ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DIVISÃO NÃO ROTINEIROS

PROBLEM SOLVING STRATEGIES OF NON-ROUTINE DIVISION PROBLEMS

Jaqueline Magalhães Brum [1]
Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner [2]

Resumo

O presente texto traz análises de resoluções de dois problemas de divisão não rotineiros. A tarefa foi realizada em 2014 por um total de 51 estudantes do curso de Pedagogia da Universidade Federal do Espírito Santo. O foco deste estudo exploratório está na compreensão que os estudantes tiveram dos questionamentos propostos na tarefa e na análise de acertos e erros cometidos pelos futuros professores dos anos iniciais. As resoluções escritas dos estudantes sobre esses problemas foram coletadas, interpretadas e analisadas a luz dos autores que orientaram o estudo a respeito de divisão, resolução de problemas e análise de erros. Conclui-se com este estudo que os estudantes ainda têm dificuldades de interpretar e compreender contextos diferentes de divisão e nem têm clareza do significado do resto em uma divisão. Os futuros professores usam diversas estratégias para procurar resolver os itens propostos nos problemas e nem sempre reconhecem que as tarefas envolvem diretamente as ideias de divisão.
Palavras-chave: Resolução de problemas. Matemática. Divisão. Problema não rotineiro.

Abstract

The current text brings analysis from solutions of two non-routine division problems. The task was done in 2014 by a total of 51 undergraduate students from the Pedagogy course from Universidade Federal do Espírito Santo (UFES). The focus of this exploratory study is on the comprehension that undergraduate students had from the requests posed on the task and in the analysis from correct solutions and errors made by future teachers from early school grades. The students' written solutions from these problems were collected, interpreted and analysed according to the authors who guided the study about division, problem solving and error analysis. With this study it has been concluded that the undergraduate students still have difficulty to interpret and comprehend different division contexts and neither have clarity of the meaning of the rest in a division. The future teachers use diverse strategies in order to search solving the proposed items in the problems and not always recognize that the tasks involved directly the ideas of division.
Keywords: Problem solving. Mathematics. Division. Non-routine problems.

INTRODUÇÃO

> O reconhecimento de que a resolução de problemas é afinal o motor do desenvolvimento da Matemática e da atividade matemática, e a perspectiva de que um papel de relevo deve ser-lhe destinado na aprendizagem, não são ideias novas (ABRANTES, 1989, p. 7).

Lembramos com carinho da fala da professora Lourdes de La Rosa Onuchic, no III Seminário de Resolução de Problemas (III SERP), realizado em setembro de 2014, na Universidade Estadual de São Paulo (UNESP) de Rio Claro, quando disse que, segundo a língua portuguesa, não é correto mencionar "através de", mas sim "por meio de" já que o "através de" traz a ideia de atravessar. Mas é exatamente esse efeito dúbio que a língua portuguesa proporciona que seu grupo de pesquisa em resolução de problemas assume. Ou seja, seguindo a história e evolução a respeito das diferentes abordagens para se trabalhar a resolução de problemas: "sobre", "para" e "através" (SCHROEDER; LESTER, 1989; SANTOS, 1993, SANTOS-WAGNER, 2008), o grupo de Rio Claro assume o atravessar em toda sua complexidade e extensão,

[1] Professora adjunta do Departamento de Teorias do Ensino e Práticas Educacionais, da Universidade Federal do Espírito Santo (DTEPE/CE/UFES). jackie_magalhaes@hotmail.com
[2] Professora aposentada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM/UFRJ) e professora colaboradora do Programa de Pós-Graduação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo (PPGE/CE/UFES). profvaniasantoswagner@gmail.com.

significando ensino, aprendizagem e avaliação, trabalhando conteúdos matemáticos através da resolução de problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, 2008, 2014).

No livro "Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática: métodos alternativos", Santos (1997) já destacava a necessidade de os professores reconhecerem que os processos de ensinar, aprender e avaliar matemática estão intrinsicamente relacionados e cada processo influencia o outro direta e indiretamente. Este trabalho foi desenvolvido no Rio de Janeiro pelo Projeto Fundão, setor matemática, de 1993 a 1997. Vários professores e futuros professores de matemática desenvolveram e testaram as atividades propostas nesse livro em muitas salas de aula durante esse período. O livro foi uma culminância dos aprendizados e do trabalho de doutorado de Santos (1993), desenvolvido sob a orientação de Frank Lester, um dos líderes na pesquisa internacional em resolução de problemas.

Brum (2010), em sua pesquisa de doutorado, procurou retratar como outras opções de ensinar, aprender e avaliar matemática, presentes nas práticas cotidianas, podem potencializar o conhecimento matemático. A autora ressalta que muitas vezes outras formas de ensinar, aprender e avaliar são ignoradas no ambiente escolar. Ela destaca que isso ocorre pelo modo desarticulado que a ciência (formas) e a política (forças) trabalham o conhecimento matemático. Brum (2010) acredita que formas alternativas de ensinar, aprender e avaliar matemática podem contribuir para que esse conhecimento seja trabalhado na escola a favor de uma outra ética e estética de produção da vida social.

As autoras deste estudo exploratório participam do Grupo de Estudos em Educação Matemática do Espírito Santo (GEEM-ES). O grupo é formado por professores da Educação Básica, por alunos de graduação e pós-graduação e por pesquisadores de Educação Matemática. No GEEM-ES, professores de educação infantil, ensino fundamental, ensino médio, ensino superior e estudantes de graduação e pós-graduação estudam e trabalham colaborativamente. No grupo, estuda-se e discute-se primordialmente matemática, educação matemática e educação. Dentre os objetivos do grupo, destacam-se: a) estudar em profundidade conceitos matemáticos, temas de educação matemática e temas educacionais; b) aprender a observar e investigar a própria prática docente; c) compartilhar situações didáticas que permitam analisar e refletir a respeito da complexidade dos processos de ensinar, aprender e avaliar matemática; d) aprender a planejar, implementar, observar, registrar, analisar e redigir relatos de experiência em sala de aula e experimentos de ensino; e) compartilhar sucessos, anseios e dificuldades envolvidos nos processos de ensinar, aprender e avaliar matemática em uma perspectiva de educação inclusiva de qualidade; e f) aprender a atuar como amigo crítico e a planejar colaborativamente ideias matemáticas que serão experimentadas em sala de aula e redigidas posteriormente em pequenos grupos.

Os integrantes do grupo têm estudado e trocado ideias a respeito de divisão desde o segundo semestre de 2012. Em 2014, decidiram investigar em detalhes como alunos de diferentes níveis escolares resolviam e interpretavam problemas não rotineiros de divisão. Inicialmente, combinou-se que os professores participantes dos anos iniciais aplicariam alguns problemas em suas turmas e fariam registros desses momentos. Combinou-se também que, posteriormente, seriam discutidos os problemas e as resoluções dos alunos nos encontros semanais do GEEM-ES, em pequenos grupos.

As autoras deste texto decidiram focalