quad (96)$$

Como consequência de (96) e da desigualdade de Gronwall, segue-se que dado $\varepsilon > 0$,

$$E_k(t) \leq C(E(0) + \|f\|_{L^2(Q)}^2 + \varepsilon), \forall t \in [0, T], k \geq k_0 \quad (97)$$

onde a constante $C > 0$ é independente de k, t e ε .

A estimativa em (97) permite-nos afirmar que

$$(\Phi_k) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$$

$$(\Phi_k') \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

e conseqüentemente temos a existência de subsequências que ainda representamos por $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \Phi \text{ fraco-}^* \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \text{ fraco-}^* \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \end{array} \right. \quad (99)$$

onde Φ satisfaz (17) e é única solução de (93).

2º Passo: Estimativas da Derivada Normal

Consideremos as funções h_i em Ω tais que $h_i \in C^1(\overline{\Omega})$ e que $h_i = v_i$ em Γ , $i = 1, 2, \dots, n$, cuja existência é garantida conforme J.L. Lions [04]. Nesta seção, usaremos a convenção de soma usual, i.é., termos

como $h_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}$ significam somas em i de 1 a n .

Lema 5.1: Seja $\omega \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Então:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = v_i \frac{\partial \omega}{\partial \nu}, \quad v = (v_1, \dots, v_n)$$

Demonstração:

Seja $\zeta \in \mathcal{D}(\Gamma)$ e considerarmos $\bar{\zeta} \in H^m(\Omega)$, $m > \max(2/2, 2)$, de modo que o traço $\gamma_o \bar{\zeta}$ sobre Γ seja ζ . A existência de $\bar{\zeta}$ é garantida posto que $\mathcal{D}(\Gamma) \subset H^{m-1/2}(\Gamma)$. Temos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega h_j \bar{\zeta}) dx = \int_{\Gamma} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega h_j \bar{\zeta}) d\Gamma = \int_{\Gamma} v_i \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \zeta d\Gamma$$

para todo $\zeta \in \mathcal{D}(\Gamma)$. Obtemos também que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega h_j \bar{\zeta}) dx = \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega h_j \bar{\zeta}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \nu_j \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \bar{\zeta} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \bar{\zeta} d\Gamma$$

e portanto segue-se que

$$\int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial \omega}{\partial \nu} \bar{\zeta} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \bar{\zeta} d\Gamma \text{ para todo } \zeta \in \mathcal{D}(\Gamma). \quad \square$$

Seja Φ_k na classe (94) solução de (93). Multipliquemos ambos os lados da 1ª equação de (93) por $h_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}$ e integremos em Q para obter:

$$\int_Q \Phi_k'' h_j \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} dx dt - \int_Q \Delta \Phi_k h_j \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} dx dt = \int_Q f_k'' h_j \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} dx dt \quad (100)$$

obtemos:

$$\int_Q \Phi_k'' h_j \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} dx dt = N - \int_0^T \int_{\Omega} h_i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\Phi_k')^2 dx dt$$

onde
$$N = \int_{\Omega} \left[h_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \Phi_k' \right]_{t=0}^{t=T} dx$$

$$\int_{\Omega} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\Phi_k')^2 dx dt = \int_{\Sigma} h_i (\Phi_k')^2 \nu_i d\Sigma - \int_Q (\Phi_k')^2 \frac{\partial h_i}{\partial x_i} dx dt$$

Consequentemente, pelo fato de $\Phi_k'(t) \in H_0^1(\Omega)$ em $]0, T[$, temos:

$$\int_{\Omega} \Phi_k'' h_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} dx dt = N + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Phi_k')^2 h_i \frac{\partial h_i}{\partial x_i} dx dt \quad (101)$$

Aplicando-se a fórmula de Green à 2ª expressão à esquerda da igualdade em (110) e face ao Lema 5.1 obtemos:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \Delta \Phi_k h_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} dx dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[h_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right] dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu} \right]^2 d\Sigma \end{aligned} \quad (102)$$

Contudo:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[h_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right] dx dt = \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \right]^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} h_i \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \right]^2 \nu_i d\Sigma - \frac{1}{2} \int_Q \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \right]^2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} dx dt \end{aligned}$$

Aplicando-se o Lema 5.1 à primeira integral no segundo membro da igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} - \int_Q \Delta \Phi_k h_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} dx dt &= - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu} \right]^2 d\Sigma - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \Phi_k|^2 \frac{\partial h_i}{\partial x_i} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right| dx dt \end{aligned} \quad (103)$$

Substituindo-se (101), (103) em (100) obtemos para todo $t \in [0, T]$ e $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu} \right]^2 d\Sigma &= N + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} (\Phi_k)'(t)^2 - \frac{1}{2} |\nabla \Phi_k|^2 \right] dx dt + \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} f_k h_i \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} dx dt \end{aligned}$$

Usando a desigualdade (97) no 2º membro da última igualdade, obtemos:

$$\int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq C \left\{ E_0 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \varepsilon \right\}$$

onde $C > 0$ não depende de K, E_0, ε .

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu} \rightarrow \chi \text{ fraco em } L^2(0, T; L^2(\Gamma)) \text{ quando } k \rightarrow +\infty \quad (104)$$

e como ε é arbitrário, temos:

$$\|\chi\| \leq C \left\{ E_0 + \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right\} \quad (105)$$

3º Passo: Traço da Derivada Normal

Neste contexto provaremos que se Φ é solução de (13) - (15), que é obtida como um limite de solução Φ_k de (93), como em (99), então:

$$\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$$

Como $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\Phi' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ existem $p, q \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ tais que:

$$\begin{cases} -\Delta p = f & \text{em } \Omega \\ p = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta p = \Phi' & \text{em } \Omega \\ q = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases} \quad (106)$$

conforme pode ser constatado em [10].

Provaremos, a seguir:

Lema 5.2:

$$\Phi = p - q \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) + H^{-1}(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Demonstração:

No que segue, trabalharemos com a extensão do operador $-\Delta$ ao $L^2(\Omega)$, ou seja:

$$(-\Delta)^*: L^2(\Omega) \rightarrow [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)]'$$

definido por:

$$\langle (-\Delta)^* u, v \rangle = (u, (-\Delta)v), \quad \forall u \in L^2(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

bem entendido que estamos identificando $L^2(\Omega)$ com seu dual. Por abuso de notação ainda escreveremos $(-\Delta)$ ao invés de $(-\Delta)^*$.

Como $\Phi' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ então $\Phi'' \in H^{-1}(0, T; L^2(\Omega))$. conseqüentemente a solução Φ de (13) - (15) satisfaz:

$$-\Delta \Phi = f - \Phi'' \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) + H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)) \quad (107)$$

Logo, de (106) e (107) chegamos a:

$$-\Delta\Phi = f - \Phi'' = (-\Delta p) - (-\Delta q)' \text{ em } L^2(0, T; L_0^2(\Omega)) + H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)) \quad (108)$$

Consideremos, agora, $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$. Então, de (108) obtemos:

$$\langle -\Delta\Phi, \theta \rangle = \langle -\Delta p, \theta \rangle + \langle -\Delta q, \theta' \rangle$$

ou ainda:

$$\int_0^T (-\Delta\Phi)\theta dt = \int_0^T (-\Delta p)\theta dt + \int_0^T (-\Delta q)\theta' dt$$

Logo:

$$(-\Delta) \left[\int_0^T \Phi \theta dt \right] = (-\Delta) \left[\int_0^T p \theta dt \right] + (-\Delta) \left[\int_0^T q \theta' dt \right]$$

e portanto:

$$(-\Delta) \left[\int_0^T \Phi \theta dt - \int_0^T q \theta' dt \right] = (-\Delta) \left[\int_0^T p \theta dt \right] \quad (109)$$

Da unicidade de soluções do problema:

$$\Delta U = 0 \text{ em } \Omega$$

$$U = 0 \text{ em } \Gamma$$

a igualdade em (109) implica:

$$\int_0^T \Phi \theta dt - \int_0^T q \theta' dt = \int_0^T p \theta dt$$

ou ainda:

$$\langle \Phi, \theta \rangle = \langle p - q, \theta \rangle, \quad \forall \theta \in D(0, T)$$

o que implica que:

$$\begin{aligned} \Phi &= p - q' \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) + \\ &+ H^{-1}(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \subset H^{-1}(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \quad \square \end{aligned} \quad (110)$$

No que se, usaremos a aplicação traço:

$$\gamma_1: H^{-1}(0, T; H^2(\Omega)) \rightarrow H^{-1}(0, T; H^{1/2}(\Gamma))$$

Convém notar que de (110) obtemos:

$$\overline{\gamma_1} \Phi \in H^{-1}(0, T; H^{1/2}(\Gamma)). \quad (111)$$

Seja Φ_k a solução aproximada introduzida em (93). Então:

$$-\Delta\Phi_k = f_k - \Phi_k''$$

e de acordo com o Lema 5.2, obtemos:

$$\Phi_k = p_k - q_k' \text{ onde } -\Delta p_k = f_k \text{ e } -\Delta q_k = \Phi_k'$$

e de acordo com o Lema 5.2, obtemos:

$$\Phi_k = p_k - q_k' \quad \text{onde} \quad -\Delta p_k = f_k \quad \text{e} \quad -\Delta q_k = \Phi_k'$$

Temos também que:

$$\bar{\gamma}_1 \Phi_k \in H^{-1}(0, T; H^{1/2}(\Gamma))$$

por razões análogas ao exposto anteriormente. Disso, provamos que:

$$\bar{\gamma}_1 \Phi_k \rightarrow \bar{\gamma}_1 \Phi \quad \text{em} \quad H^{-1}(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) \quad (112)$$

De (104) e (112) segue-se que $\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRÉZIS, H. *Análisis funcional: teoria y aplicaciones*. Madrid: Alianza Editorial, 1984.
- CARRILLO DIAZ, L.E. *Existência e não existência de soluções globais fracas de uma equação hiperbólica não linear*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1988. Tese (Mestrado em equações diferenciais parciais) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1988.
- HILLE, E. & PHILLIPS, R.S. *Functional analysis and semigroups*. Rio de Janeiro: American Mathematical Society, 1957.
- LIONS, J.L. *Controlabilite exate des systemes distribues*. Paris: College de France, Departement de Mathematiques, 1988.
- LIONS, J.L. *Equations aux derivees partielles et calcul des variation: application à la théorie du controle* Paris: Faculte de Sciences, 1967.
- LIONS, J.L. Hidden regularity in some nonlinear hiperbolic equations. *Revista de Matemática Aplicada Computacional*, 6(1): 7-16, 1987.
- LIONS, J.L. *Problèmes aux limites dans les equations aux derivées partielles*. Montreal: Le Prèsses de Université de Montreal, 1965.
- LIONS, J.L. *Quelques méthodes de resolution de problèmes aux limites non linéaires*. Paris: Dunod, 1969.
- LIONS, J.L. Ultra weak solutions of non linear partial Differential equations. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 52(1):08-10, 1980.
- LIONS, J.L. & MAGENES, E. *Non-homogeneous boundary value problems and applications* Berlin :Springer-Verlag; New York: Heidelberg, 1972.

- MEDEIROS, L.A. & MILLA MIRANDA, M. *Iniciação aos espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1989. (Textos de métodos matemáticos, 16, IM-UFRJ).
- MEDEIROS, L.A. & RIVERA, P.H. *Iniciação aos espaços de Sobolev*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1977. (Textos de métodos matemáticos, 9, IM-UFRJ).
- MILLA MIRANDA, M. *Análise Espectral em espaços de Hilbert*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1989.
- MILLA MIRANDA, M. Traço para o dual dos espaços de Sobolev. IN: SEMINÁRIO BRASILEIRO DE ANÁLISE, 28, 1988. Rio de Janeiro. Atas... Rio de Janeiro: 1988. p. 171-191.
- MILLA MIRANDA, M. & MEDEIROS, L.A. Hidden regularity for semilinear hyperbolic partial differential equations *Annales Faculté de Sciences de Toulouse*. 9(1), 1988.
- RAVIART, R.A. & THOMAS, J.M. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées aux dérivées partielles*. Paris: Masson, 1983.
- SATTINGER, D.H. *The energy method in nonlinear partial differential equations*. Rio de Janeiro: IMPA, 1969.
- TEMAN, R. *Navier-Stokes equations, theory e numerical analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1979.
- VISIK, M.I. & LADYZENSKAYA, O.A. *On Boundary value problems for PDE and certain class of operators equations*. A.M.S., 1958. (A. M. S. Translations. Série 2, 10, 1958).

SOBRE RETICULADOS DE BANACH MULTIPLICATIVOS DE FUNÇÕES

Paulo Arêas Burlandy*

RESUMO. Neste artigo, apresentamos exemplos de reticulados de Banach multiplicativos de funções e uma generalização do teorema dos operadores lineares positivos, a fim de caracterizar a classe de todos os reticulados de Banach multiplicativos uniformemente fechados de funções.

Palavras-chave: Banach, Funções, Multiplicativos, Reticulados.

ABSTRACT. ON MULTIPLICATIVE BANACH FUNCTION LATTICES. In this paper we present examples of multiplicative Banach function lattices and a generalization of the positive linear operators theorem in order to characterize the class of all uniformly closed multiplicative Banach function lattices.

Key words: Banach, Function, Multiplicative, Lattices.

INTRODUÇÃO

No seu célebre artigo "Applications of the theory of Boolean rings to general topology", publicado em 1937, M. H. Stone estabeleceu o que hoje denominamos teorema de Stone-Weierstrass. Desde então, vários matemáticos têm se inspirado no trabalho de Stone para desenvolver pesquisas.

Em 1986, no artigo "The Stone-Weierstrass theorem and a class of Banach lattice algebras", G. Zapata apresentou uma brilhante generalização do teorema de Stone-Weierstrass, introduzindo um novo contexto para o trato de questões relativas à teoria da aproximação, a saber, a classe dos reticulados de Banach multiplicativos de funções. Na verdade, esta denominação só foi usada no seu artigo "On dense subalgebras of Banach algebras" de 1987. Neste artigo, Zapata citou que

* Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 3690, Campus Universitário, 87020-900 - Maringá, Paraná, Brasil.

a propriedade $f \in F_+ \Rightarrow f^{\frac{1}{2}} \in F$ caracteriza a classe dos reticulados de Banach multiplicativos uniformemente fechados de funções.

Na tentativa de provar tal caracterização, estabelecemos uma generalização do teorema dos operadores lineares positivos, cuja relação com a teoria dos reticulados de Banach ainda não foi suficientemente investigada. Nosso objetivo é mostrar que a classe dos reticulados de Banach multiplicativos de funções é rica de exemplos e, também, apresentar a generalização mencionada acima e uma de suas aplicações, a saber, a caracterização citada por Zapata.

NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA

Nestas notas, X denotará um conjunto não vazio. Também, a fim de simplificar notações, haverá referências a X do tipo "o espaço topológico X ".

Seja F um espaço vetorial de funções reais definidas em X . Dizemos F é reticulado vetorial se $f \in F$ implica $|f| \in F$; e se $f^2 \in F$ para todo $f \in F$, dizemos que F é multiplicativo. Seja $\|\cdot\|$ uma semiforma sobre F . Dizemos que $\|\cdot\|$ é crescente se $f, g \in F, |f| \leq |g|$ implicam que $\|f\| \leq \|g\|$; e completa sobre F se o espaço $(F, \|\cdot\|)$ é completo. Um reticulado vetorial F é dito um reticulado de Banach se existe uma norma crescente e completa sobre F . Sejam F e G reticulados vetoriais, um operador $T: F \rightarrow G$ é positivo se $T(F_+) \subset G_+$ onde, para um reticulado vetorial H ,

$$H_+ = \{f \in H; f \geq 0\}.$$

Seja F um conjunto de funções reais definidas em X . Um subconjunto G de F é sólido em F se $f \in F, g \in G, |f| \leq |g|$ implicam $f \in G$.

Denotaremos por $B(X)$ o reticulado de Banach de todas as funções reais limitadas definidas em X e $\|\cdot\|_\infty$ é a norma do supremo sobre $B(X)$. Dizemos que $F \subset B(X)$ é uniformemente fechado para indicar que F é fechado no reticulado de Banach $B(X)$.

No que segue, consideraremos apenas espaços de funções.

EXEMPLOS

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de espaços na classe $MBL(X)$ de todos os reticulados de Banach multiplicativos de funções reais definidas no conjunto X .

Exemplo 1. Seja $A(X)$ a classe de todas as subálgebras fechadas de $B(X)$. Pelo teorema de aproximação de Weierstrass (cf. Rudin, 1964), todo $F \in A(X)$ é um reticulado vetorial. Portanto, a classe $A(X)$ é constituída de todos os reticulados de Banach multiplicativos uniformemente fechados. Em particular, $B(X) \in MBL(X)$ e os espaços de seqüências reais $l^\infty, c, c_0 \in MBL(IN)$. Também, se X é um espaço topológico, o espaço $C_b(X)$ das funções reais contínuas e limitadas em X e, supondo X localmente compacto, o espaço $C_0(X)$ das funções reais contínuas que se anulam no infinito são elementos de $MBL(X)$.

Note que $A(X) \neq MBL(X)$ se X é infinito. De fato, sendo X infinito, o espaço $l^1(X)$ das funções reais integráveis com relação à "counting measure" (cf. Rudin, 1966) é um reticulado de Banach multiplicativo mas não é uniformemente fechado. Por outro lado, é claro que $A(X) = MBL(X)$ se X é finito. Portanto, $A(X) = MBL(X)$ se, e somente se, X é finito.

Exemplo 2. Seja M uma σ -álgebra em X e seja $M_b(X) := M(X) \cap B(X)$, onde $M(X)$ denota o espaço das funções reais M -mensuráveis. Se F é um subconjunto não-vazio sólido em $M_b(X)$ e fechado para a adição, então F é um reticulado vetorial multiplicativo. Portanto, todo reticulado de Banach sólido em $M_b(X)$ está na classe $MBL(X)$. Como casos particulares, temos:

(a) Seja $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ M -mensurável, $w \geq 1$. Então,

$$M(w) := \{f \in M(X); wf \text{ limitada}\}$$

é um reticulado vetorial sólido em $M_b(X)$ e a norma crescente

$$\|f\| := \|wf\|_b, \quad f \in M(w),$$

é completa sobre $M(w)$. Portanto, $M(w) \in MBL(X)$.

(b) Seja μ uma medida positiva em M e seja $B(\mu) := L(\mu) \cap B(X)$, onde $L(\mu)$ é o espaço das funções reais μ -integráveis. Note que $B(\mu)$ é um reticulado vetorial sólido em $M_b(X)$ e a norma crescente

$$\|f\| := \max\{\|f\|_b, \|f\|_1\}, \quad f \in B(\mu),$$

é completa sobre $B(\mu)$, onde $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Então, $B(\mu) \in MBL(X)$.

Nos exemplos seguintes, consideraremos X um espaço de Hausdorff localmente compacto.

Exemplo 3. Seja μ uma medida de Radon positiva em X . O reticulado vetorial $F = C_b(X) \cap L(\mu)$ é multiplicativo e, além disso, a norma

$$\|f\| := \max\{\|f\|_0, \|f\|_1\}, f \in F,$$

é crescente e completa sobre F . Também, $G = C_0(X) \cap L(\mu)$ é um subespaço fechado de F . Logo, $F, G \in MBL(X)$.

Exemplo 4. Seja $w: X \rightarrow \mathbb{R}$ semicontínua superiormente, $w \geq 1$. O espaço

$$C_{wb}(X) := \{f \in C(X); wf \text{ é limitada}\},$$

onde $C(X)$ denota o espaço das funções reais contínuas em X , é um reticulado vetorial multiplicativo e a norma crescente

$$\|f\| := \|wf\|_0, f \in C_{wb}(X),$$

é completa sobre $C_{wb}(X)$. Também,

$$C_{w0}(X) := \{f \in C(X); wf \text{ se anula no infinito}\}$$

é um subespaço fechado de $C_{wb}(X)$. Portanto, $C_{wb}(X), C_{w0}(X) \in MBL(X)$.

Observação. Todos os exemplos anteriores são de espaços e funções limitadas. Isto não é acidental. Na verdade, se F é um reticulado de Banach multiplicativo, então $F \subset B(X)$. Para a demonstração deste fato, veja Zapata, 1987.

UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DOS OPERADORES LINEARES POSITIVOS

O teorema dos operadores lineares positivos é fundamental na teoria dos reticulados de Banach. O resultado seguinte é uma generalização deste teorema. Suas aplicações ainda não foram tratadas especificamente mas, de imediato, a utilizaremos para estabelecer uma caracterização da classe de todos os reticulados de Banach multiplicativos uniformemente fechados.

Teorema 1. Seja F um reticulado de Banach e $\varphi: F \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(a) f, g \in F, |f| \leq |g| \Rightarrow \varphi(f) \leq \varphi(g);$$

$$(b) \varphi(\alpha f) = |\alpha| \varphi(f), \forall \alpha \in \mathbb{Q}, \forall f \in F.$$

Se $\|\cdot\|$ é uma norma crescente e completa sobre F , então existe $C > 0$ tal que

$$\varphi(f) \leq C\|f\|, \forall f \in F.$$

Demonstração. Supondo a conclusão falsa, temos que

$$\sup\{\varphi(f); f \in F, \|f\| \leq 1\} = \infty.$$

Então, existe uma sequência (f_n) em F_+ tal que

$$\|f_n\| \leq 1 \text{ e } \varphi(f_n) \geq 4^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como F é um espaço de Banach e $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{f_n}{2^n} \right\| < \infty$, então $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$ convergê em F , digamos por $f \in F$. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e seja

$$g_m := \sum_{i=0}^m \frac{f_i}{2^i} - \frac{f_n}{2^n}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Então

$$g := \lim g_m = f - \frac{f_n}{2^n}$$

e

$$\|g_m - g\| \leq \|g_m - g\|, \quad \forall m \geq n.$$

Logo, $\|g\| \geq 0$, ou seja, $\frac{f_n}{2^n} \leq f$. Portanto,

$$\frac{\varphi(f_n)}{2^n} \leq \varphi(f), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde

$$2^n \leq \varphi(f), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que é uma contradição. $\square$

Corolário 1 (Teorema dos operadores lineares positivos). Sejam F um reticulado vetorial e $(G, \|\cdot\|)$ um reticulado seminormado. Suponha que exista uma norma crescente e completa $\|\cdot\|$ sobre F e seja $T: F \rightarrow G$ um operador aditivo e positivo. Então, existe $C > 0$ tal que

$$\|T(f)\| \leq C\|f\|, \quad \forall f \in F.$$

Demonstração. Seja

$$\varphi(f) := \|T(|f|)\|, \quad f \in F.$$

Note que φ satisfaz as condições (a) e (b) do teorema 1. Então, existe $C > 0$ tal que

$$\varphi(f) \leq C\|f\|, \quad \forall f \in F,$$

donde

$$\|T(f)\| \leq C\|f\|, \quad \forall f \in F. \quad \square$$

Corolário 2.

- (a) Um reticulado vetorial admite, no máximo, uma norma crescente e completa no seguinte sentido: duas dessas normas são equivalentes.
- (b) Todo operador aditivo e positivo de um reticulado de Banach em um reticulado normado é contínuo e homogêneo.

Demonstração.

- (a) Basta considerar o operador identidade e aplicar o corolário 1.
- (b) A continuidade segue trivialmente do corolário 1. Para estabelecer a homogeneidade, basta notar que todo operador aditivo é racionalmente homogêneo e, em seguida, usar a continuidade. $\square$

UMA CARACTERIZAÇÃO DOS RETICULADOS DE BANACH MULTIPLICATIVOS UNIFORMEMENTE FECHADOS

Em geral, identificar caso a caso os reticulados de Banach multiplicativos uniformemente fechados não é tarefa imediata. Considerando o conjunto X infinito, vejamos dois casos:

- (1) $M(w) \in A(X)$ se, e somente se, a função w é limitada.

De fato, supondo $M(w)$ uniformemente fechado temos que a norma $\|\cdot\|_0$ é crescente e completa sobre $M(w)$. Então, pelo corolário 1, existe $C > 0$ tal que

$$\|wf\|_0 \leq C\|f\|_0, \quad \forall f \in M(w).$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $A_n = (-\infty, n)$ e χ_n a função característica de A_n . Note que

$$A_n \in M \text{ e } 0 \leq w\chi_n \leq n$$

Donde $\chi_n \in M(w)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Em particular,

$$w\chi_n \leq C\|\chi_n\|_0 \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $w\chi_n \rightarrow w$ pontualmente, então $w \leq C$. A recíproca é clara.

- (2) $B(\mu) \in A(X)$ se, e somente se, a medida μ é limitada (isto é, $\sup\{\mu(A), A \in M, \mu(A) < \infty\} < \infty$).

Com efeito, supondo μ ilimitada, existe uma seqüência (A_n) em M tal que

$$n \leq \mu(A_n) < \infty, n \in \mathbb{N}.$$

Seja

$$f_n := \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\mu(A_i)} \chi_i, n \geq 1.$$

Como

$$0 \leq \frac{1}{n\mu(A_n)} \chi_n \leq \frac{1}{n^2}, \forall n \geq 1,$$

então (f_n) é uma seqüência em $B(\mu)$ uniformemente convergente. No entanto, $f \notin B(\mu)$. De fato, se $f \in B(\mu)$ então

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \int f_n d\mu \leq \int f d\mu, \forall n \geq 1,$$

o que não é verdade. A recíproca é clara.

A seguir, mostraremos que a propriedade

$$f \in F_+ \Rightarrow f^{\frac{1}{2}} \in F$$

caracteriza a classe $A(X)$.

Lema 1. $\| |f|^{\frac{1}{2}} \|_0 = \| f \|_0^{\frac{1}{2}}, \forall f \in B(X)$.

Demonstração. Seja $f \in B(X)$. Como $|f| \leq \|f\|_0$ então $|f|^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_0^{\frac{1}{2}}$ e, assim, $\| |f|^{\frac{1}{2}} \|_0 \leq \|f\|_0^{\frac{1}{2}}$. Por outro lado, visto que $|f|^{\frac{1}{2}} \leq \| |f|^{\frac{1}{2}} \|_0$, segue que $|f| \leq \| |f|^{\frac{1}{2}} \|_0$ e, assim, $\|f\|_0^{\frac{1}{2}} \leq \| |f|^{\frac{1}{2}} \|_0$. Portanto, $\| |f|^{\frac{1}{2}} \|_0 = \|f\|_0^{\frac{1}{2}}$.

Teorema 2. Se $F \in MBL(X)$, são equivalentes:

- (a) F é fechado em $B(X)$
- (b) $F \in A(X)$

$$(c) f \in F_+ \Rightarrow f^{\frac{1}{2}} \in F.$$

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Claro.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Seja $f \in F_+$, $f \leq 1$. Pelo teorema de aproximação de Weierstrass, existe uma sequência (p_n) de polinômios tais que $p_n(t) \rightarrow t^{\frac{1}{2}}$ uniformemente em $[0, 1]$ e $p_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, $p_n f \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $p_n f \rightarrow f^{\frac{1}{2}}$ uniformemente. Portanto, $f^{\frac{1}{2}} \in F$.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Seja $\|\cdot\|$ uma norma crescente e completa sobre F e seja

$$\varphi(f) := \| |f|^{\frac{1}{2}} \|^2, f \in F.$$

Note que φ está sob as condições do teorema 1. Então, existe $C > 0$ tal que

$$\| |f|^{\frac{1}{2}} \|^2 \leq C \|f\|, \forall f \in F.$$

Por outro lado,

$$\|f\| \leq \| |f|^{\frac{1}{2}} \|_0 \| |f|^{\frac{1}{2}} \|, \forall f \in F$$

e, portanto,

$$\| |f|^{\frac{1}{2}} \| \leq C \| |f|^{\frac{1}{2}} \|_0, \forall f \in F.$$

Assim sendo, segue que

$$\|f\| \leq C \|f\|_0, \forall f \in F,$$

o que mostra que F é fechado em $B(X)$. $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

NACHBIN, L. *Elements of approximation theory*. Princeton: Van Nostrand, 1967.

- RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis*. New York: McGraw Hill, 1964.
- RUDIN, W. *Real and complex analysis*. New York: McGraw Hill, 1966.
- SCHAEFER, H.H. *Aspects of Banach lattices*. Em: BARTLE, R.G. (ed.). *Studies in functional analysis*. Washington: MAA, p. 158-221, 1980.
- SCHAEFER, H.H. *Banach lattices and positive operators*. Berlin: Springer Verlag, 1974.
- STONE, M. H. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. *Trans - A.M.S.*, 41:375-481, 1937.
- ZAPATA, G. On Daniell lattices. *Atas 24º: SBA.*, 407-411, 1986.
- ZAPATA, G. On dense subalgebras of Banach algebras. *Atas 26º: SBA.*, 21-60, 1987.
- ZAPATA, G. The Stone-Weierstrass theorem and a class of Banach lattice algebras. Em: BARROSO, J.A. (ed.). *Aspects of mathematics and its applications*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, p. 913-942, 1968.

SOBRE UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO NÃO LINEARES EM ESPAÇOS DE BANACH

Doherty Andrade*

RESUMO. Neste trabalho provamos a existência de solução local para classe de equações de evolução

$$P(Fu, x) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t)u(t) \ni (Fu) \\ u(0) = x \in \overline{D(A(s))}, 0 \leq s \leq t \leq T \end{cases}$$

em espaços de Banach. Como exemplo, estudamos a equação da onda não linear na presença de uma força externa.

Palavras-chave: Operadores Acretivos, Solução Integral.

ABSTRACT. ON A CLASS OF NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS IN BANACH SPACES. In this paper we study the existence of local solutions of a class of nonlinear evolution equations

$$P(Fu, x) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t)u(t) \ni (Fu) \\ u(0) = x \in \overline{D(A(s))}, 0 \leq s \leq t \leq T \end{cases}$$

in Banach spaces. We study the nonlinear wave equation in the presence of an external force.

Key words: Accretive Operators, Integral Solution.

INTRODUÇÃO

Estudaremos aqui uma classe de problemas abstratos de Cauchy, associados a uma família $A(t)$, $0 \leq t \leq T$, de operadores m -acretivos sobre

*

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 3690, Campus Universitário, 87020-900 - Maringá, Paraná, Brasil.

um espaço de Banach X . Isto é, vamos estudar a existência de solução local para problemas da forma

$$P(Fu, x) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + A(t)u(t) \ni (Fu) \\ u(0) = x \in \overline{D(A(s))}, 0 \leq s \leq t \leq T \end{cases}$$

onde $F : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ é um operador contínuo e $D(A(s))$ é o domínio do operador $A(s)$.

A existência de soluções de problemas abstratos deste tipo com $Fu \equiv f \in L^1(0, T; X)$ e $A(t)$ satisfazendo hipóteses adicionais tem sido obtida por meio de esquemas discretos. Veja Pavel (1987).

Admitiremos que valem as seguintes condições:

E1- Para $a < s \leq t \leq T < b, \lambda \geq 0$, podendo acontecer $a = -\infty$ ou $b = \infty$, existem $h : (a, b) \rightarrow X$ contínua e $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ limitada sobre subconjuntos limitados satisfazendo

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\| + \|h(t) - h(s)\| L(\|x_2\|)$$

para todo $(x_1, y_1) \in A(t), (x_2, y_2) \in A(s)$.

E2- Se $t_n \downarrow t$ em (s, T) , $x_n \in D(A(t_n))$ e $x_n \rightarrow x$ em X , então $x \in D(A(t))$.

Pode-se provar que na presença da m -acretividade de $A(t)$ mais as hipóteses E1 e E2, os domínios $\overline{D(A(t))}$ independem de t , veja (Pavel, 1987). Logo, supomos em $P(Fu, x)$ que

$$D = \overline{D(A(t))} = \overline{D(A(0))}$$

e $u(0) = x \in D$.

Usaremos a notação

$$(x, y)_+ = \langle y, x \rangle_s = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\|x + hy\|^2 - \|x\|^2}{2h}$$

Observamos que em E1, se $s = t$ e $h \equiv 0$ ou $L \equiv 0$, então obteremos o conceito antigo de acretividade (veja Pavel, 1987 ou Vesely, 1989).

Por uma solução integral, em $[s, T]$, de $P(f, x)$ entendemos uma função u contínua em $[s, T]$, satisfazendo:

$$1i) \|u(\bar{t}) - x\|^2 \leq \|u(t) - x\|^2 + 2 \int_t^{\bar{t}} [\langle f(\bar{s}) - y, u(\bar{s}) - x \rangle_s + c \|u(\bar{s}) - x\| \cdot \|h(\bar{s}) - h(r)\|] d\bar{s},$$

onde

$$c = \max \{L(c_1), L(\|x\|)\}, \quad c_1 = \sup \{\|u(t)\|; s \leq t \leq T\},$$

$$s \leq t \leq \bar{s} \leq \bar{t} \leq T, r \in [s, T] \text{ e } (x, y) \in A(r).$$

$$2i) u(s) = x_0$$

$$3i) u(t) \in D(A(t)), \text{ para quase todo } t \in [s, T].$$

Por uma solução forte de $P(f, x)$ em $[s, T]$, entendemos uma função $u : [s, T] \rightarrow X$ satisfazendo:

li) u é contínua em $[s, T]$ e absolutamente contínua em subconjuntos compactos de (s, T) ;

$$2i) u(t) \in D(A(t)), \text{ para quase todo } T \in (s, T);$$

3i) u é fortemente diferenciável em quase toda parte de (s, T) e satisfaz $P(f, x)$ para quase todo $t \in (s, T)$.

Para $f \in C([0, T]; X)$, $x \in D(A(s))$ e $A(t)$, $0 \leq t \leq T$, satisfazendo E1 e E2 (veja Pavel, 1987), o problema $P(f, x)$ é bem posto, isto é, possui uma única solução integral e, além disso, se u e v são, respectivamente, soluções integrais de $P(f, x_1)$ e $P(g, x_2)$, então, temos

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(r) - v(r)\| + \int_r^t \|f(\tau) - g(\tau)\| d\tau \quad 0 \leq s \leq r \leq t \leq T.$$

Denotamos por B_X o operador de Benilan-Pavel, que a cada $f \in L^1(0, T; X)$ associa a única solução integral de $P(f, x)$ em $[0, T]$. A desigualdade acima mostra que o operador de Benilan-Pavel depende, continuamente, dos dados iniciais.

Por uma solução local em $[0, r]$, $0 \leq r \leq T$, para $P(Fu, x)$, entendemos uma função contínua $u : [0, r] \rightarrow D$, $u(0) = x$ e u sendo, o ponto fixo do operador

$$T_r B_X F E_r : C([0, r]; X) \rightarrow C([0, r]; X),$$

onde $E_r: C([0, \cdot]; X) \rightarrow C([0, r]; X)$ e $T_r: C([0, T]; X) \rightarrow C([0, r]; X)$ são dados, respectivamente, por $(T_r u)(t) = u(t)$ e

$$(E_r u)(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, r] \\ u(r), & t \in [r, T]. \end{cases}$$

Admitimos também que F é um operador causal. Neste caso, toda solução local sobre $[0, s]$ é também solução local sobre $[0, r]$, se $r \leq s$.

Agora estamos prontos para enunciar um resultado de existência.

TEOREMA DE EXISTÊNCIA

Teorema - Sejam X espaço de Banach, $A(t)$, $0 \leq t \leq T$ uma família de operadores m -acretivos satisfazendo $E1$ e $E2$ e F um operador contínuo em $C([0, T]; X)$, que aplica subconjuntos limitados em subconjuntos uniformemente integráveis. Além disso, suponha que vale pelo menos uma das condições:

1i) $B_X F$ é compacto,

2i) existe $\varphi: C([0, T]; X) \rightarrow \mathbf{R}^+$ semicontínua inferior tal que

$$\|v - B_X Fv\|_\infty \leq \varphi(v) - \varphi(B_X Fv),$$

3i) existe $\varphi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ semicontínua superior tal que $\varphi(t) < t$ e

$$\|B_X Fu - B_X Fv\|_\infty \leq \varphi(\|u - v\|_\infty),$$

$u, v \in C([0, T]; X)$.

Então, dado $x \in D$, o problema $P(Fu, x)$ tem, pelo menos, uma solução local num intervalo $(0, \delta]$. Além disso, o conjunto solução é fechado e limitado em $C([0, \delta]; X)$.

Prova: Dados $\varepsilon > 0$ e u_0 a única solução integral de $P(0, x)$, que existe por (Pavel, 1987). Definimos:

$$C_\varepsilon = \{u \in C([0, T]; X), \|u(t) - u_0(t)\| \leq \varepsilon, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = x\}$$

que é não vazio, convexo, limitado e fechado em $C([0, T]; X)$. Para $r \in (0, T]$, escrevemos $C_\varepsilon^r = T_r(C_\varepsilon)$ que também é convexo, limitado e fechado.

Considere $S_\varepsilon = \{u \in C([0, T]; X); \|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \varepsilon\}$.

Então, claramente $E_r(C'_\varepsilon) \subset S_\varepsilon$. Como S_ε é limitado segue que $F(S_\varepsilon)$ é uniformemente integrável e assim para este $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta \in (0, T]$ tal que

$$\int_0^\delta \|f(s)\| ds \leq \varepsilon, \quad \forall f \in F(S_\varepsilon).$$

Tomando $r = \delta$ e $v \in C_\varepsilon^\delta$, temos

$$\|(T_\delta B_x F E_\delta v)(s) - T_\delta u_0(s)\| = \|(B_x F E_\delta v)(s) - u_0(s)\| \leq \int_0^\delta \|F E_\delta v(s)\| ds \leq \varepsilon,$$

pois $(B_x F E_\delta v)$ é solução integral de $P(B_x F E_\delta v, x)$ e $(F E_\delta v) \in C([0, T]; X)$.

Logo,

$$(T_\delta B_x F E_\delta)(C_\varepsilon^\delta) \subset C_\varepsilon^\delta.$$

Segue das condições 1i), 2i) ou 3i) que existe uma solução local sobre $[0, \delta]$ para o problema $P(Fu, x)$.

Argumentos usuais nos permitem provar facilmente que o conjunto de soluções é limitado e fechado em $C([0, \delta]; X)$.

Exemplos.

a) Seja $F : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ contínuo tal que cada $K \subset C([0, T]; X)$ limitado existe $g_K \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$ tal que

$$\|f(t)\| \leq g_K(t)$$

para quase todo $t \in [0, T]$ e $f \in F(K)$. Então, se 1i) ou 2i) ou 3i) do teorema é satisfeito, o problema $P(Fu, x)$ tem solução local.

b) Se $F : X \rightarrow X$ é uma contração linear com constante $C < 1/T$, defina $\bar{F} : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ dada por $\bar{F}(u) = F(u(\cdot))$. Então $\bar{F}$ aplica subconjuntos limitados em subconjuntos uniformemente integráveis e $(B_x \bar{F})$ satisfaz 3i) do teorema com $\varphi(t) = C t I$.

c) Por outro lado se $B_x F$ é contração com constante $K < 1$, $B_x F$ satisfaz 2i) do teorema com $\varphi(v) = \frac{1}{1-K} \|v - B_x Fv\|_\infty$.

d) Se F é compacto, então F aplica subconjuntos limitados em subconjuntos uniformemente integráveis. Além disso, $(B_x F)$ é compacto, satisfazendo a condição 1i) do teorema.

Em cada caso o problema $P(Fu, x)$ tem uma solução local.

Para o próximo exemplo precisaremos do seguinte resultado:

Corolário - Seja $A(t)$, $0 \leq t \leq T$, uma família de operadores m -acretivos, satisfazendo E1 e E2. Seja $F : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ operador tal que

$$\|Fu(t) - Fv(t)\| \leq ct \|u - v\|_\infty.$$

Então, o problema $P(Fu, x)$ tem uma solução local.

Prova: Como F leva subconjuntos limitados em uniformemente integráveis, seguindo os passos da prova do teorema, existe $\delta > 0$ tal que

$$(T_\delta B_x F E_\delta)(C_\epsilon^\delta) \subset C_\epsilon^\delta.$$

Além disso, para u e v em C_ϵ^δ temos

$$\|B_x F(u)(t) - B_x F(v)(t)\| \leq \int_0^t \|Fu(s) - Fv(s)\| ds.$$

Segue que

$$\|B_x F(u)(t) - B_x F(v)(t)\| \leq \frac{ct^2}{2} \|u - v\|_\infty,$$

e portanto,

$$\|(B_x F)^n u - (B_x F)^n v\|_\infty \leq \frac{cT^{n+1}}{(n+1)!} \|u - v\|_\infty.$$

Logo, para n suficientemente grande tem-se que $\frac{cT^{n+1}}{(n+1)!} < 1$ e, assim,

$(T_\delta B_x FE_\delta)$ tem um ponto fixo.

Agora podemos provar que a equação da onda tem solução local. Veja também Barbu (1976) e Morosanu (1988).

e) (Equação da Onda) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira suave Γ e o problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \ni (fu)(t, x) \quad \text{em } \mathbb{R}^+ \times \Omega,$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x), \quad \text{em } \Omega.$$

Fisicamente a equação descreve as vibrações de uma membrana elástica com fronteira fixa e sujeita às forças de atrito β e externa f .

Suponha que:

1) $f: C([0, T]; L^2(\Omega)) \rightarrow C([0, T]; L^2(\Omega))$ satisfaz

$$|fu(t) - fv(t)| \leq ct \|u - v\|_\infty$$

para quase todo $t \in [0, T]$,

2) β é operador monótono maximal com $\beta(0) \ni 0$.

Fixado $t \geq 0$, $u(t)$ denotará a função $x \rightarrow u(t, x)$. Fazendo

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Como β é monótono maximal e $\beta(0) \ni 0$ existe $j: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$ tal que $\partial j = \beta$. Considere $\varphi: H_0^1(\Omega) \rightarrow (-\infty, \infty]$ dada por

$$\varphi(v) = \begin{cases} \int_{\Omega} j(v(x)) dx, & \text{se } j \circ v \in L^1(\Omega) \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Claramente φ é própria, convexa e semicontínua inferior e sua extensão a $L^2(\Omega)$ também. Seja então $\tilde{\beta} = \partial\varphi$, definida em $D(\tilde{\beta}) \subset H_0^1(\Omega)$, portanto $\tilde{\beta}$ é monótono maximal. Sabemos que $-\Delta: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ também é monótono maximal. Lembramos que os mergulhos

$$H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$$

são compactos. Então, se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & \tilde{\beta} \end{bmatrix},$$

resulta que

$$AU = \begin{bmatrix} -v \\ -\Delta u + \tilde{\beta}(v) \end{bmatrix},$$

e obtemos o seguinte problema abstrato de Cauchy:

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU \ni F(U)(t), t \geq 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases},$$

onde $U \in C([0, T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$,

$F: C([0, T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) \rightarrow C([0, T]; H_0^1(\Omega))$ com $FU = F(u, v) = (0, fu)$ e o espaço de Banach é $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, munido do produto interno $(U_1, U_2) = \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_{\Omega} v_1 v_2 dx$, onde $U_i = (u_i, v_i)$.

O operador A e seu domínio são

$$D(A) = \{(p, q) \in (H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)); (-\Delta p + \tilde{\beta}(q)) \cap L^2(\Omega) \neq \emptyset\} \subset X,$$

$$A(p, q) = \{-q\} \times (-\Delta p + \tilde{\beta}(p)) \cap L^2(\Omega) \subset X,$$

para todo $(p, q) \in D(A)$. Sabemos de (Barbu, 1976) que A é monótono maximal e que $\overline{D(A)}$ é dado por

$$\overline{D(A)} = H_0^1(\Omega) \times \{\xi \in L^2(\Omega); \xi(x) \in \overline{D(f)} \text{ a.e. } x \in \Omega\}$$

Como F satisfaz

$$|FU_1(t) - FU_2(t)| \leq ct \|u_1 - u_2\|_\infty,$$

onde $U_j = (u_j, v_j)$. Segue do corolário que o problema (*) acima tem uma solução local integral.

Um importante caso particular da equação da onda não linear é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \ni f(t, u), t > 0, x \in [0, 1]$$

$$u(t, 0) = 0 \quad u(t, 1) = 0 \quad t > 0$$

que descreve as vibrações de uma corda de comprimento 1, com as extremidades fixas numa superfície sólida plana, que opõe ao movimento da corda uma força de atrito de magnitude $\operatorname{sign}(\frac{\partial u}{\partial t})$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARBU, V. *Nonlinear semigroups and differential in banach spaces*. Bucureste: Nordoff Inst., 1976. 352 p.
- BENILAN, P.H. *Équations d'évolution dans un espace de Banach et applications*. Orsay: Université di Orsay, 1972. Tese (Doutorado em Matemática) - Université de Orsay, 1972.
- KOBAYSI, K., KOBAYASHI, Y. & OHARU, S. Nonlinear evolution operators in Banach spaces. *Osaka J. Math.*, 21: 281-310, 1984.
- MOROSANU, G. *Nonlinear evolution equations and applications*. Bucureste : D. Reidel, 1988. 340 p.
- PAVEL, H. *Nonlinear evolution operators and semi-groups applications to partial differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1987. 285 p.
- VESELY, L. Some new results an accretive multivalued operators: *Comment. Math. Univ. Carolinae.*, 30(1):45-55, 1989.

CORRESPONDÊNCIAS ENTRE OS IDEAIS PRIMOS DO ANEL DE WITT SOBRE UM ANEL LOCAL, ORDENS E ASSINATURAS

Rosali Brusamarello*

RESUMO. Neste trabalho estudamos a teoria de formas quadráticas sobre anéis locais, sem a hipótese que 2 é inversível no anel. Nosso objetivo é estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos ideais minimais do Anel de Witt sobre um anel local e o conjunto das ordens maximais deste anel. Esta correspondência já foi estabelecida por Kanzaki e Kitamura quando 2 é inversível no anel local.

Palavras-chave: Ordens, Assinaturas, Ideais Primos e Anel de Witt.

ABSTRACT. CORRESPONDENCE BETWEEN PRIME IDEALS OF WITT RING OVER A LOCAL RING, ORDERS AND SIGNATURES. In this work we study the quadratic forms theory over local rings without referring to the hypothesis that 2 is invertible. Our aim is to establish a one to one correspondence between the set of the minimal prime ideals of Witt Ring over a local ring and the set of maximal orders of this ring. This correspondence has already been established by Kanzaki and Kitamura when 2 is invertible over the local ring.

Key words: Orders, Signatures, Prime Ideals and Witt Ring.

INTRODUÇÃO

Em 1973, Lam estabeleceu uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos ideais primos minimais do Anel de Witt de um corpo de característica distinta de 2 e o conjunto das ordens deste corpo. Neste artigo vamos estudar esta correspondência quando, no lugar destes corpos, tivermos um anel local.

Vamos considerar sempre A um anel local $W(A)$ o anel de Witt sobre A . Usamos a terminologia básica e fatos básicos sobre formas quadráticas como dados em Baeza (1978). Por Dias (1988), os elementos de $W(A)$

* Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 3690, Campus Universitário, 87020-900 - Maringá, Paraná, Brasil.

podem ser escritos da forma $\langle \alpha_1 \rangle \perp \langle \alpha_2 \rangle \perp \dots \perp \langle \alpha_n \rangle$, onde $\langle \alpha_i \rangle$ denota um módulo bilinear unidimensional (Ae, b) , tal que $b(e, e) = \alpha_i$ e os α_i são unidades de A . Uma assinatura σ de A é um homomorfismo do anel $W(A)$ no anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Denotamos por $Ass(A)$ o conjunto das assinaturas de A . Apenas enunciamos o resultado seguinte que será utilizado no decorrer do trabalho. Sua demonstração pode ser encontrada em Knebusch (1972).

Lema 1 Se $\sigma \in Ass(A)$, então :

(i) $\sigma(\langle -1 \rangle) = -1$

(ii) Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são unidades de A com $\sigma(\langle \alpha_1 \rangle) = \dots = \sigma(\langle \alpha_n \rangle) = 1$ e $y_1, \dots, y_n$ elementos de A tais que $\beta = \gamma_1^2 \alpha_1 + \dots + \gamma_n^2 \alpha_n$ é uma unidade de A , então $\sigma(\langle \beta \rangle) = 1$.

Um subconjunto $P \subseteq A$ é uma ordem de A se:

(a) $P + P \subseteq P$

(b) $P \cdot P \subseteq P$

(c) $P \cup (-P) = A$

(d) $P \cap (-P) = 0$, com $P \in Spec A$.

O ideal primo P é chamado suporte da ordem P . Dizemos que P é uma ordem maximal de A se P é maximal com relação à inclusão. Denotamos por $O(A)$ o conjunto de todas as ordens de A e por $O_m(A)$ o conjunto das ordens maximais de A .

Denotamos por A^* o grupo das unidades do anel A . Um subconjunto $P \subseteq A^*$ é uma ordem das unidades se:

(a) $P \cup -P = A^*$

(b) $P \cap -P = 0$

(c) $P \cdot P \subseteq P$

(d) $(P+P) \cap A^* \subseteq P$.

Kanzaki & Kitamura, em 1972, estabeleceram uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos ideais primos minimais do Anel de Witt sobre um anel local em que 2 é inversível e o conjunto das ordens das unidades deste anel. Neste artigo mostramos que esta última correspondência continua verdadeira se retirarmos a hipótese de 2 ser inversível no anel. Para se chegar a este resultado foram estabelecidas outras correspondências importantes.

Inicialmente vamos demonstrar que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\text{Ass}(A)$ e o conjunto $O_m(A)$. As demais correspondências seguirão imediatamente desta e da correspondência estabelecida em Knebusch (1976) entre ideais primos e assinaturas.

TEOREMAS DE CORRESPONDÊNCIA

Para $\sigma \in \text{Ass}(A)$, consideramos os seguintes subconjuntos de A :

$$\Gamma(\sigma) = \{\alpha \in A^* : \sigma(\langle \alpha \rangle) = 1\}$$

$$Q(\sigma) = \{\alpha_1 + \dots + \alpha_r : \alpha_i \in \Gamma(\sigma)\}.$$

Lema 2 Seja $\sigma \in \text{Ass}(A)$. Então $Q(\sigma) \cap A^* = \Gamma(\sigma)$. Mais ainda, todo elemento de $Q(\sigma)$ é um elemento de $\Gamma(\sigma)$ ou soma de dois elementos de $\Gamma(\sigma)$.

Dem.: A igualdade $Q(\sigma) \cap A^* = \Gamma(\sigma)$ segue diretamente do Lema 1. Agora, usando o fato que A é um anel local, para todo $x \in Q(\sigma)$ obtemos que $x \in Q(\sigma) \cap A^*$ ou $x \in Q(\sigma) \cap M$, onde M é o ideal maximal de A . Se $x \in Q(\sigma) \cap A^*$, então $x \in \Gamma(\sigma)$. Caso contrário, $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_r \in M$, com $r > 1$, $\alpha_i \in A^*$ e $\sigma(\langle \alpha_i \rangle) = 1$, para $1 \leq i \leq r$. Tomando $x = \alpha_1 + \dots + \alpha_{r-1}$, $\beta = \alpha_r$, temos que $\alpha, \beta \in A^*$, pois $\alpha = x - \alpha_r$ e A é um anel local. Como $\sigma(\langle \alpha_i \rangle) = \dots = \sigma(\langle \alpha_{r-1} \rangle) = 1$ segue do Lema 1 que $\sigma(\langle \alpha \rangle) = 1$. Portanto, $x = \alpha \in \Gamma(\sigma)$ ou $x = \alpha + \beta$ com $\alpha, \beta \in \Gamma(\sigma)$. ■

Observação 1. Usando o fato de que σ é um homomorfismo de anéis, temos que, para todo $x \in \Gamma(\sigma)$, o seu inverso $x^{-1} \in \Gamma(\sigma)$. Também é imediato que:

$$Q(\sigma) \cdot Q(\sigma) \subseteq Q(\sigma)$$

$$Q(\sigma) \cdot -Q(\sigma) \subseteq -Q(\sigma).$$

Proposição 1. *Seja $\sigma \in \text{Ass}(A)$. Então:*

(i) $Q(\sigma) \cap -Q(\sigma) = \emptyset$

(ii) Se $x, y \in A$ e $x + y \in Q(\sigma)$, então $x \in Q(\sigma)$ ou $y \in Q(\sigma)$.

(iii) $P = A - (Q(\sigma) \cup -Q(\sigma))$ é um ideal primo de A .

Dem.: (i) Suponhamos que $Q(\sigma) \cap -Q(\sigma) \neq \emptyset$. Então existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in \Gamma(\sigma)$ tais que:

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_r = -\beta_1 - \dots - \beta_s.$$

Se $\alpha_1 + \dots + \alpha_r \in A^*$, então $\sigma(\langle \alpha_1 + \dots + \alpha_r \rangle) = 1$ e $\beta_1 + \dots + \beta_s \in A^*$; logo, $\sigma(\langle \beta_1 + \dots + \beta_s \rangle) = 1$. Mas segue também que:

$$1 = \sigma(\langle \alpha_1 + \dots + \alpha_r \rangle) = \sigma(\langle \beta_1 + \dots + \beta_s \rangle) = -1,$$

pois $\sigma(\langle -1 \rangle) = -1$. Isto é uma contradição.

Se $\alpha_1 + \dots + \alpha_r \in M$, então $\alpha_1 + \dots + \alpha_{r-1} \in A^*$. Assim, $\alpha_1 + \dots + \alpha_{r-1} = -\alpha_r - \beta_1 - \dots - \beta_s$ com $\alpha_1 + \dots + \alpha_{r-1} \in A^*$, o que recai no caso acima. Portanto, $Q(\sigma) \cap -Q(\sigma) = \emptyset$.

(ii) Consideremos $x, y \in A$ com $x + y \in Q(\sigma)$. Então $x + y = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$, com $\alpha_i \in \Gamma(\sigma)$, $1 \leq i \leq r$. Temos dois casos a analisar: se x ou y é uma unidade e se x e y são não-unidades.

Para analisarmos o primeiro caso, basta considerarmos $x \in A^*$, pois o caso $y \in A^*$ é análogo. Se $x \in A^*$, então $x \in \Gamma(\sigma)$ ou $-x \in \Gamma(\sigma)$. Se $x \in \Gamma(\sigma)$ é imediato que $x \in Q(\sigma)$. Caso contrário, $y = -x + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \in Q(\sigma)$. Portanto, $x \in Q(\sigma)$ ou $y \in Q(\sigma)$.

Suponhamos, agora, que $x, y \in M$, ou seja, x e y são não-unidades. Como $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in A^*$ certamente $r \geq 2$. Assim, $x + (y - \alpha_1) = \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ e $y - \alpha_1 \in A^*$, pelo caso anterior temos que $x \in Q(\sigma)$ ou $y - \alpha_1 \in Q(\sigma)$. Como $\alpha_1 \in Q(\sigma)$, se $y - \alpha_1 \in Q(\sigma)$ então $y \in Q(\sigma)$. Portanto, em ambos os casos $x \in Q(\sigma)$ ou $y \in Q(\sigma)$.

(iii) Mostremos agora que $P = A - (Q(\sigma) \cup -Q(\sigma))$ é um ideal primo de A . Pelo item (ii) se $x \notin Q(\sigma)$ e $y \notin Q(\sigma)$, então $x + y \notin Q(\sigma)$, analogamente, para $-Q(\sigma)$. Logo, se $x, y \in P$ então $x + y \in P$. Da definição de P segue que $P = -P$. Portanto, P é um subgrupo aditivo de A .

Consideremos $x \in A$ e $y \in P$. Como $A = Q(\sigma) \cup -Q(\sigma) \cup P$, segue que $x \in Q(\sigma)$ ou $x \in -Q(\sigma)$ ou $x \in P$.

Se $x \in Q(\sigma)$, segue do Lema 2 que $x = \alpha \in \Gamma(\sigma)$ ou $x = \alpha + \beta$, com $\alpha, \beta \in \Gamma(\sigma)$. Suponhamos que $x \in \Gamma(\sigma)$, então $x^{-1} \in \Gamma(\sigma) \subseteq Q(\sigma)$. Assim, $xy \in P$, pois, caso contrário, $xy \in Q(\sigma) \cup -Q(\sigma)$ o que implica em $y \in Q(\sigma) \cup -Q(\sigma)$, que é uma contradição. Agora, se $x = \alpha + \beta$ com $\alpha, \beta \in \Gamma(\sigma)$, então $xy = \alpha y + \beta y$. Se $xy \in Q(\sigma)$, por (ii) temos que $\alpha y \in Q(\sigma)$ ou $\beta y \in Q(\sigma)$, ou seja, em ambos os casos $y \in Q(\sigma)$. Isto é uma contradição.

De maneira análoga, chegamos a uma contradição supondo $xy \in -Q(\sigma)$. Logo $xy \notin Q(\sigma) \cup -Q(\sigma)$, ou seja, $xy \in P$.

Se $x \in P$, então $1 + x \in Q(\sigma)$, pois P é fechado para a adição e $1 + x \in -Q(\sigma)$, implica $x \in -Q(\sigma)$. Logo, $(1 + x)y \in P$, conseqüentemente, $xy = (1 + x)y - y \in P$.

Assim, se $x \in A$ e $y \in P$, então $xy \in P$, o que nos permite concluir que P é um ideal de A . E mais, desde que $Q(\sigma) \cup -Q(\sigma)$ é fechado para a multiplicação, temos que se $x \notin P$ e $y \notin P$, então $xy \notin P$. Portanto P é um ideal primo de A . ■

Corolário 1. *O conjunto $P(\sigma) = Q(\sigma) \cup P$ é uma ordem de A com suporte P .*

Dem.: As condições (ii), (iii), (iv) da definição de ordem decorrem facilmente da Proposição. Para condição (i) é suficiente provarmos que se $x \in P$ e $y \in Q(\sigma)$ então $x + y \in Q(\sigma)$. Certamente $x + y \notin P$, pois P é um ideal de A . Supondo $x + y \in -Q(\sigma)$, temos $x = (x + y) - y \in -Q(\sigma)$, o que é uma contradição. Portanto $x + y \in Q(\sigma)$. ■

Veremos a seguir que, na verdade, $P(\sigma)$ é uma ordem maximal de A .

Proposição 2. *Seja $\sigma \in \text{Ass}(A)$. Então $P(\sigma) = Q(\sigma) \cup P$ é uma ordem maximal de A .*

Dem.: Suponhamos que exista $P \in \mathcal{O}(A)$, tal que $P(\sigma) \subseteq P$ e $P(\sigma) \neq P$. Logo, existe $x \in P - P(\sigma)$. Como $P(\sigma) = Q(\sigma) \cup P$, temos que $x \in -Q(\sigma)$. Do Lema 2 segue que $x = -\alpha$ ou $x = -\alpha - \beta$, com $\alpha, \beta \in \Gamma(\sigma)$.

Se $x = -\alpha \in -Q(\sigma) \subseteq -P(\sigma)$, então $x \in -P$, pois $-P(\sigma) \subseteq -P$. Logo, $x \in P \cap -P$, o que é uma contradição, pois $x \in A^*$.

Se $x = -\alpha - \beta$, então $x + \alpha = -\beta \in -P(\sigma) \subseteq -P$. Por outro lado, $\alpha \in P(\sigma) \subseteq P$ e $x \in P$. Logo, $-\beta = x + \alpha \in P$, pois $P + P \subseteq P$. Assim, $-\beta \in P \cap -P$, o que é uma contradição, pois $-\beta \in A^*$. Portanto, $P(\sigma) = P$, ou seja, $P(\sigma) \in \mathcal{O}_m(A)$. ■

Construímos para cada assinatura σ de A , uma ordem maximal $P(\sigma)$ de A . Na verdade, existe uma relação mais estrita entre os conjuntos $\text{Ass}(A)$ e $\mathcal{O}_m(A)$, conforme o teorema que segue.

TEOREMA 1. *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das assinaturas de A e o conjunto das ordens maximais de A .*

Dem.: Dada uma assinatura σ de A , já provamos que $P(\sigma) = Q(\sigma) \cup P$ é uma ordem maximal de A . Reciprocamente,

dada uma ordem maximal P de A definimos uma assinatura σ_P de A , tal que para todo $\alpha \in A^*$:

$$\sigma_P(<\alpha>) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \in P \\ -1 & \text{se } \alpha \in -P \end{cases}$$

Assim, estabelecemos uma correspondência entre $\text{Ass}(A)$ e $O_m(A)$. Resta mostrarmos que esta correspondência é biunívoca, ou seja, que $\sigma_{P(\sigma)} = \sigma$ e $P(\sigma_P) = P$.

Por definição, para todo $\alpha \in A^*$:

$$\sigma_{P(\sigma)}(<\alpha>) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \in P(\sigma) \\ -1 & \text{se } \alpha \in -P(\sigma) \end{cases}$$

Usando o fato de que α é uma unidade e $P(\sigma) \cap A^* = \Gamma(\sigma)$ verifica-se facilmente que $\sigma_{P(\sigma)}(<\alpha>) = \sigma(<\alpha>)$ para todo $\alpha \in A^*$. Portanto, $\sigma_{P(\sigma)} = \sigma$.

Seja $P \in O_m(A)$. Queremos mostrar que $P(\sigma_P) = P$. Para tanto, basta mostrarmos que $P \subseteq P(\sigma_P)$. Tomemos $x \in P$. Se $x = \alpha \in A^*$, então $\sigma_P(<\alpha>) = 1$, ou seja, $x \in Q(\sigma_P) \subseteq P(\sigma_P)$. Se $x \notin A^*$, suponhamos, por absurdo, que $x \in -Q(\sigma_P)$. Então $x = -\alpha \cdot \beta$, com $\alpha, \beta \in A^*$ e $\sigma_P(<\alpha>) = \sigma_P(<\beta>) = 1$. Logo, $x + \alpha = -\beta \in -Q(\sigma_P)$ e mais, $\sigma_P(<x + \alpha>) = \sigma_P(<-\beta>) = -1$. Assim $x + \alpha \in -P$. Consequentemente, $\alpha = (x + \alpha) - x \in -P$, ou seja, $\sigma_P(<\alpha>) = -1$, o que é uma contradição. Logo, $x \notin -Q(\sigma_P)$, o que implica que $x \in P(\sigma_P)$. Portanto, $P(\sigma_P) = P$. ■

O seguinte teorema foi provado por Knebusch em 1976.

TEOREMA 2. *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das assinaturas de um anel local A e o conjunto dos ideais primos minimais de $W(A)$.*

Segue dos teoremas anteriores que:

TEOREMA 3. *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos ideais primos minimais de $W(A)$ e o conjunto das ordens maximais de A .*

Este resultado generaliza o teorema (3.1) de Kanzaki (1972). Segundo este teorema, existe, uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos ideais primos minimais de $W(A)$ e o conjunto das ordens

das unidades de A , onde A é um anel local com 2 inversível em A . Na verdade, o conjunto das ordens das unidades esta em correspondência biunívoca com o conjunto das ordens maximais de A . Isto decorre do próximo resultado.

TEOREMA 4. *Seja A um anel local. Então existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das ordens das unidades de A e o conjunto das assinaturas de A .*

Dem.: Dada P uma ordem das unidades de A , podemos definir uma assinatura σ_p , por:

$$\sigma_p(<\alpha>) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \in P \\ -1 & \text{se } \alpha \in -P \end{cases}$$

para todo $\alpha \in A^*$.

Por outro lado, dada $\sigma \in \text{Ass}(A)$, podemos definir a seguinte ordem das unidades:

$$P(\sigma) = \{\alpha \in A^* : \sigma(<\alpha>) = 1\}.$$

O conjunto $P(\sigma)$ satisfaz as quatro condições de ordem das unidades. A quarta condição decorre do Lema 2 e as demais são triviais. É fácil ver que $\sigma_{P(\sigma)} = \sigma$ e $P(\sigma_p) = P$. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAEZA, R. *Quadratic forms over semilocal rings*. Berlin: Springer - Verlag, 1978. 199 p. (Lecture notes in mathematics, 655).
- DIAS, I. *Formas quadráticas sobre LG-Aneis*. Campinas: UNICAMP, 1988. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade de Campinas, 1988.
- KANZAKI, T. & KITAMURA, K. On prime ideals of a Witt ring over a local ring. *Osaka Journal Mathematics.*, 9:225-229, 1972.
- KNEBUSCH, M. & ROSENBERG, A. An Invitation to real spectra. In: CONFERENCE ON QUADRATIC FORMS, Hamilton, 1983. *Lecture...* Hamilton, 1983. 54 p.
- KNEBUSCH, M. & ROSENBERG, A. Real Closures of commutative Rings. *Journal für Mathematik.*: 61-89, 1973.
- KNEBUSCH, M. Symmetric bilinear forms over algebraic varieties, lecture at the quadratic forms IN: CONFERENCE QUEEN S University, Kingston, 1976. p. 107-179.

KNEBUSCH, M. *et al.* Signature on semilocal rings. *Journal of Algebra*, 26:208-250, 1972.

LAM, T.Y. *The Algebraic theory of quadratic forms*. Reading: The Benjamin Cummings, 1973. 341 p.

RELAÇÃO ENTRE COORDENADAS GEODÉSICAS E COORDENADAS TOPOCÊNTRICAS

Dalto Domingos Rodrigues*

RESUMO. Definem-se alguns sistemas de referência envolvidos na topografia por satélites e apresentam-se as equações matemáticas que transformam coordenadas geodésicas em coordenadas cartesianas geocêntricas e estas, em topocêntricas.

Palavras-chave: Topografia, Satélites, Coordenadas, Geocêntricas, Topocêntricas.

ABSTRACT. RELATION BETWEEN GEODETIC COORDINATES AND TOPOCENTRIC COORDINATES. This paper defines some systems of reference involved in topography when made through satellites and presents the mathematical equations which help to transform geodetic coordinates into geocentric cartesian coordinates and the latter into topocentric ones.

Key words: Topography, Satellites, Coordinates, Geocentric, Topocentric.

INTRODUÇÃO

O Departamento de Defesa Norte Americano vem implementando um sistema de navegação por satélites - O "Global Positioning System (GPS)" - que, desde já, tem permitido um rápido, econômico e preciso posicionamento em qualquer lugar do globo terrestre, independentemente da hora do dia e das condições atmosféricas.

Uma das principais aplicações civis deste sistema é a Topografia. A Topografia por satélites conduz diretamente às três coordenadas cartesianas geocêntricas, que são, normalmente, transformadas, pelo receptor, em coordenadas geodésicas, latitude, longitude e altitude, que, por sua vez, podem ser transformadas em coordenadas cartesianas topocêntricas.

O objetivo deste trabalho é desenvolver, organizar e resumir o assunto geodésico: transformação de coordenadas, visando a elaboração de softwares. Inicialmente é apresentado o princípio do posicionamento

* Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, Minas Gerais, Brasil.

por satélites GPS e a seguir são definidos os sistemas de referência envolvidos. As equações matemáticas que transformam coordenadas geodésicas em coordenadas cartesianas geocêntricas e estas em topocêntricas são discutidas no quarto tópico. Finalizando, são apresentadas algumas conclusões e recomendações.

O PRINCÍPIO DO POSICIONAMENTO POR SATÉLITES GPS

Sendo dado um sistema de referência cartesiano fixo, qualquer ponto p do espaço é determinado, de maneira única, por suas coordenadas Xp , Yp , Zp .

Seja a Figura 1, onde:

X , Y e Z , são os eixos de um sistema de referência fixo;

p , um ponto a ser determinado;

S_1 , S_2 e S_3 , são três posições, não coplanares, de satélites e

r_1 , r_2 e r_3 , são as distâncias do ponto p a S_1 , S_2 e S_3 respectivamente.

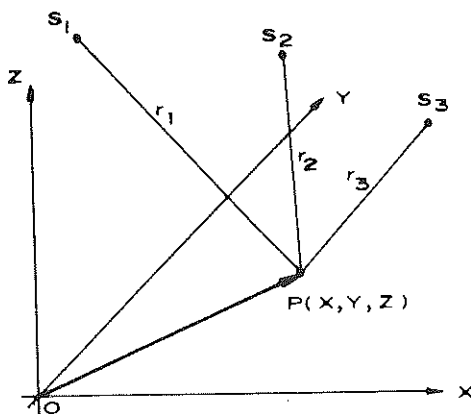


FIGURA 1: Sistema de referência para o ponto p e os satélites.

A idéia básica do posicionamento por satélites GPS, consiste em (Rodrigues, 1989):

- medir as três distâncias r_1 , r_2 e r_3 ;
- determinar as três posições S_1 , S_2 e S_3 e
- determinar as três coordenadas Xp , Yp e Zp .

Os satélites GPS transmitem sinais de rádio. Para medir, por exemplo, a distância r_1 , um receptor posicionado em p recebe o sinal transmitido da posição S_1 e mede, por exemplo, o tempo gasto pelo sinal para percorrer a distância $\overline{S_1 p}$. Multiplicando este tempo pela velocidade de propagação do sinal, obtém-se r_1 .

Os sinais de rádio transmitidos, trazem consigo os elementos orbitais dos satélites e, utilizando estes elementos, as posições dos satélites podem ser determinadas em relação a um sistema cartesiano global.

Montando três equações linearmente independentes, semelhantes à equação (1), que relaciona as distâncias medidas com as posições dos satélites e do receptor, podem-se calcular as três coordenadas X_p , Y_p e Z_p .

$$r_i = \sqrt{(XS_i - Xp)^2 + (YS_i - Yp)^2 + (ZS_i - Zp)^2} \quad (1)$$

SISTEMAS GEODÉSICOS DE REFERÊNCIA

As coordenadas obtidas pelo rastreamento de satélites referem-se a um sistema cartesiano global, previamente definido e realizado como, por exemplo, o Sistema Terrestre Médio. A grande vantagem de se usar um sistema cartesiano tridimensional (3-D) é que ele é completamente definido pela origem, direção e sentido dos três eixos; no entanto apresenta o inconveniente de não refletir, de forma direta, uma variação de altitude. Tradicionalmente a superfície terrestre tem sido representada pelas coordenadas geodésicas, latitude, longitude e altitude; enquanto uma porção limitada desta superfície pode, simplificada, ser definida pelas coordenadas topocêntricas.

Neste tópico são definidos o sistema global terrestre médio, o sistema geodésico mundial ("WGS") e o sistema cartesiano topocêntrico.

Sistema Cartesiano Global

O sistema global terrestre médio é definido como segue (Figura 2):

- a) Origem = Centro de massas da Terra, incluindo a massa da atmosfera (GEOCENTRO);
- b) Eixo Z =

Direção: Coincide com o eixo médio de rotação da terra, indicado pelas cinco estações do "International Earth Rotation Service - IERS";

Sentido Positivo: O sentido geocentro - CTP ("Conventional Terrestrial Pole), ou Polo Norte Médio;

b) Eixo X =

Direção: Aquela determinada pela intersecção do plano médio do equador terrestre com plano que contém o meridiano médio de Greenwich (meridiano zero), definido pelo IERS;

Sentido Positivo: O sentido geocentro - semi-meridiano superior de Greenwich;

d) Eixo Y =

Direção: Perpendicular aos eixos X e Z;

Sentido Positivo: Aquele que torna o sistema dextrógiro;

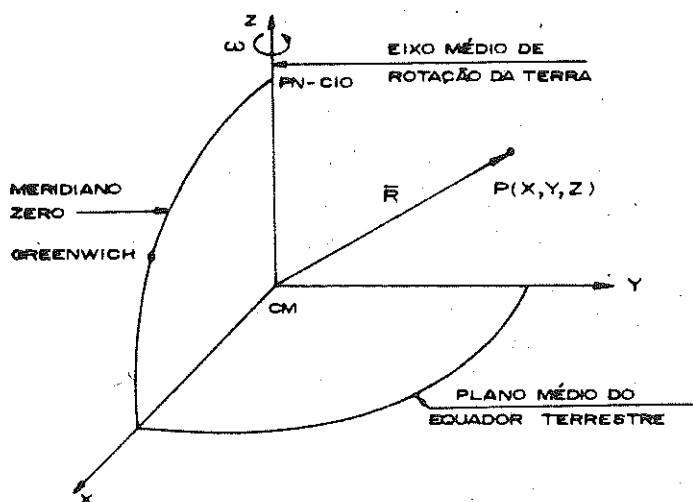


FIGURA 2. Sistema Terrestre Médio e coordenadas cartesianas geocêntricas de um ponto p .

Sistema Geodésico Mundial

A superfície terrestre pode ser modelada, geometricamente, por um elipsóide de revolução, achatado nos pólos, proporcionando, assim, uma

definição exata para coordenadas geográficas. O elipsóide de revolução é criado girando uma elipse em torno do semi-eixo menor e , portanto, definido por dois parâmetros geométricos: o semi-eixo maior a e o semi-eixo menor b (Fig.). Geralmente, b é substituído por um número menor e mais indicado para uma expansão em série, o achatamento geométrico f ,

$$f = \frac{a-b}{a} \quad (2)$$

Além dos dois parâmetros geométricos que definem o tamanho e a forma do elipsóide de revolução, precisa-se, para definir um sistema geodésico, especificar a sua posição e orientação em relação a outro sistema de referência como, por exemplo, um sistema cartesiano global, (Figura 4).

Em 1984, foi definido o "World Geodetic System (WGS - 84)", como segue (Silva, 1990):

a) $a = 6.378.137$ metros,

b) $f = \frac{1}{298,257223563}$,

c) Posição em relação ao sistema cartesiano global:

$X_c = 0$, $Y_c = 0$ e $Z_c = 0$ (sistema geocêntrico) e

d) Orientação em relação ao sistema terrestre médio:

semi-eixo menor coincidente com o eixo médio de rotação da terra.

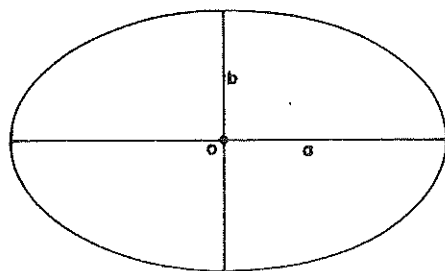


FIGURA 3: Elipse meridiana.

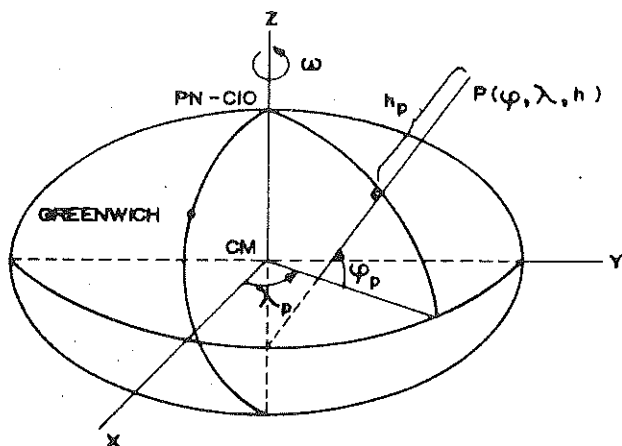


FIGURA 4: Sistema Geodésico Mundial e coordenadas geodésicas de um ponto p .

As coordenadas geodésicas de um ponto p , já definidas na Figura 4, podem ser enunciadas da seguinte forma:

LATITUDE GEODÉSICA (ϕ_p): É o ângulo que a normal ao elipsóide, passante pelo ponto, forma com sua projeção equatorial. Varia de -90° a $+90^\circ$ ("+" no hemisfério norte).

LONGITUDE GEODÉSICA (λ_p): É o ângulo que mede o diedro formado pelos meridianos do ponto considerado e de Greenwich. Varia de -180° a $+180^\circ$ ("+" a leste de Greenwich).

ALTITUDE GEOMÉTRICA (h_p): É o segmento da normal compreendido entre o ponto P e o elipsóide.

Sistema Topocêntrico

Para, de forma simplificada, representar e obter informações geométricas e posicionais de uma porção limitada da superfície terrestre, pode-se usar o Sistema Cartesiano Topocêntrico, definido como segue (Figura 5):

a) Origem = Um ponto qualquer sobre a superfície física da Terra ou do elipsóide de referência;

b) Eixo z =

Direção: A direção da normal ao elipsóide que passa pelo ponto de origem;

Sentido Positivo: O sentido Nadir - Zênite.

c) Eixo y =

Direção: A direção do meridiano geodésico do ponto de origem;

Sentido Positivo: Dirigido para o polo norte médio (CTP);

d) Eixo x =

Direção: Perpendicular aos eixos y e z ;

Sentido Positivo: Aquele que torna o sistema dextrógiro;

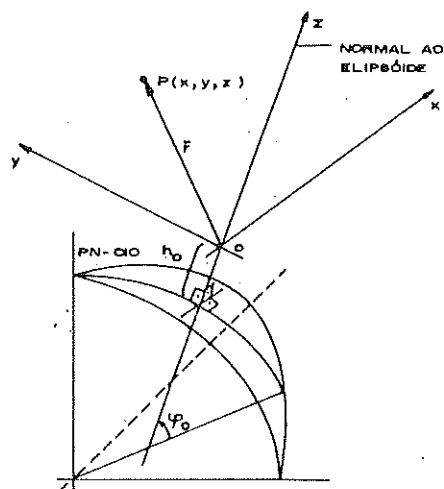


FIGURA 5: Sistema Topocêntrico e coordenadas cartesianas topocêntricas de um ponto p .

RELAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Neste tópico, são apresentadas as equações matemáticas que transformam coordenadas geodésicas em coordenadas cartesianas geocêntricas, estas em topocêntricas e vice-versa.

Relação entre Coordenadas Geodésicas e as Correspondentes Cartesianas

Observando a Figura 6, constata-se que, possuindo um ponto p , coordenadas geodésicas φ , λ , h e retilíneas X_p , Y_p , Z_p , existe entre elas as seguintes relações:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ (N+h) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ [N \cdot (1-e^2) + h] \cdot \sin\varphi \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde a grande normal N , segmento $\overline{p'I}$ na Figura 6, é obtida com a seguinte equação (Gemael, 1981):

$$N = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2) \cdot \sin^2\varphi}} \quad (4)$$

e "e", a excentricidade do elipsóide, é obtida com (Torge 1980):

$$e = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]} \quad (5)$$

onde a e b são semi-eixo maior e menor, respectivamente, sendo que b pode ser obtido por (Torge, 1980):

$$b = a \cdot a \cdot f \quad (6)$$

onde f é o achatamento do modelo geométrico (e matemático) da Terra, o elipsóide de revolução.

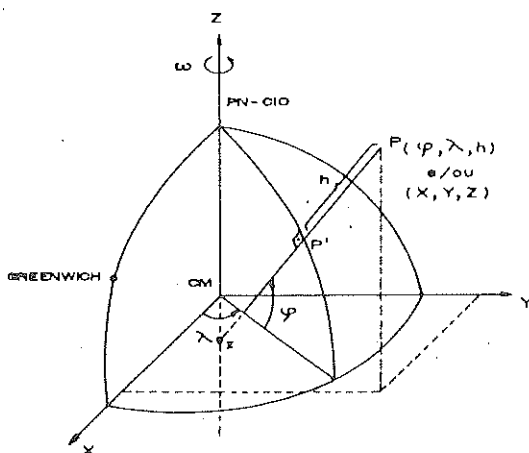


FIGURA 6: Coordenadas geodésicas e coordenadas geocêntricas de um ponto p .

A transformação inversa à indicada pela equação (3) apresenta uma pequena dificuldade, facilmente superável, por ser a grande normal N uma função da latitude (agora uma incógnita). Dividindo a segunda linha pela primeira da equação (3), tem-se:

$$Tg \lambda = \frac{Yp}{Xp} \quad (7)$$

Elevando ao quadrado X e Y , dados pela equação (3), e somando-os chega-se a:

$$\sqrt{Xp^2 + Yp^2} = (N + h) \cdot \cos \varphi \quad (8)$$

e desenvolvendo a terceira linha da mesma equação, observa-se que:

$$Z + N \cdot e^2 \cdot \text{Sen } \varphi = (N + h) \cdot \text{sen } \varphi \quad (9)$$

Dividindo a (9) pela (8) tem-se:

$$Tg \varphi = \frac{Z + N \cdot e^2 \cdot \text{Sen } \varphi}{\sqrt{Xp^2 + Yp^2}} \quad (10)$$

expressão que se resolve por iteração.

Obtida a coordenada φ , a altitude geométrica h resulta da (11), que pode ser escrita da seguinte forma:

$$h = \frac{\sqrt{Xp^2 + Yp^2}}{\cos \varphi} - N \quad (12)$$

Relação entre Coordenadas Cartesianas Geocêntricas e as Correspondentes Topocêntrica

As coordenadas cartesianas geocêntricas Xp , Yp , e Zp podem ser transformadas em coordenadas cartesianas topocêntricas xp , yp e zp , através da seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} xp \\ yp \\ zp \end{bmatrix} = R1(90^\circ - \varphi_0) \cdot R3(90^\circ + \lambda_0) \begin{bmatrix} Xp - Xo \\ Yp - Yo \\ Zp - Zo \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde:

$R1$ e $R3$ são as matrizes de rotação em torno dos eixos X e Z do sistema geocêntrico transladado, respectivamente;

φ_0 e λ_0 são as coordenadas geodésicas do ponto de origem do sistema topocêntrico, e

X_0 , Y_0 e Z_0 são as coordenadas cartesianas geocêntricas do ponto de origem (Figura 7).

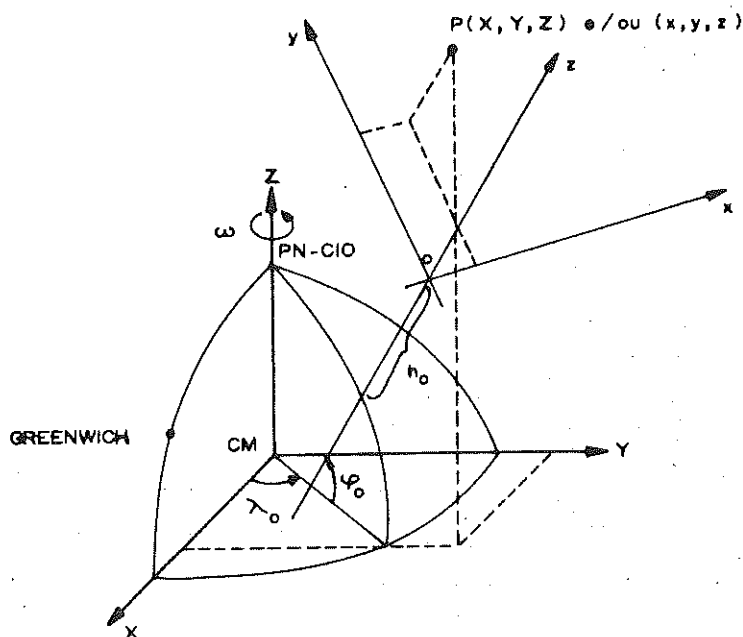


FIGURA 7: Coordenadas geocêntricas e coordenadas topocêntricas de um ponto p .

Desenvolvendo a equação (13) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 xp &= -\text{Sen}(\lambda_0) \cdot (Xp - X_0) + \text{Cos}(\lambda_0) \cdot (Yp - Y_0); \\
 yp &= -\text{Sen}(\varphi_0) \cdot \text{Cos}(\lambda_0) \cdot (Xp - X_0) - \text{Sen}(\varphi_0) \cdot \text{Sen}(\lambda_0) \cdot (Yp - Y_0) \\
 &\quad + \text{Cos}(\varphi_0) \cdot (Zp - Z_0) \text{ e} \\
 zp &= \text{Cos}(\varphi_0) \cdot \text{Cos}(\lambda_0) \cdot (Xp - X_0) + \text{Cos}(\varphi_0) \cdot \text{Sen}(\lambda_0) \cdot (Yp - Y_0) \\
 &\quad + \text{Sen}(\varphi_0) \cdot (Zp - Z_0).
 \end{aligned} \tag{14}$$

A transformação inversa à indicada pela (13) é realizada com seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} Xp \\ Yp \\ Zp \end{bmatrix} = R3[-(90^0 + \lambda_0)] \cdot R1[-(90^0 - \varphi_0)] \begin{bmatrix} xp \\ yp \\ zp \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Xo \\ Yo \\ Zo \end{bmatrix} \quad (15)$$

que desenvolvida resulta:

$$\begin{aligned} Xp &= -\text{Sen}(\lambda_0) \cdot xp - \text{Sen}(\varphi_0) \cdot \text{Cos}(\lambda_0) \cdot yp + \text{Cos}(\varphi_0) \cdot \text{Cos}(\lambda_0) \cdot zp + Xo \\ Yp &= \text{Cos}(\lambda_0) \cdot xp - \text{Sen}(\varphi_0) \cdot \text{Sen}(\lambda_0) \cdot yp + \text{Cos}(\varphi_0) \cdot \text{Sen}(\lambda_0) \cdot zp + Yo \\ Zp &= \text{Cos}(\varphi_0) \cdot yp + \text{Sen}(\varphi_0) \cdot zp + Zo \end{aligned} \quad (16)$$

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O "Global Positioning System - GPS", vem provocando, sem dúvida, uma revolução na navegação, seja ela marítima, aérea ou terrestre e nos sistemas de informações geográficas e/ou topográficas.

Um ponto qualquer, acima de ou sobre a superfície terrestre, é determinado, num primeiro instante, pelas coordenadas cartesianas geocêntricas X , Y e Z ; porém, as coordenadas geodésicas, representam diretamente variações na altitude e as coordenadas cartesianas topocêntricas podem ser utilizadas para, de forma simplificada, representar e obter informações geométricas e posicionais de uma porção limitada da superfície terrestre.

A precisão das coordenadas X , Y , Z depende da precisão com que são medidos os tempos de propagação dos sinais emitidos pelos satélites e calculadas as suas posições.

Os erros cometidos na obtenção das coordenadas cartesianas geocêntricas X , Y e Z propagam-se às coordenadas geográficas φ , λ , h e às coordenadas topocêntricas x , y , z .

A transformação de coordenadas geodésicas em cartesianas geocêntricas e estas em topocêntricas e vice-versa é exata. No entanto, vale observar que estas coordenadas não se referem a sistemas naturais ou astronômicos e sim a um modelo matemático da terra.

Além de se posicionar um ponto pelas suas coordenadas, a confiabilidade destas deve ser avaliada.

A fim de se possibilitar a elaboração de softwares pela comunidade técnico-científica em geral, para fins de geoprocessamento e representação geográfica e topográfica, recomenda-se a padronização de formatos para arquivos de coordenadas geodésicas e de coordenadas cartesianas.

Desenvolveu-se um programa denominado TOPOSAT que transforma coordenadas geodésicas em coordenadas geocêntricas, estas em topocêntricas e vice-versa. Este programa, de uso público, encontra-se disponível nos departamentos de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR e Universidade Federal de Viçosa, Viçosa-MG.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRADE, J.B. Determinação simultânea de parâmetros de transformação entre referenciais geodésicos e de desníveis geodais. *Boletim da Universidade Federal do Paraná*, 30:16, 1984.
- GEMAEL, C. *Referenciais cartesianos utilizados em Geodésia*. Curitiba: [s.n.], 1981.
- RODRIGUES, D.D. *Uma análise de geometria oferecida pela constelação final dos sistemas GPS, para posicionamento por ponto*. Curitiba: UFPR, 1989. Tese (Mestrado em Ciências Geodésicas) - Universidade federal do Paraná, 1989.
- SILVA, A. J.P.A. *O uso do GPS nas medições de curta distância*. Curitiba: UFPR, 1990. Tese (Mestrado em Ciências Geodésicas) - Universidade federal do Paraná, 1990.
- TORGE, W. *Geodesy an Introduction* Berlin: Walter de Gruyter, 1980.

MONTMORILONITA E MAGADIITA PILARIZADAS COM ESTRUTURAS DE SÍLICA: PREPARAÇÃO E ESTABILIDADE TÉRMICA

Fred Wolff* e Renato Sprung*

RESUMO. O tratamento de H-Magadiita e uma Montmorilonita natural a 0°C e 25°C com oligômeros de triclorofenilsilano preparados às mesmas temperaturas resultou em materiais com áreas superficiais BET de até 190 m²/g. H-Magadiita pilarizada mostrou boa estabilidade térmica até 900°C, mas a Montmorilonita pilarizada sofreu reduções sensíveis de área quando calcinada a temperaturas acima de 600°C. Compostos pilarizados a 0°C apresentaram as maiores áreas superficiais.

Palavras-chave: Pilarização, Montmorilonita, Magadiita.

ABSTRACT. PILLARED MONTMORILLONITE AND MAGADIITE WITH SILICIC STRUCTURES: PREPARATION AND THERMAL STABILITY. Treating H-Magadiite and a natural Montmorillonite at 0°C and 25°C with trichlorophenylsilane oligomers prepared at the same temperatures resulted in materials showing BET surface areas up to 190 m²/g. Pillared H-Magadiite displayed good thermal stability up to 900°C, but pillared Montmorillonite showed appreciable losses in surface area when calcined at temperatures above 600°C. Compounds pillared at 0°C yielded the highest surface areas.

Key words: Pillarization, Montmorillonite, Magadiite.

INTRODUÇÃO

Partículas de materiais lamelares são constituídas de associações face a face e face-aresta de lamelas cuja espessura é da ordem de 10. A temperaturas próximas da ambiente, alguns destes materiais possuem a capacidade de adsorver líquidos e vapores, com aumento do espaçamento interlamelar das associações face a face, mas tendem a expelir a substância adsorvida quando a temperatura é aumentada.

* Departamento de Engenharia Química, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 3690, Campus Universitário, 87020-900, Maringá, -Paraná, Brasil.

A área superficial total de argilas e sílicas lamelares pode exceder $600 \text{ m}^2/\text{g}$, embora a maior parte desta área não seja acessível aos reagentes em processos catalíticos desenvolvidos a temperaturas elevadas. A possibilidade de expandir permanentemente o espaçamento interlamelar através da intercalação, entre as lamelas, de "pilares" inorgânicos estáveis às temperaturas de utilização do material, gerou uma nova classe de materiais chamados de pilarizados.

Burch (1988) apresentou uma abrangente revisão de argilas pilarizadas com uma variedade de polications inorgânicos e da aplicação catalítica destes materiais. A pilarização de argilas com estruturas poliédricas tridimensionais de sílica foi reportada por Lewis *et al.* (1985). Foram obtidos materiais pilarizados com áreas superficiais de até $400 \text{ m}^2/\text{g}$, espaçamentos interlamelares da ordem de 10 e resistência a tratamentos térmicos de até 700°C . Nesta temperatura, as lamelas da argila sofreram colapso em sua estrutura por um processo de desidroxilação.

Sprung & Davis (1988) e Sprung *et al.* (1990) descreveram um novo material, puramente silícico, obtido a partir da pilarização de Magadiíta com estruturas tridimensionais de sílica. O procedimento permitiu o aumento da área superficial da Magadiíta original de $35 \text{ m}^2/\text{g}$ para valores de até $200 \text{ m}^2/\text{g}$. Poros com dimensões de $6,2 \text{ \AA}$ por $9,4 \text{ \AA}$ foram detectados no material pilarizado, que suportou tratamentos térmicos de 650°C sem perda sensível de área superficial. Estes materiais tem potencial aplicação como adsorventes e como suportes de componentes catalíticos.

Magadiíta é um silicato de sódio cuja forma natural foi descoberta por Eugster (1967). A forma sintética e sua conversão à forma ácida foram descritas por Lagaly *et al.* (1975a, b). Magadiíta Sódica, $\text{Na}_2\text{Si}_{14}\text{O}_{29} \cdot 11\text{H}_2\text{O}$, resiste a tratamentos térmicos de 500°C sem sofrer colapso estrutural; a forma protônica ou ácida, $\text{H}_2\text{Si}_{14}\text{O}_{29} \cdot 5,4\text{H}_2\text{O}$, é estável a temperaturas de até 1000°C . A estabilidade da forma protônica sugere a possibilidade de obtenção de materiais pilarizados com resistência térmica equivalente.

O nosso interesse em compostos pilarizados decorre da potencialidade de se obter materiais com uma variedade de porosidades, propriedades superficiais e estabilidades térmicas, dependendo do composto lamelar original e do tipo de pilar

intercalado. Esta possibilidade abre perspectivas de sintetizar materiais com características específicas para determinados processos catalíticos ou de adsorção.

O presente trabalho apresenta resultados de pilarização e de estabilidade térmica de uma argila montmorilonítica natural e de Magadiita sintética obtidas em nosso laboratório no Departamento de Engenharia Química da UEM.

PARTE EXPERIMENTAL

(a) Materiais e Métodos

A argila, proveniente de depósitos de xisto de São Mateus do Sul-PR, foi cedida pela Petrosix. O difratograma de raios X que acompanhou a amostra identificou a argila como montmorilonítica com espaçamento basal de 14,62. A análise fornecida indicou a presença dos elementos apresentados na Tabela 1.

TABELA 1: Composição da Argila.

Elemento	% peso
Fe	3,8
Ca	2,3
Si	20,0
Al	13,0
Na	0,18
Mg	1,3
K	1,8

A Argila não foi submetida a tratamentos adicionais antes do processo de pilarização.

Magadiita Sódica foi sintetizada a partir de sílica coloidal Nalco-1140 (Nalco Produtos Químicos), hidróxido de sódio ACS 97% (Química Moderna) e água destilada. A Tabela 2 mostra as condições utilizadas nas sínteses; a designação MS refere-se a Magadiita Sódica.

Tipicamente, o hidróxido de sódio foi dissolvido na água destilada e a solução adicionada à sílica coloidal a temperatura

ambiente. Esta mistura foi então aquecida sob pressão autógena em miniautoclaves de aço inox revestidas de Teflon ou em vasos de Teflon com tampa rosqueável. Após resfriamento, o produto sólido foi separado por filtração e seco às condições ambientais.

A forma ácida foi obtida a partir da titulação de suspensões aquosas de Magadiita Sódica com HCl 0,1N de acordo com a sistemática de Lagaly *et al.* (1975b). A titulação foi efetuada até um pH final de 2 num período de 24 horas e a suspensão resultante deixada sob agitação por mais 24 horas. O sólido foi separado por filtração e seco em estufa a aproximadamente 80°C.

TABELA 2: Síntese de Magadiita Sódica.

Designação	Relação molar da mistura reagente	Condições de síntese	Rendimento percentuais
MS-1 ¹	Na ₂ O:5SiO ₂ :122H ₂ O	100°C 54 dias	8,7
MS-2 ²	Na ₂ O:9SiO ₂ :75H ₂ O	130°C 5 dias	29,8

1. Sistemática de Sprung *et al.* (1988, 1990).

2. Sistemática de Schwieger *et al.* (1985).

3. Massa final de sólidos x 100/ Massa inicial total.

O processo global de pilarização foi desenvolvido em três etapas: (i) preparação do agente pilarizante, (ii) tratamento de Montmorilonita e Magadiita com o agente pilarizante, e (iii) calcinação do material sólido assim obtido.

No presente estudo, o agente pilarizante consistiu de uma solução de oligômeros de triclorofenilsilano. Sua preparação envolveu a condensação hidrolítica do monômero em metanol. Em todas as preparações efetuadas, 0,4 ml de água destilada foram adicionadas a uma solução de 0,7 ml de triclorofenilsilano PA (Merck - 98%) em 6,3 ml de Metanol PA (Merck - 99,5%) contida em recipiente de Teflon e mantida sob agitação magnética. A Tabela 3 mostra as condições de oligomerização utilizadas nos processos de pilarização de Magadiita Ácida e Montmorilonita. Nesta Tabela, a designação MAP refere-se a Magadiita Ácida Pilarizada; os números que seguem indicam, respectivamente, a Magadiita Sódica original e o experimento de

pilarização. Da mesma forma, APS é a sigla de Argila Pilarizada com Sílica.

TABELA 3: Condições de Oligomerização e de Pilarização de Magadiita e Montmorilonita.

Designação do composto	Oligomerização		Pilarização	
	Temp., °C	Tempo, h	Temp., °C	Tempo, h
MAP-1.2	0	1	0	2
MAP-2.1	0	1	0	2
MAP-2.2	0	0,5	0	2
MAP-2.3	0	2	0	2
MAP-2.4	23	0.5	23	2
MAP-2.5	25	1	25	2
MAP-2.6	25	2	25	2
APS-1	17	1	20	2
APS-2	0	0.5	0	1
APS-3	0	1	0	2
APS-4	0	2	0	4

MAP: Magadiita Ácida Pilarizada.

APS: Argila Pilarizada com Sílica.

Na segunda etapa, suspensões de 1,5 g de Montmorilonita ou de Magadiita em 18 ml de água destilada, que haviam ficado sob agitação por 1 hora, foram adicionadas às soluções de oligômeros (agentes pilarizantes). As condições de tratamento são apresentadas na Tabela 3.

A remoção dos grupos fenila do material pilarizado foi feita por calcinação a temperaturas de 450, 600, 750 e 900°C. Foi utilizado um forno mufla com taxa de aquecimento de cerca de 10°C/min. Não houve controle da atmosfera de ar do forno. A temperatura final de calcinação, mantida constante por 1,5 horas, foi atingida em etapas. Estas etapas consistiram de patamares de temperatura constante com duração de 0,5 horas a 150, 450, 600 e 750°C, dependendo da temperatura de calcinação. Amostras já calcinadas não sofreram novas calcinações.

(b) Caracterização dos Materiais

Algumas amostras foram caracterizadas por difração de raios X tipo pó, análise termodiferencial e análise termogravimétrica. Os difratogramas de raios X foram obtidos utilizando radiações K Cobre. As análises térmicas foram realizadas em atmosfera de ar, tendo alumina como referência. A taxa de aquecimento foi de $10^{\circ}\text{C}/\text{min}$.

Medidas dinâmicas da capacidade de adsorção de nitrogênio gasoso à temperatura do nitrogênio líquido foram efetuadas num equipamento CG-2000, utilizando uma mistura de 10% de nitrogênio em hélio. Todas as amostras foram pré-tratadas por 2 horas a 150°C em corrente de nitrogênio. A capacidade de adsorção de cada amostra foi determinada para uma pressão relativa P/P^0 de $0,21 \pm 0,01$. A quantidade adsorvida assim obtida foi convertida em área superficial através do Método BET de um ponto.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A utilização das diferentes condições de síntese de Magadiíta Sódica (Na-Magadiíta) apresentadas na Tabela 2 foi motivada pela necessidade de estabelecer uma sistemática adequada ao desenvolvimento dos nossos trabalhos. A síntese designada por MS-1, conduzida a 100°C , requer um tempo de reação de 54 dias, considerado muito longo, além de resultar em baixo rendimento de Na-Magadiíta por batelada. Aumentando a temperatura para 130°C , síntese MS-2, reduziu o tempo para 5 dias e aumentou sensivelmente o rendimento do produto desejado.

Lagaly (1979) mostrou que a conversão de silicatos de sódio em suas formas protônicas ou ácidas obedece a curvas de titulação características de cada material. A Figura 1 apresenta a variação do pH da suspensão aquosa com a quantidade de HCl 0,1N adicionada na titulação de Na-Magadiíta MS-2, de um material silíceo não identificado resultante de uma síntese e de Na-Magadiíta conforme reportado por Lagaly. Nossos resultados de conversão de Magadiíta Sódica em sua forma ácida, H-Magadiíta, compararam-se bem com os obtidos por Lagaly, incluindo o consumo total de HCl 0,1N.

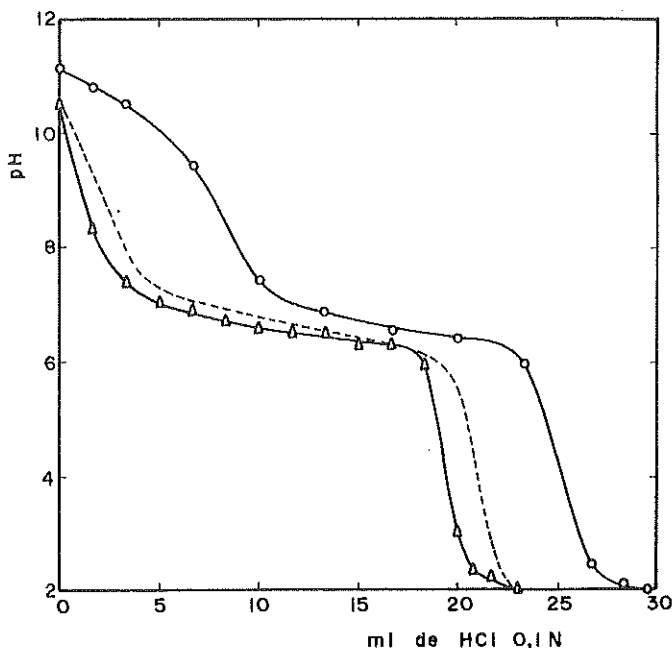


FIGURA 1: Curvas de titulação com HCl 0,1N de (A) Magadiíta Sódica MS-2, (B) Na-Magadiíta conforme reportado por Lagaly (1979), e (C) Material silícico sintético não identificado.

A formação de espécies oligoméricas com amplas distribuições de dimensões e massas moleculares é característica intrínseca de qualquer processo de oligomerização. No caso específico da oligomerização de triclorofenilsilano, além dos oligômeros lineares, planares e tridimensionais usuais, a presença do grupo fenila permite a obtenção de oligômeros poliédricos tridimensionais, como os da Figura 2, revista por Voronkov & Lavrent'Yev (1982). Estes poliedros são substâncias cristalinas incolores bastante estáveis a tratamentos térmicos; o octâmero pode ser aquecido em ar até o seu ponto de fusão de 500°C sem se decompor. O decâmero tem o mesmo comportamento até 415°C, quando lentamente se inicia um processo de polimerização.

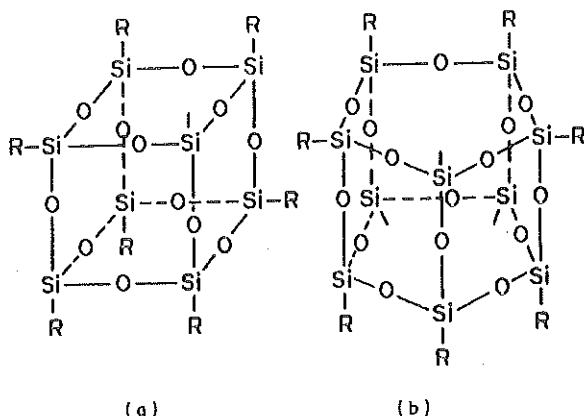


FIGURA 2: Oligômeros poliédricos tridimensionais de triclorofenilsilano: (a) Octâmero, (b) Decâmero.

Em todos os experimentos de pilarização efetuados, houve formação e deposição de gomas pegajosas no bastão magnético de agitação e em algumas regiões do recipiente reacional de Teflon. Na obtenção do composto MAP-1.2, estes depósitos causaram sérios problemas de agitação que exigiram a substituição do bastão de agitação no decorrer dos experimentos. Em geral, a quantidade de depósitos aumentou com o tempo de oligomerização. As gomas formadas a 0°C mostraram-se relativamente solúveis em metanol e etanol; os depósitos observados a 20-25°C, além de mais rígidos, possuem solubilidade pobre nestes álcoois. Sua remoção exigiu o uso de acetona. Estas verificações comprovaram a presença de diversas espécies silíceas oligoméricas não poliédricas no meio pilarizante; não foi possível obter evidências semelhantes sobre a formação de espécies poliédricas cristalinas.

Os materiais sólidos resultantes dos experimentos de pilarização não apresentaram características pegajosas ou aglomerantes que pudessem evidenciar depósitos superficiais como os formados nas paredes do recipiente de Teflon e no bastão de agitação. As massas dos materiais sólidos secos pilarizados, com exceção de MAP-1.2, foram cerca de 13 a 28% superiores às massas iniciais de H-Magadiíta e Montmorilonita. Amostras de H-Magadiíta pilarizadas a 0°C incorporaram maior quantidade de oligômeros do que aquelas pilarizadas a 25°C. O aumento do tempo

de oligomerização reduziu as massas de oligômeros incorporadas às amostras de H-Magadiíta tratadas a 25°C e de Montmorilonita a 0°C, mas não teve efeitos significativos sobre as amostras de H-Magadiíta tratadas a 0°C.

Difração de Raios X

A Figura 3 mostra um difratograma de raios X, característico da Magadiíta Sódica sintetizada. O pico intenso em 2θ igual a 5,62 corresponde a um espaçamento basal de 15,7, típico de Na-Magadiíta. O espaçamento basal é alterado pela quantidade de água ou outras espécies químicas presentes no espaço interlamelar. Lagaly *et al.* (1975a) demonstraram que a secagem de Magadiíta Sódica a 200°C reduz o espaçamento basal para 11,6.

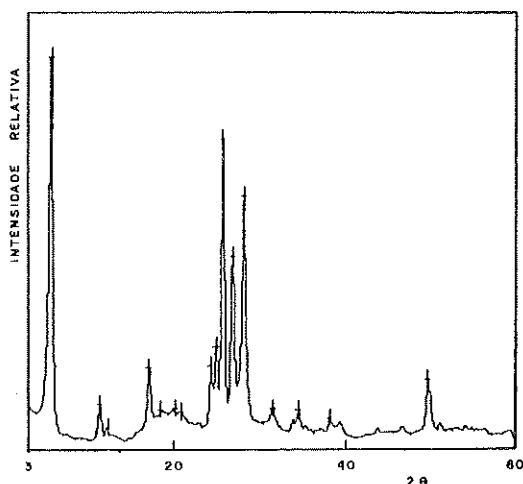


FIGURA 3: Difratograma de raios X da Magadiíta Sódica MS-2 sintetizada a 130°C.

O difratograma de raios X da Figura 4 corresponde a H-Magadiíta. Comparado ao difratograma de Na-Magadiíta da Figura 2, houve uma acentuada redução do número total de picos. Esta redução de picos foi atribuída por Lagaly *et al.* (1975b) à distorção da simetria da lamela de silicato ocasionada pela substituição dos íons de sódio por prótons. Distorções semelhantes também foram observadas por Lagaly *et al.* em

Magadiita intercalada com íons ou moléculas de outras substâncias, e por Brindley (1969) em Na-Magadiita desidratada.

Lagaly *et al.* (1975b) reportaram espaçamentos basais de 13,2 e 11,2 para H-Magadiita completamente hidratada e desidratada, respectivamente. O pico em 2θ igual a $7,13^\circ$ no difratograma da Figura 4, correspondente a um espaçamento basal de 12,4, indica um grau intermediário de hidratação.

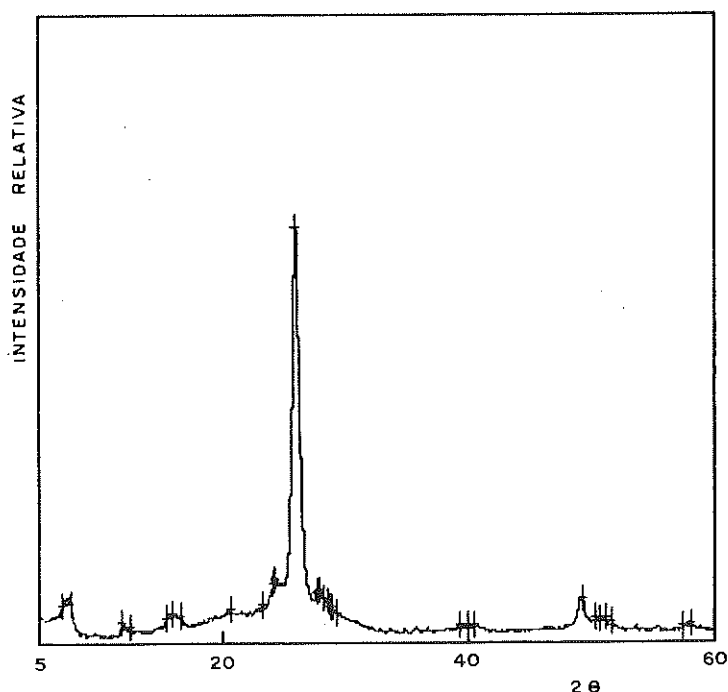


FIGURA 4: Difratograma de raios X de H-Magadiita derivada de Na-Magadiita sintetizada a 130°C .

A Figura 5 apresenta o difratograma de raios X de Magadiita Ácida Pilarizada MAP-2.2, não calcinada. Os difratogramas de todos os compostos da série MAP-2 cujas etapas de preparação foram efetuadas a 0°C , são similares ao da Figura 5. Os efeitos devidos a utilização de diferentes tempos de preparação do agente pilarizante não puderam, portanto, ser detectados através de análises de raios X.

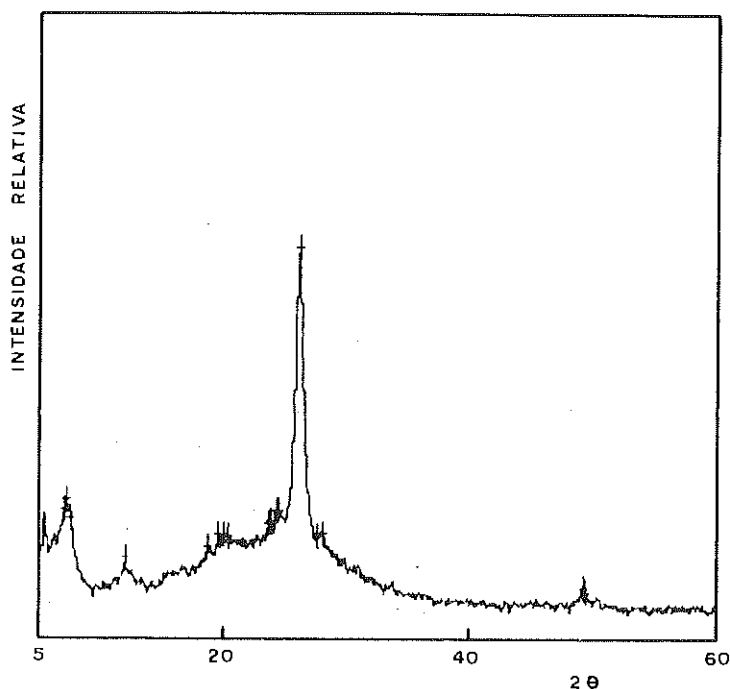


FIGURA 5: Difratoograma de raios X de Magadiíta Ácida Pilarizada MAP-2.2 não calcinada.

Comparando as Figuras 4 e 5, observa-se que os difratogramas de H-Magadiíta e de MAP-2.2 são essencialmente iguais, com exceção dos picos para valores de 2θ menores que 10° . Além do pico em $2\theta \approx 7^\circ$, correspondente ao espaçamento basal de cerca de 12,4 Å da H-magadiíta, o difratograma de MAP-2.2 mostra outros picos para valores menores de 2θ , o mais proeminente em $5,45^\circ$, equivalente a um espaçamento basal de 16,2 Å. Este valor é maior que o da Magadiíta Sódica completamente hidratada, e representa uma expansão de 5 Å no espaçamento de H-Magadiíta desidratada.

Houve, portanto, um aumento do espaçamento basal com preservação da estrutura lamelar de H-Magadiíta. No entanto, a não uniformidade do espaçamento de MAP-2.2 parece indicar que a pilarização foi apenas parcial e/ou com espécies silíceas de dimensões diferentes.

Análises Térmicas

As mudanças térmicas sofridas por Magadiíta Sódica MS-1 e Magadiíta Ácida Pilarizada MAP-1.2 não calcinada, quando submetidas a análises termodiferenciais e termogravimétricas até 800°C, são mostradas nas Figuras 6 e 7, respectivamente. Os dois picos endotérmicos entre 100 e 300°C na análise termodiferencial da Figura 6, são característicos de Magadiíta Sódica, e indicam que a perda de água ocorre em duas etapas nesta faixa de temperaturas. Segundo Lagaly *et al.* (1975a), Magadiíta Sódica transforma-se em quartzo entre 500 e 700°C, e este rearranja-se em tridimita acima de 700°C. O forte pico exotérmico da Figura 6, acerca de 800°C, é indicativo deste último rearranjo.

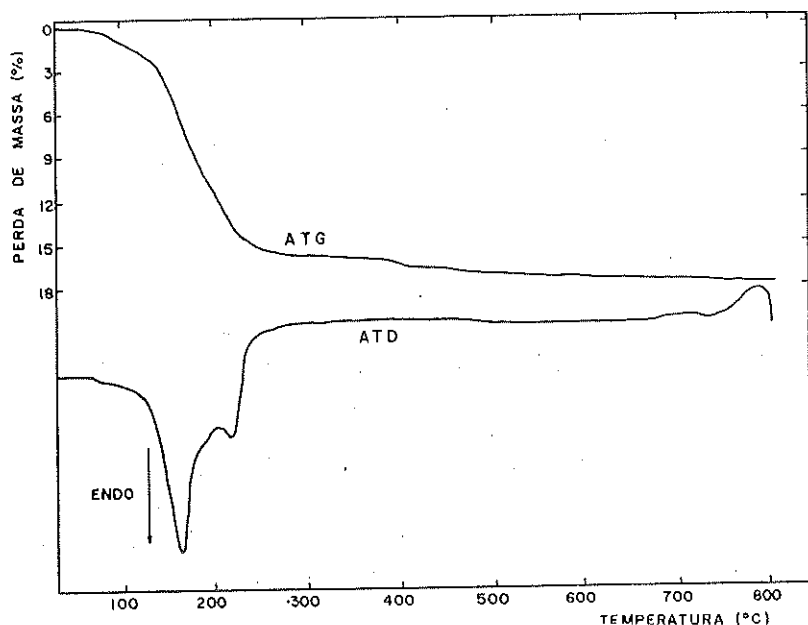


FIGURA 6: Análises termodiferencial e termogravimétrica de Magadiíta Sódica MS-1.

Ainda segundo Lagaly *et al.* (1975), Magadiíta Ácida perde água contida no espaço interlamelar, até aproximadamente 7% da massa do sólido, quando aquecida até 300°C. A partir de 400°C inicia-se a condensação de grupos silanóis (Si-OH), com formação de ligações siloxano (Si-O-Si) entre as lamelas. Através desta condensação, que

libera cerca de 2% de água entre 400 e 600°C, sem grandes efeitos térmicos, H-Magadiíta perde a capacidade de ser intercalada e pilarizada com outras espécies químicas. A forma da curva da análise termogravimétrica de H-Magadiíta é muito semelhante àquela mostrada na Figura 6 para Na-Magadiíta.

As análises térmicas de Magadiíta Ácida Pilarizada MAP-1.2 da Figura 7 revelam duas características que não são típicas da H-Magadiíta original: (i) uma contínua perda de massa a temperaturas acima de 300°C até aproximadamente 750°C, e (ii) dois picos exotérmicos acentuados entre 500 e 750°C na análise termodiferencial. Aparentemente, a remoção dos grupos orgânicos só é completa a 750°C.

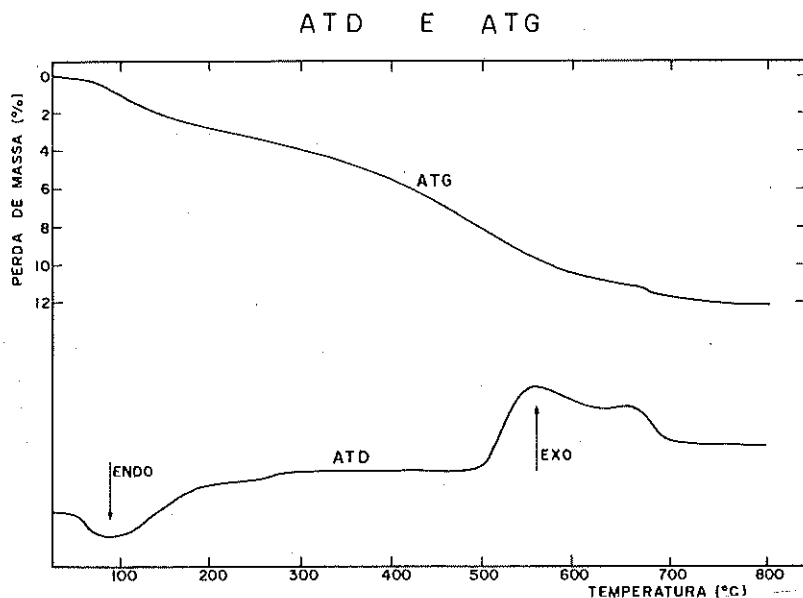


FIGURA 7: Análises termodiferencial e termogravimétrica de Magadiíta Ácida Pilarizada MAP-1.2 não calcinada.

Considerando a boa estabilidade térmica dos oligômeros poliédricos, a perda de massa entre 300 e 500°C deve ser oriunda da vaporização e/ou decomposição de oligômeros não-poliédricos. A ausência de efeitos exotérmicos sugere pouca participação de oxigênio no processo. Calcinando MAP-1.2 a 300 e 450°C em ar resultou em produtos bege-

caramelo claros, de coloração mais intensa a 300°C e menos a 450°, dando suporte adicional ao processo de decomposição.

Acima de 500°C, embora a perda de massa seja equivalente àquela verificada entre 300 e 500°C, os efeitos térmicos são bastante apreciáveis, indicando participação do oxigênio do ar. MAP-1.2 calcinada a temperaturas de 600 e 750°C não apresentou as colorações beges, características das calcinações a temperaturas mais baixas. A 600°C, a coloração foi gelo levemente acinzentada, enquanto que a 750°C, a cor resultante foi branca. É provável que pelo menos parte desta decomposição exotérmica seja devida a oligômeros poliédricos. Os picos exotérmicos distintos podem indicar a oxidação de oligômeros diferentes ou de mesmos oligômeros presentes nas superfícies externa e interna do sólido.

Área Superficial e Estabilidade Térmica

A Tabela 4 apresenta as áreas superficiais dos materiais utilizados no presente trabalho em função da temperatura de calcinação. Os valores são conservadores porque a temperatura de 150°C utilizada para a limpeza das amostras pode não ter sido suficiente para a remoção total da água contida nos poros.

Deve-se também lembrar que a equação de BET não é adequada para cálculos de áreas superficiais de materiais microporosos. Gregg & Sing (1982) discutem a aplicação desta equação, enfatizando o conceito duvidoso de formação de monocamada de adsorbato em microporos, quando, efetivamente, dá-se o enchimento completo deste tipo de poros com o adsorbato. Em consequência, os valores calculados para as áreas superficiais devem ser analisados em termos comparativos para os diversos materiais, e não como valores absolutos representativos das suas áreas efetivas.

Os materiais não pilarizados possuem áreas relativamente baixas. O valor de cerca de 20 m²/g para a Argila Natural está coerente com o reportado freqüentemente na literatura. Magadiíta Ácida MA-2 tem área de 76 m²/g, que é reduzida para 50 m²/g quando o material é calcinado a temperaturas de 450 a 900°C.

A pilarização de H-Magadiíta e Montmorilonita resulta em compostos com áreas superficiais de até 190 m²/g. Os dados para Magadiíta Pilarizada MAP-1.2 indicam a necessidade da etapa de

calcinação para a obtenção destas áreas elevadas. A área de MAP-1.2 não calcinada, antes, portanto, da remoção dos grupos orgânicos fenila, é de apenas 41 m²/g. A perda de massa que ocorre durante o tratamento térmico, conforme mostrado na análise termogravimétrica da Figura 7, conduz a áreas superficiais da ordem de 100 m²/g para temperatura de calcinação superiores a 400° C.

TABELA 4: Áreas Superficiais de Argila e Magadiita pilarizadas e não-pilarizadas.

Designação do composto	Temperatura de calcinação, °C				
	-	450	600	750	900
MAP-1.2	41	107	-	88	-
MS-2	34	-	-	-	-
MA-2	76	53	52	49	50
MAP-2.1	-	83	147	49	171
MAP-2.2	-	47	134	38	154
MAP-2.3	-	66	186	73	159
MAP-2.4	-	30	121	23	135
MAP-2.5	-	06	106	07	73
MAP-2.6	-	94	87	8 106	-
Argila natural	23	1	18	-	-
APS-1	-	131	118	70	-
APS-2	-	176	189	32	25
APS-3	-	157	123	96 22	
APS-4	-	132	168	14	26

A Tabela 4 mostra que Montmorilonita e H-Magadiita pilarizadas possuem áreas superficiais equivalentes quando calcinadas a temperaturas de 450 a 600° C. No entanto, o comportamento torna-se bastante distinto para temperaturas de calcinação mais elevadas.

O aumento da temperatura de calcinação de 600 para 750°C reduziu as áreas superficiais das Montmorilonitas pilarizadas em cerca de 30%; calcinação a 900°C teve efeitos ainda mais drásticos, resultando em áreas de aproximadamente 25 m²/g, que são semelhantes à da Argila Natural. Este comportamento não foi compartilhado pelas Magadiitas pilarizadas,

cujas áreas permaneceram relativamente uniformes com tratamentos térmicos idênticos. Portanto, a estabilidade térmica das Montmorilonitas pilarizadas mostrou-se bem menor que a das Magadiitas pilarizadas.

Lewis *et al.* (1985) obtiveram argilas pilarizadas com oligômeros de sílica de resistência térmica equivalente. Tanto Lewis *et al.* como Burch (1988) atribuíram a baixa resistência de argilas pilarizadas ao colapso da estrutura interna das lamelas da argila. O fato de H-Magadiita ser estável até cerca de 1000°C (Lagaly *et al.*, 1975b), parece assim explicar a maior estabilidade térmica da forma pilarizada.

Sprung *et al.* (1988, 1990) reportaram a possibilidade de obter Magadiitas Ácidas pilarizadas com áreas de 176 m²/g quando calcinadas a 650°C. O nosso trabalho indica a possibilidade de preparar materiais com áreas superficiais levemente superiores a estes valores e estáveis a tratamentos térmicos de até 900°C.

As Tabelas 3 e 4 permitem também apreciar o efeito das condições de preparação sobre as propriedades dos materiais pilarizados. As preparações feitas a temperatura ambiente resultaram em materiais com áreas superficiais inferiores a 130 m²/g. A diminuição da temperatura para 0°C permitiu a obtenção de materiais com áreas entre 130 e 190 m²/g.

A 25°C, o aumento do tempo de oligomerização do triclorofenilsilano diminuiu as áreas superficiais das Magadiitas pilarizadas calcinadas a temperaturas de até 750°C. O efeito oposto foi observado nas preparações a 0°C. Nas duas temperaturas, a área superficial aumentou com a quantidade de oligômeros incorporados à Magadiita. Os resultados obtidos com Montmorilonita pilarizada não mostraram estas tendências.

CONCLUSÕES

Suspensões aquosas de Magadiita Ácida e Montmorilonita Natural foram tratadas a 0 e 25°C por 2 horas com soluções de oligômeros de triclorofenilsilano preparados a diversos tempos de reação nas mesmas temperaturas. Os resultados experimentais obtidos, após a calcinação dos produtos a temperaturas entre 450 e 900°C por 1,5 horas, permitem as seguintes conclusões:

- (a) O tratamento elevou a área superficial de Montmorilonita de 20 m²/g e a de Magadiita Ácida de 50 m²/g para valores de até 190 m²/g;
- (b) A pilarização de Magadiita Ácida permitiu obter materiais com estabilidade térmica a temperaturas de até 900°C;

(c) Montmorilonita pilarizada sofreu redução significativa da área superficial quando as temperaturas de tratamento excederam 600°C;

(d) As áreas superficiais dos produtos preparados a 0°C foram superiores àquelas dos preparados a cerca de 25°C.

AGRADECIMENTOS

Os autores expressam seus agradecimentos ao CNPq pelo suporte financeiro, à NALCO Produtos Químicos pela doação da sílica coloidal e à White Martins S.A. pelo suporte no fornecimento de gases especiais.

Queremos agradecer também à Prof^a Regina Helena Porto Francisco do Instituto de Química e Física da USP-São Carlos pelas análises de raios X, ao Prof. Dilson Cardoso do Departamento de Engenharia Química da UFScar pelas análises térmicas, à técnica Clarice Garcia do DEQ/UEM pela obtenção dos dados de adsorção de nitrogênio, ao ex-aluno de graduação Paulo Eduardo Gallati pela condução dos testes de pilarização de Montmorilonita, e ao Engenheiro Químico Valmir Calsavara pela preparação das figuras contidas neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRINDLEY, G.W. Unit cell of magadiite in air, in vacuo, and under other conditions. *Am. Mineral.*, 54:1583-1591, 1969.
- BURCH, R.(ed.). Pillared Clays. *Catalysis Today*, 2(2-3): 185-367, 1988.
- EUGSTER, H.P. Hydrous sodium silicates from Lake Magadi Kenya: precursors of Bedded Chert. *Science*, 157:1177-1180, 1967.
- GREGG, S.J. & SING, K.S.W. *Adsorption, surface area and porosity*. 2.ed. New York: Academic Press, 1982.
- LAGALY, G. Crystalline silicic acids and their interface reactions, adv. in colloid and interf. *Sci.*, 11:105-148, 1979.
- LAGALY, G., BENEKE, K. & WEISS, A. Magadiite and H-Magadiite: I. sodium magadiite and some of its derivatives. *Am. Mineral.*, 60:642-649, 1975a.
- LAGALY, G., BENEKE, K. & WEISS, A. Magadiite and H-magadiite: II. H-magadiite and its intercalation compounds. *Am. Mineral.*, 60: 650-658, 1975b.

- LEWIS, R.M., OTT, K.C. & VAN SANTEN, R.A. *Silica-Clay Complexes*. USA. Patent no. 4.510.257, 1985.
- SCHWIEGER, W., HEIDEMANN, D. & BERGK, K.H. High-resolution solid-state silicon-29 nuclear magnetic resonance spectroscopic studies of synthetic sodium silicate hydrates. *Rev. Chim. Miner.*, 22: 639-650, 1985.
- SPRUNG, R. & DAVIS, M.E. Pilarização de Ácidos Silícicos Lamelares. IN: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA QUIMICA, 8, 1988, São Paulo. *Anais...* São Paulo: ABEQ, 1988. v.1
- SPRUNG, R., DAVIS, M.E., KAUFFMAN, J.S. & DYBOWSKI, C. Pillaring of magadiite with silicate species. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 29: 213-220, 1990.
- VORONKOV, M.G. & LAVRENT'YEV, V.I. Polyhedral oligosilsesquioxanes and their homo derivatives. *Top. Curr. Chem.*, 102:199-236, 1982.

ON A FOURTH ORDER B.V.P. AT RESONANCE¹

To Fu Ma*

ABSTRACT. We study the existence of solutions of a fourth order resonant problem with a nonlinear perturbation that is bounded above (or below). Using variational methods we obtain an existence result in the case that a Landesmann-Lazer type condition is assumed.

Key words: Resonance, Landesmann-Lazer, Critical Point, Fourth Order Problem.

RESUMO. SOBRE UM PROBLEMA RESSONANTE DE QUARTA ORDEM. Neste trabalho estudamos a existência de soluções de um problema ressonante de quarta ordem com um termo não linear que é limitado superiormente ou inferiormente. Utilizando métodos variacionais, obtemos um resultado de existência no caso em que uma condição do tipo Landesmann-Lazer é admitida.

Palavras-chave: Ressonância, Landesmann-Lazer, Ponto Crítico, Problema de Quarta Ordem.

INTRODUCTION

In this note we study the existence of a solution $u=u(x)$ of the fourth order boundary value problem

$$u^{(iv)} - u = g(u) + h \quad (1.1)$$

$$u(0) = u(\pi) = 0 = u''(0) = u''(\pi). \quad (1.2)$$

Here $h \in L^1(0, \pi)$ and $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ is a continuous function such that $|g(u)| \leq c_1 |u|^p + c_2$ with $c_1, c_2 \geq 0$ and $1 \leq p < \infty$.

Fourth order boundary value problem has been extensively studied by many authors and are used to model deformations of an elastic beam.

¹ Lecture given at "Seminários de EDPs do Departamento de Matemática-UEM".

* Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 3690, Campus Universitário, 87020-900, Maringá-Paraná, Brasil. AMS: 34B15, 34B25.

For other studies on this subject, we refer the reader to e.g. Aftabizadeh (1986); Agarwal (1989); Gupta (1988); Weaver *et al.* (1990) and the references therein.

Our interest here is to show that if g is bounded above (or below), then with a Landesmann-Lazer type condition and a standard control on the growth of the potential G of g , problem (1.1)-(1.2) has at least one solution. Our main result is the following.

Theorem 1. Assume that there exists a constant m such that $\forall u \in \mathbf{R}$,

$$g(u) \leq m \quad \text{or} \quad g(u) \geq m. \quad (1.3)$$

Assume in addition that there exist the limits

$$\limsup_{u \rightarrow -\infty} g(u) = a < 0 < b = \liminf_{u \rightarrow +\infty} g(u) \quad (1.4)$$

and that

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{2G(u)}{u^2} < 15, \quad (\text{with } G(u) = \int_0^u g(t) dt) \quad (1.5)$$

Then (1.1)-(1.2) has at least one solution if $\int_0^\pi h(t) \sin x dx = 0$.

Remarks 1. Since $\lambda_1 = 1$ is the first eigenvalue of $u^{(iv)} = \lambda u$ with the boundary condition (1.2), and our hypotheses allow g to be bounded, (1.1)-(1.2) is in fact a resonance problem. ☺

We notice that some of the methods used to study second order boundary value problems can be applied to study (1.1)-(1.2). In fact, after suitable adaptations, we have in the classical paper of Landesmann & Lazer (1970), where (1.4) was used by the first time, the function g is supposed to be bounded. Later other papers like Iannacci & Nkashama (1987) and Rumbos (1991) considered g with a linear growth but both have assumed $\limsup_{|u| \rightarrow \infty} g(u)u^{-1} < 15$. On the other hand, in Sanchez (1990) was studied a true fourth order problem where g has a polynomial growth but with $\limsup_{|u| \rightarrow \infty} 2G(u)u^{-2} = 0$. Our result requires g to be bounded above or below, but our other conditions are less restrictive than in the above referred papers.

Example: Consider problem (1.1)-(1.2) with

$$g(u) = \begin{cases} (1+u)(1-u)^{-1} & \text{if } u \leq 0 \\ 1 + 16u \sin^2 u & \text{if } u > 0. \end{cases}$$

It is easy to see that g satisfies all the conditions of the theorem 1. In fact, we have

$$a = \limsup_{u \rightarrow -\infty} g(u) = -1 < 0 < 1 = \liminf_{u \rightarrow +\infty} g(u) = b$$

and

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{2G(u)}{u^2} = 8.$$

Moreover, since g is not bounded (but bounded below) and

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} = 16,$$

it does not satisfy the hypotheses of any above referred papers. ☺

The proof of theorem 1 is variational and uses the well-known Saddle Point Theorem of Rabinowitz. Next we make some preliminary remarks on the variational setting of (1.1)-(1.2).

PRELIMINARIES

Let $F: H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$ be the functional defined by

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (u''^2(x) - u^2(x)) dx - \int_0^\pi G(u(x)) dx - \int_0^\pi h(x) dx \quad (2.1)$$

where $G(u)$ is the primitive $\int_0^u g(t) dt$. It is well-known that F is of class C^1 in $E = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$, where for convenience, we use the equivalent norm $\|u\|^2 = \int_0^\pi u''^2(x) dx$. In fact we have $\forall \varphi \in E$,

$$F'(u) \varphi = \int_0^\pi (u'' \varphi'' - u \varphi) dx - \int_0^\pi g(u) \varphi dx - \int_0^\pi h \varphi dx. \quad (2.2)$$

Then, as a standard fact, $u \in E$ is a critical point of F if and only if it is a solution of (1.1)-(1.2) that belongs to $W^{4,1}(0, \pi)$. Besides, if h is continuous, we have in fact that $u \in C^4([0, \pi])$. We notice that $H^2(0, \pi)$, $H_0^1(0, \pi)$ and $W^{4,1}(0, \pi)$ stand for usual Sobolev spaces. We will show that F has a critical point in E by applying the following abstract result of Rabinowitz.

Saddle Point Theorem. Suppose $E = V \oplus W$ with V finite-dimensional. If $F: E \rightarrow \mathbf{R}$ satisfies:

(i) There is a bounded neighborhood D of 0 in V such that

$$\alpha = \sup_{\partial D} F < \inf_W F = \beta.$$

(ii) The Palais-Smale condition (PS) holds.

Then F has a critical point in E .

Remarks 2. (a) We say that F satisfies the Palais-Smale condition, (PS) for short, if any sequence $u_n \in E$ such that $F(u_n)$ is bounded and $\|F'(u_n)\|_* \rightarrow 0$ has a convergent subsequence.

(b) An obvious sufficient condition for (i) is: F is coercive in W and $-F$ is coercive in V . ☺

From the above considerations, let us decompose E as $V \oplus W$, where $V = \text{Span}\{\sin x\}$ and $W = V^\perp \cap E$, with the orthogonality in the L^2 -sense. So, if $u \in E$, we can write in a unique way $u = v + w$ with $v \in V$ and $w \in W$. With this decomposition we have, from (2.1) and the hypothesis that $\int_0^\pi h(x) \sin x dx = 0$,

$$F(v) = - \int_0^\pi G(v(x)) dx \quad \forall v \in V.$$

Moreover, from the variational characterization of the second eigenvalue of $u^{(iv)} = \lambda u$ with the boundary condition (1.2),

$$\int_0^\pi w''^2(x) dx \geq 16 \int_0^\pi w^2(x) dx \quad \forall w \in W. \quad (2.3)$$

Now we are in a position to prove a lemma that shows the effect of hypothesis (1.3). This lemma is the main tool for the verification of the Palais-Smale compactness condition for F .

Lemma 1. Assume (1.3) and suppose that $u_n = v_n + w_n$, with $v_n \in V$ and $w_n \in W$, is a sequence such that $F(u_n)$ is bounded and $\|F'(u_n)\|_* \rightarrow 0$. Then $\|w_n\|$ is bounded independently of $n \in \mathbb{N}$.

Proof. From (2.2) we have for all $\varphi \in E$

$$F'(u_n)\varphi = \int_0^\pi (u_n''\varphi'' - u_n\varphi)dx - \int_0^\pi g(u_n)\varphi dx - \int_0^\pi h\varphi dx = o(1)\|\varphi\|, \quad (2.4)$$

so that replacing φ by w_n and using (2.3), we get

$$\frac{15}{16}\|w_n\|^2 \leq \int_0^\pi g(u_n)w_n dx + \|h\|_{L^1}\|w_n\|_{L^\infty} + o(1)\|w_n\|.$$

Now assuming that $g(u) \leq m \quad \forall u \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\pi g(u_n)w_n dx = \int_0^\pi (m - g(u_n(x)))\sin x \frac{-w_n(x)}{\sin x} dx + \int_0^\pi m w_n dx. \quad (2.5)$$

On the other hand, since there is a continuous imbedding of E in $C^1([0, \pi]) \cap C_0([0, \pi])$, it is well-known that (see e.g. Mawhin, 1985)

$$\left| \frac{w_n(x)}{\sin x} \right| \leq \frac{\pi}{2} \|w_n\|_{C^1} \quad \text{for all } x \in [0, \pi]. \quad (2.6)$$

So from (2.5) we have, since $m - g(u_n(x)) \geq 0$ for all $x \in (0, \pi)$,

Erro! Objetos não podem ser criados editando-se códigos de campo..

Thus there are positive constants C_1 and C_2 such that

$$\frac{15}{16}\|w_n\| \leq -C_1 \int_0^\pi g(u_n(x))\sin x dx + C_2.$$

Now once $F'(u_n)\varphi \rightarrow 0$, we have by replacing φ by $\sin x$ in (2.4) that

$$\int_0^\pi g(u_n(x))\sin x dx \rightarrow 0.$$

This shows that $\|w_n\|$ is bounded independently of n . We note that if $g(u) \geq m$ is assumed, the same procedure works since in that case $g(u(x)) - m \geq 0$ for all $x \in (0, \pi)$. ☺

PROOF OF THEOREM 1

Proof of theorem 1. From Remark 2-(b), it is enough to show that:

- (a) $F(w) \rightarrow \infty$ as $\|w\| \rightarrow \infty$. (i.e. F is coercive in W)
- (b) $F(t \sin x) \rightarrow -\infty$ as $|t| \rightarrow \infty$. (i.e. $-F$ is coercive in V)
- (c) The (PS) condition.

To verify (a), we observe that from (1.5), there exist $\varepsilon, k > 0$ such that

$$G(u) \leq \frac{15-\varepsilon}{2} u^2 + k \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Then we have $\forall w \in W$

$$F(w) \geq \frac{1}{2} \|w\|^2 - \frac{1}{2} \|w\|_{L^2}^2 - \frac{15-\varepsilon}{2} \|w\|_{L^2}^2 - k\pi - \|h\|_{L^1} \|w\|_{L^\infty}.$$

Using (2.3) and the imbedding $E \subset L^\infty(0, \pi)$, there exists a constant $C > 0$ such that,

$$F(w) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{15-\varepsilon}{32} \right) \|w\|^2 - C \|w\| - k\pi.$$

Thus, $F(w) \rightarrow +\infty$ if $\|w\| \rightarrow \infty$.

As for (b), we begin by remarking that

$$G(t \sin x) = t \int_0^{\sin x} g(ts) ds.$$

So, suppose that $t \rightarrow +\infty$. Then using the right side of (1.4) and the Fatou's lemma,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{\sin x} g(ts) ds \geq \int_0^{\sin x} \liminf_{t \rightarrow +\infty} g(ts) ds = b \sin x > 0$$

and since

$$F(t \sin x) = - \int_0^\pi G(t \sin x) dx = -t \int_0^\pi \int_0^{\sin x} g(ts) ds dx,$$

we infer that $F(t \sin x) \rightarrow -\infty$ as $t \rightarrow +\infty$. If $t \rightarrow -\infty$ we use the left hand of (1.4) and also conclude that $F(t \sin x) \rightarrow -\infty$. Therefore (b) holds.

To verify the (PS) condition, suppose $u_n = t_n \sin x + w_n$, with $w_n \in W$, such that $F(u_n)$ is bounded and $\|F'(u_n)\|_* \rightarrow 0$. From the growth condition imposed to g , it is well-known that F satisfies the (PS) condition if u_n has a bounded subsequence (Rabinowitz 1986, appendix A). So, suppose that u_n is not bounded. Since lemma 1 implies that $\|w_n\|$ is uniformly bounded in E , (and therefore in $C^1([0, \pi])$), it follows that $|t_n| \rightarrow \infty$ for some subsequence, say u_n itself. Now suppose that $t_n \rightarrow +\infty$, the other case is made in a similar way, consequently $u_n(x) \rightarrow +\infty \quad \forall x \in (0, \pi)$. Then using the right side of (1.4) and the Fatou's lemma,

$$0 < \int_0^\pi b \sin x dx = \int_0^\pi \liminf_{n \rightarrow +\infty} g(u_n(x)) \sin x dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(u_n(x)) \sin x dx.$$

But once $\|F'(u_n)\|_* \rightarrow 0$, we also have $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(u_n(x)) \sin x dx = 0$.

So, from this contradiction, we conclude that $|t_n|$ must be bounded and therefore u_n has a bounded subsequence.

Thus, by the Saddle Point Theorem, (1.1)-(1.2) has a solution as a critical point of F . ☺

Remarks 3. The statement of theorem 1 remains true if we consider an x -dependent nonlinearity $g = g(x, u)$. The adaptations are standard. For example, we should replace (1.4) and (1.5) by the following:

(1.4)' There exist $a, b \in L^1(0, \pi)$ such that

$$a(x) = \limsup_{u \rightarrow -\infty} g(x, u) \quad \text{and} \quad b(x) = \liminf_{u \rightarrow +\infty} g(x, u)$$

uniformly in x with

$$\int_0^\pi a(x) \sin x dx < 0 < \int_0^\pi b(x) \sin x dx.$$

(1.5)' There exists $K \in L^\infty(0, \pi)$ such that

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{2G(x, u)}{u^2} = K(x) \leq 15$$

uniformly for $x \in (0, \pi)$ and with strict inequality holding in some subset of positive measure. ☺

REFERENCES

- AFTABIZADEH, A.R. Existence and uniqueness theorems for fourth order boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 116: 415-426, 1986.
- AGARWAL, R.P. On fourth order boundary value problems arising in beam analysis. *Diff. Int. Eq.*, 2: 91-110, 1989.
- GUPTA, C.P. Existence and uniqueness result for the bending of an elastic beam equation at resonance. *J. Math. Anal. Appl.*, 135: 208-225, 1988.
- IANNACCI, R. & NKASHAMA, M.N. Nonlinear boundary value problems at resonance. *Nonl. Anal. T. M. A.*, 11: 455-473, 1987.
- LANDESMANN, E.M. & LAZER, A.C. Nonlinear Perturbations of a linear elliptic boundary value problem at resonance. *J. Math. Mech.*, 19: 609-623, 1970.
- MAWHIN, J. *Points fixes, points critiques et problèmes aux limites*. Montréal: Le Presses de L'Université de Montréal, 1985.
- RABINOWITZ, P.H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS, Regional Conference Series in Mathematics, 65, Providence: AMS, 1986.
- RUMBOS, A.A. Semilinear elliptic boundary value problem at resonance where the nonlinearity may grow linearly. *Nonl. Anal. T. M. A.*, 16: 1159-1168, 1991.
- SANCHEZ, L. Boundary value problems for some fourth order ordinary differential equations. *Appl. Anal.*, 38: 161-177, 1990.
- WEAVER JR, W., TIMOSHENKO, S. & YOUNG, D.H. *Vibrations problems in engineering*. 5th. ed., New York: John Wiley and Sons, 1990.

Errata

Na página 341, onde consta:

Erro! Objetos não podem ser criados editando-se códigos de campo.

Leia-se:

$$\int_0^{\pi} g(u_n) w_n dx \leq \frac{\pi}{2} \|w_n\|_{C^1} \int_0^{\pi} (m - g(u_n(x))) \sin x dx + m \|w_n\|_{L^1}.$$

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE SECAGEM DE GRÃOS UTILIZANDO ENERGIA SOLAR EM PORTO ALEGRE E MARINGÁ

Jonas Teixeira Nery *

RESUMO. Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre secagem de grãos, através de energia solar em Porto Alegre e Maringá. Para tal comparação foram utilizados os dados de saída do modelo matemático de um coletor solar, que serviu como dado de entrada no modelo de Morey. O modelo para o coletor, que trabalha com aquecimento do ar até 10°C, foi construído pelo Grupo de Energia Solar, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. O modelo de Morey foi utilizado para construir as curvas de secagem de Porto Alegre e Maringá. É importante observar que este modelo requer uma equação característica para cada produto. Neste trabalho utilizou-se a equação com as propriedades do milho. Com os dados de Porto Alegre, trabalhou-se teórica e experimentalmente. O mesmo não foi possível no caso de Maringá, tendo em vista o fator econômico que impossibilitou a construção do sistema silo-coletor solar.

Palavras-chave: Secagem, Energia, Modelos, Milho.

ABSTRACT. COMPARATIVE STUDY OF GRAIN DRYING USING SOLAR ENERGY IN PORTO ALEGRE AND MARINGÁ. A comparative study of grain drying by means of solar energy in Porto Alegre and Maringá is shown in this paper. For this purpose, output data from a mathematical model of a solar collector served as input data for the Morey Model. The model of the collector was created by the Solar Energy Group of the Federal University of Rio Grande do Sul. It considers air heating up to 10°C. The Morey Model was used to calculate the curve of drying in Porto Alegre and Maringá. It is important to note that this model requires a specific equation for each grain. The properties of maize (corn) were chose for the equation considered in this paper. Data collected in Porto Alegre was used Theoretically and experimentally. It was not possible to develop the same experiment at the University of Maringá for economic reasons which prevented the construction of the silo solar collector system.

Key words: Drying, Model, Energy, Maize.

* Departamento de Física, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 3690, Campus Universitário, 87020-900 - Maringá-Paraná, Brasil.

INTRODUÇÃO

De acordo com os trabalhos realizados no PRONASSOL, Programa Nacional de Secagem de Produtos Agropecuários, Viçosa, verificou-se que o Brasil apresenta um potencial para utilização de secagem de grãos, em baixas temperaturas. Isto se deve às condições climáticas das regiões produtoras que possibilitam esse tipo de secagem. Na maioria dos casos, não se necessita de fonte suplementar de energia para aquecimento de ar e, quando é necessário, as quantidades são pequenas comparadas com os sistemas que empregam em altas temperaturas.

Como o Brasil apresenta, aproximadamente, cinco por cento de sua capacidade de armazenamento, localizado a nível de fazenda, e é consenso que esse índice precisa ser ampliado, a introdução de sistemas de secagem em baixas temperaturas é uma alternativa. Assim é, devido ao fato do custo inicial ser competitivo em relação a outras técnicas, uma vez que a secagem e o armazenamento é realizado no mesmo equipamento.

Para o projeto de sistemas de secagem em baixas temperaturas é necessário o conhecimento das vazões mínimas de ar, determinadas a partir de simulação de secagem, utilizando-se dados meteorológicos da região. A vazão mínima calculada, neste trabalho, utilizou a metodologia discutida no referido projeto, PRONASSOL (8).

A secagem a baixa temperatura, utilizando energia solar, por exemplo, é um processo relativamente lento, em comparação com outros métodos mais sofisticados de secagem, e requer habilidade técnica para ser executada. É o método de secagem artificial menos oneroso em nível de fazenda. A secagem é feita no próprio silo; onde, posteriormente, os grãos ficam armazenados. O silo é dotado de um fundo falso, Figura 1, construído em chapa metálica perfurada, colocada sobre um "plenum" (câmara de descompressão), através do qual o ar é insuflado na massa de grãos, por meio de um ventilador. A versatilidade do sistema reside no fato de que a velocidade de colheita pode ser ajustada à de secagem; isto faz com que a secagem a baixas temperaturas possa ser aplicada em diversos tamanhos de propriedades agrícolas.

Diante da constatação da importância deste tipo de secagem, buscou-se o desenvolvimento de um coletor solar, para pequenos e médios produtores, que não necessitasse de mão de obra especializada para sua construção. Tal coletor tem a finalidade de baixar o conteúdo de umidade do ar natural, antes de introduzi-lo no silo.

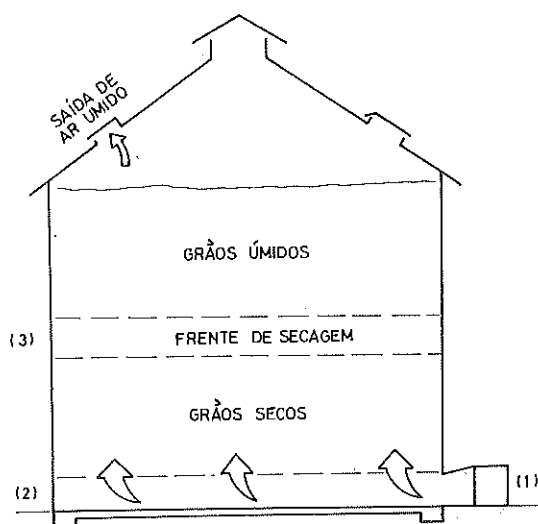


FIGURA 1: Representação esquemática do ventilador (1), do plenum (2), do parte armazenadora dos grãos, com sua frente de secagem (3). A parte inferior (Grãos Secos) é onde se encontra os grãos que receberão o ar mais seco (é onde ocorre a secagem mais rápida).

A partir daí, utilizou-se o modelo de Morey para a simulação da secagem do produto dentro do silo. Este modelo foi importante para avaliar, teoricamente, o tempo de secagem para as condições climáticas de Porto Alegre e de Maringá.

O objetivo deste trabalho é demonstrar que Maringá, por ser uma cidade com alta incidência solar, durante todo o ano, é um local onde a secagem, com energia solar, deve ser usada, por pequenos produtores, como um meio muito econômico de secagem e que o mesmo não ocorre em P. Alegre, devido ao seu inverno ser mais rigoroso e longo.

METODOLOGIA

A construção do coletor solar, pelo Grupo Energia Solar, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, foi realizado no Campus desta Universidade. Ao mesmo tempo foi desenvolvido um modelo matemático, utilizando o método de diferença finita (3). Os resultados a partir deste modelo foram utilizados como dados de entrada ao modelo de Morey.

Modelo Matemático de Simulação de Secagem

Um programa em FORTRAN, para microcomputador, foi implementado, com a finalidade de simular a secagem de milho a baixas temperaturas, com base no modelo proposto por Morey (4). Esse modelo inclui as seguintes equações:

a) Equação para o balanço de energia entre o ar e grão;

$$caT_o + W_o (Lw + cv - T_o) + cp R(1+U)\theta_o + (Wf - W_o)cv \theta_o = caT_f + Wf (Lw + cv - T_o) + cp R(1+U)\theta_f + \Delta L(Wf - W_o) \quad (1)$$

b) Equação para a entalpia específica do milho;

$$cp = 0,35 + 0,851 \frac{U}{1+U} \quad (2)$$

c) Equação para o balanço de massa entre o ar e o grão;

$$Wf - W_o = (U - Uf)R \quad (3)$$

d) Equação para a unidade relativa de equilíbrio no processo de adsorção;

$$\theta_d = 100\{1 - \exp\{-0.51807(T_f + 45.6)U_f^{1.72}\}\} \quad (4)$$

e) Equação para a unidade relativa de equilíbrio no processo de dessecção;

$$\theta_d = 100\{1 - \exp\{-0.6876(T_f + 45.6)U_f^2\}\} \quad (5)$$

f) Equação de secagem de milho em camada fina para temperaturas inferiores a 21° C, proposta por Sabbah (10);

$$RU = \frac{U - U_e}{U_0 - U_e} = \exp[-kt^{0.664}] \quad (6)$$

em que:

$$k = \exp(-x t^y)$$

$$x = [6.0142 + 1.453 \cdot 10^{-4} \theta^2]^{0.5} - [1.8T_0 + 32]\tau$$

$$\tau = [3.353 \cdot 10^4 + 3.0 \cdot 10^{-8} \theta^2]^{0.5}$$

$$y = 0.12264 - 1.641 \cdot 10^{-3} \theta + 14.14 \cdot 10^{-5} \theta T_0 - 1.044 \cdot 10^{-4} T_0$$

g) Equação de secagem de milho em camada fina para temperaturas superiores a 21° C, proposta por Misra e Brooker (9);

$$RU = \exp\{-f t^n\} \quad (7)$$

em que

$$k = -0.0821 + 1.37 \cdot 10^{-2} T_0 - 1.31 \cdot 10^{-4} T_0^2$$

$$n = 0.375 + 8.76 \cdot 10^{-2} \ln(\theta)$$

h) Equação utilizada para prever a porcentagem de perda de matéria seca do milho, com umidade de 25% de base úmida (bu), temperatura de 15,6° C e 30% de danos mecânicos;

$$PM = 0.0884[\exp(0.006 t) - 1] + 0.00102 t \quad (8)$$

Para condições diferentes das citadas acima, o tempo Δt é substituído por um tempo equivalente, $\Delta t_{eq} = \Delta t / (M_u - M_f)$, donde M_u é um multiplicador de umidade e M_f , um multiplicador de temperatura. M_f depende da temperatura final do milho (°C) e da umidade final, para uma base seca.

Secagem em Silo Cheio

Depois de validado o modelo, foi implementado em um micro computador para simular a secagem de milho, na região de Porto Alegre, em primeiro lugar, e na região de Maringá, posteriormente. Os dados obtidos foram: temperatura e umidade relativa média do ar. As simulações da secagem foram feitas para as seguintes condições:

Porto Alegre

- a) O produto obtido, já havia sofrido uma pré secagem e a umidade dos grãos era de 16,5%, aproximadamente;
- b) O período de secagem e armazenamento: 13-05 a 10-07-83;
- c) Aquecimento do ar de aproximadamente 10° C;
- d) Umidade média dos grãos, no silo, igual a 13,7%, após o período de secagem.

Maringá

- a) Não se trabalhou com a parte experimental. Consideraram as mesmas condições de Porto Alegre, mas tomando a umidade inicial do produto como 18% de umidade;
- b) O período de secagem e armazenamento: final de fevereiro até início de junho;
- c) Aquecimento do ar de aproximadamente 10°C;
- d) Umidade média dos grãos, no silo, 13%.

Os dados de temperatura e umidade relativa do ar ambiente foram coletados em abrigos meteorológicos. Em Porto Alegre, os dados foram cedidos pelo Distrito Meteorológico do Sul do Brasil. Em Maringá, os dados foram cedidos pela Estação Meteorológica da UEM.

Em Porto Alegre, as amostras de milho foram coletadas diariamente, em diversas alturas da massa de grãos, previamente estipuladas, utilizando uma sonda coletora. Também se mediu o fluxo de ar de secagem, na superfície da massa de grãos, utilizando-se anemôgrafos especialmente desenhados para esta finalidade.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os gráficos das Figuras 2a e 2b, mostram um conjunto de informações obtidas através do modelo de Morey, para secagem de milho a baixa temperatura. As secagens foram realizadas num período com alta

radiação solar. É importante observar, no entanto, que Maringá tem maior incidência de radiação solar que P. Alegre (por estar mais ao norte). Isto possibilitou obter um tempo de secagem mais curto, na cidade paranaense. Deve-se observar também que a variável meteorológica, umidade relativa, é outro parâmetro importante nesta análise, visto que P. Alegre é uma cidade com alto teor de umidade, o que é maléfico para este tipo de secagem.

O gráfico que mostra a secagem de milho em Maringá apresenta, no entanto, um problema de super secagem na camada inferior, Figura 2b. Isto se deve a utilização das mesmas informações, tais como, vazão mínima, em Maringá, àquelas utilizadas em Porto Alegre (3).

A secagem a baixas temperaturas é um processo lento, podendo demorar uma semana e, em determinados casos, até um mês. Essa lentidão é devida à pequena quantidade de ar que se utiliza por unidade de massa de grãos a ser secada, e pela dependência, que o sistema tem, da capacidade do ar em evaporar água, que é muito menor do que nos sistemas que empregam temperaturas elevadas. A capacidade do ar em evaporar a umidade do produto, também denominada de potencial de secagem, determina o teor de umidade final que os grãos atingirão ao final do processo (7). Uma região que apresente uma alta umidade relativa média, como P. Alegre, tem um baixo potencial de secagem. Assim necessita de uma fonte suplementar de energia, como energia solar, queima de combustíveis etc. A utilização dessa fonte de energia deve estar condicionada ao potencial de secagem da região e ao teor de umidade final desejado. Na maioria dos casos, o potencial de secagem do ar natural mais o aquecimento provocado pelo ventilador (mais ou menos 2°C), já é suficiente para obter o teor de umidade final desejado. O uso indevido desta fonte suplementar provoca super secagem, principalmente nas camadas inferiores, como em Maringá. Para evitar este tipo de problema e gastos de energia desnecessários, recalcularam os valores de vazão do ar que entra no silo, tendo em conta a temperatura média do ar e a umidade relativa média do ar, bem como o valor da umidade dos grãos. Assim se obteve o Gráfico 2c, com mais tempo para processar a secagem, mas praticamente sem a existência da super secagem.

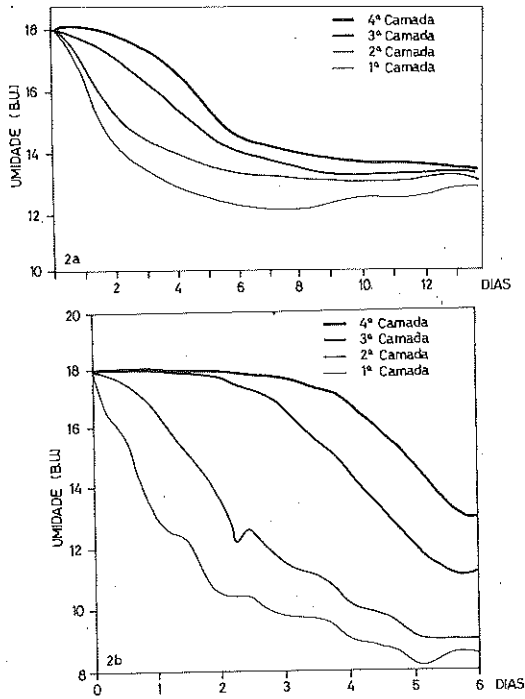


FIGURA 2a e 2b: Gráficos que representam as secagens em Porto Alegre (2a) e em Maringá (2b), utilizando energia solar. Cada curva representa uma camada do milho dentro do silo secador. Curvas obtidas através do modelo Morey.

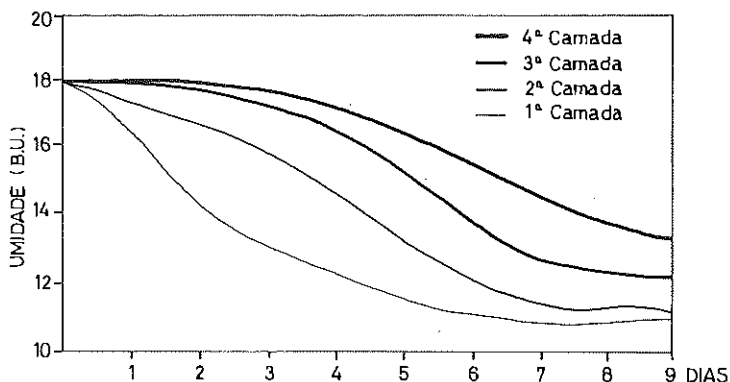


FIGURA 2c: Secagem realizada em Maringá, utilizando coletor solar. Cada curva representa uma camada do milho dentro do silo secador. Curvas obtidas através do modelo de Morey.

CONCLUSÃO

Pela alta umidade de Porto Alegre, com radiação muito baixa, principalmente no inverno, a secagem de grãos, utilizando energia solar não é o método adequado. Para outros períodos, é possível se secar com energia solar e inclusive armazenar o produto, sem qualquer dano.

Pode-se afirmar que Maringá é uma região muito boa para este tipo de secagem, não necessitando, inclusive, em alguns períodos do uso de qualquer fonte alternativa de energia. O ar natural mais o aquecimento, devido ao ventilador necessário para insuflar o ar que entra no silo já é suficiente para secar o produto.

O modelo proposto por Morey pode ser usado na simulação de secagem a baixas temperaturas, sendo importante, no entanto, um estudo prévio da vazão mínima necessária para este tipo de secagem.

SIMBOLOGIA

Ca = entalpia específica do ar $\text{kcal.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$

Cv = entalpia específica do vapor d'água, $\text{kcal.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$

Cp = entalpia específica do milho, $\text{kcal.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$

- C_w = entalpia específica do 'água, kcal.kg⁻¹.°C⁻¹
 k = constante
 L_w = entalpia de vaporização da água livre, kcal.kg⁻¹.°C⁻¹
 PM = perda de matéria seca kg.h⁻¹
 R = razão entre a matéria seca do produto de uma camada e a quantidade de ar seco que passa por uma unidade de tempo, kg de matéria por kg⁻¹ de ar seco.
 RU = razão de mistura, adimensional
 t = tempo, horas
 T_o = temperatura inicial do milho, °C
 T_f = temperatura final do milho, °C
 U = teor de umidade, base seca
 U_e = teor de umidade de equilíbrio
 U_o = teor de umidade inicial do milho, base seca
 U_f = teor de umidade final do milho, base seca
 x = constante
 y = constante
 W_o = razão de umidade inicial do ar, kg de vapor por kg⁻¹ de ar seco
 W_f = razão de umidade final do ar, kg de vapor por kg⁻¹ de ar seco
 θ_o = temperatura inicial do milho, °C
 θ_f = temperatura final do milho, °C
 Δt = intervalo de tempo, horas
 Δt_e = período de tempo equivalente, horas
 ϕ_a = umidade relativa de equilíbrio no processo de absorção, adimensional
 ϕ_d = umidade relativa de equilíbrio no processo de dessorção, adimensional
 ΔL = entalpia diferencial de vaporização da água do milho, Kcal.kg⁻¹
 ϕ = umidade relativa do ar, por cento

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAKKER - ARKEMA, F.W., BROOKER, D.B. & ROTH, M.G. Feasibility study of in - bin corn drying in Missouri. In: SOLAR GRAIN DRYING CONFERENCE, 1977, Illinois. *Proceedings...* Illinois: University of Illinois, 1977. p. 259-282.

- CORBELLA, D.O., KRENZINGER, A. *Estudo de comportamento técnico de um coletor solar para secagem de grãos em silos*. Porto Alegre: [s.n.], 1982. p. 318-334.
- CORBELLA, D.O. & NERY, J. Avaliação do desempenho de secadores usando energia solar e ar natural. *Revista Unimar*, 12 (1): 47-62, abr. 1990.
- MISRA, M.K. & BROOKER, D.B. *Thin layer drying and rewetting equations for shelled yellow corn*. St. Joseph: American Society of Agricultural Engineers, 1979. Tese (Mestrado) - American Society of Agricultural Engineers, 1979.
- MOREY, R.V.; CLOUD, H.A. & NELSON, W.W. Simulation of solar energy grain drying. St. Paul: University of Minnesota, Agricultural Energy Department, 1976. (Report for USA-URS-ERDA Contract nº 12 - 1403001-501).
- PIERCE, R.O. & THOMPSON, T.L. *Management of solar and low temperature grain drying systems - part. I: operation strategies with full bin*. ASAE, 23(5):1020-1023, 1980.
- PIERCE, R.O. & THOMPSON, T.L. *Management of solar and low temperature grain drying systems - part. II: Layer drying and solution of the over - drying problem*. ASAE, 23(5):1024-1030, 1980.
- PROGRAMA NACIONAL DE SECAGEM DE PRODUTOS AGROPECUÁRIOS. *Relatório final*. Vicosa, 1985. (Convênio FINEP, n.B.70.82.372.00.00).
- QUEIROZ, D.M. *Simulação de secagem de milho em secador de fluxos concorrentes*. Viçosa: Universidade Federal, 1984. Tese (Mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, 1984.
- SABBAH, M.A.; KEENER, H.M. & MEYER, G.E. *Simulation of solar grain dryer using the logarithmic mode.*, St. Joseph: ASAE, 1969. p. 637-643.

CONSULTORES DO VOLUME 15 DA REVISTA UNIMAR

O Conselho Editorial da Revista UNIMAR agradece aos pesquisadores abaixo relacionados por terem atuado como consultores dos artigos publicados no Volume 15, 1993:

ÁLVARO LORENCINI.....	UNESP - Assis - SP
ADEMIR PIOVEZAN.....	UFPR - Curitiba - PR
AFFONSO LUIZ FERREIRA.....	UFSCAR - São Carlos - SP
AIRTON SANTO TARARAN.....	USP - São Paulo - SP
ALBERTO SATURNO MADUREIRA	UEM - Maringá - PR
ALFREDO TADEU COUSIN	UEM - Maringá - PR
AMAURO APARECIDO DE B. OLIVEIRA	UEM - Maringá - PR
ANA MARIA DE O. BURMESTER	UFPR - Curitiba - PR
ANA MARIA S. PIRES VANIR.....	USP - São Paulo - SP
ANASTÁCIO AFFONSO JURAS	ELETRONORTE -Brasília-DF
ANGELO ANTONIO AGOSTINHO	UEM - Maringá - PR
ANNA EMILIA AMATO DE M. VAZZOLER	UEM - Maringá - PR
ANTIMIDORO ZANCO	UEM - Maringá - PR
ANTONIO MARIA GARCIA TOMMASELLI	UNESP - P. Prudente - SP
BENEDITO ANTUNES	UNESP - Assis - SP
CARLOS DAGILIAN.....	UNESP - S.J.Rio Preto-SP
CARMINO HAYASHI.....	UEM - Maringá - PR
CÉLIA LEITE SANT'ANNA	USP - São Paulo - SP
CIOMAR APARECIDA BERSANI AMADO .	UEM - Maringá - PR
CÍCERO LOPES FROTA.....	UEM - Maringá - PR
DARTAGNAN PINTO GUEDES.....	UEL - Londrina - PR
DILSON CARDOSO.....	UFSCAR - São Carlos - SP

EDIR NEPOMUCENO DA SILVA	UNICAMP - Campinas - SP
ELIZABETH DE FÁTIMA TORRES.....	UEM - Maringá - PR
ELZA TAEKO DOI	UNICAMP - São Paulo - SP
ERICA PELLEGRIN CARAMASCHI	UFRJ - Rio de Janeiro -RJ
ERIVELTO GOULART	UEM - Maringá - PR
EVOY ZANIBONI FILHO.....	CEMIG/EPDA-C. Alagoas-MG
FERNANDO VARELA DE CARVALHO.....	USP - São Paulo - SP
FOSCA PEDINE PEREIRA LEITE.....	UNICAMP - Campinas - SP
FRANCISCO MORAES PAZ.....	UFPR - Curitiba - PR
FUTIM BUFFARA ANTUNES	FAFI - Paranaguá - PR
GENNY GOMES DE OLIVEIRA	UEM - Maringá - PR
GERMANO PHONLOR.....	UFRG - Porto Alegre - RS
GISELLA MARIA ZANIN.....	UEM - Maringá - PR
GISELA YUKA SHIMÍZU.....	USP - São Paulo - SP
GO TANI	USP - São Paulo - SP
GUARACIABA APARECIDA TULLIO	UEM - Maringá - PR
HITOSCHI NOMURA	USP - São Paulo - SP
HUGO PEREIRA GODINHO	UFMG - Belo Horizonte-MG
IRENE ITALA TRIPPIA CECY.....	UFPR - Curitiba - PR
IZABEL DE FÁTIMA ANDRIAN	UEM - Maringá - PR
JEAN VINCENTE MARIE GUHUR.....	UEM - Maringá - PR
JOÃO LUIZ GASPARIM	UEM - Maringá - PR
JOSÉ AMÉRICO DE OLIVEIRA.....	UNESP - Araçatuba - SP
JOSÉ LUIZ AMES.....	UNIOSTE - Toledo - PR
JOSÉ UILSON PADILHA.....	UEM - Maringá - PR
JUNE FERRAZ DIAS	USP - São Paulo - SP
LAURA PATRÍCIA ZUNTINI IZARRA.....	OSEC - São Paulo - SP

LUCY SATIKO HASHIMOTO SOARES	USP - São Paulo - SP
LUIZ ANTONIO PEREIRA GOMES.....	UEM - Maringá - PR
LUIZ ANTONIO VIEIRA DE CARVALHO...	UFSCAR - São Carlos - SP
LURDES FORESTI DE ALMEIDA TOLEDO	USP - São Paulo - SP
MANUEL MILLA MIRANDA	UFRJ - Rio de Janeiro-RJ
MARCIA SALOMÃO MELIS.....	FAFI - Ribeirão Preto-SP
MARIA AMALIA BASILE MARTINS.....	IP/SAA - São Paulo - SP
MARIANGELA MENEZES.....	UFRJ - Rio de Janeiro-RJ
MARIA APARECIDA SOARES RUAS	UFSCAR - São Carlos - SP
MARILURDES ZANINI	UEM - Maringá - PR
MÁRIO KASURAGAWA.....	USP - São Paulo - SP
MÁRIO MASCHERPE	UNESP - Assis - SP
MARTIN SHMAL.....	UFRJ - Rio de Janeiro-RJ
MIGUEL CARLOS MADEIRA	UNESP - Araçatuba - SP
MIGUEL PETRERE JÚNIOR	UNESP - Rio Claro - RJ
MILTON DE AZEVEDO CAMPOS	UFPR - Curitiba - PR
NEHEMIAS CURVELO PEREIRA	UEM - Maringá - PR
NELSON MARTINS GARCIA	UEM - Maringá - PR
NEWTON CASTAGNOLLI.....	UNESP - Jaboticabal - SP
NEWTON FREIRE-MAIA.....	UFPR - Curitiba - PR
NORMA DULCE CAMPOS BARBOSA.....	CEMIG/EPDA-C.Alagoas-MG
NORMA SEGATTI HAHN	UEM - Maringá - PR
OSVALDO GERMANO DO ROCIO	UEM - Maringá - PR
PABLO CASTELO	UFRG - Porto Alegre - RS
PAULO DE TARSO DA CUNHA CHAVES...	UFPR - Curitiba - PR
ROBERTO BARBOSA BAZOTTE.....	UEM - Maringá - PR
ROSANE BEYER DO NASCIMENTO.....	UNIOEST - Cascavel - PR

SERGIO PACHECO	UFV - Viçosa - MG
VALTER AUGUSTO DELLA ROSA	UEM - Maringá - PR
VERA MARIA F. DE ALMEIDA VAL	INPA - Manaus - AM
WILSON MAURÍCIO TADINI	UNESP-S.J. Rio Preto-SP
YOKO WAKABARA.....	USP - São Paulo - SP
ZIOLE ZANOTTO MALHADA	UFPR - Curitiba - PR

Artigos de Revista

RHOADES, M.M. & DEMPSEY, E. On the mechanism of chromatin loss induced by B chromosome. *Genetics*, 71(1):73-96, 1970.

BOTELHO, C., BARBOSA, L.S.G., SILVA, M.D. & MEIRELLES, S.M.P. Fluxo migratório de casos de malária em Cuiabá/MT, 1986. *Rev. Inst. Med. Trop.*, 30(2):212-220, 1988.

Anais de Congresso

SANTOS, H.P. dos & LHAMBY, J.C.B. Competição de cultivares de beterraba açucareira e forrageira (*Beta vulgaris* L.) em 1983. In: REUNIÃO TÉCNICA ANUAL DA BETERRABA AÇUCAREIRA, 3. Pelotas, 1984. *Anais...* Pelotas:EMBRAPA-UEPAE, 1985. p.11-18

Artigos de Jornais

COUTINHO, W. O paço da cidade retorna ao seu brilho barroco. *Jornal do Brasil*, Rio de Janeiro, 6 mar. 1985. Caderno B, p.6.

MINISTÉRIO proíbe fabricação e uso de agrotóxico à base de organoclorados. *Folha de São Paulo*, São Paulo, 3 set. 1985. p.25.

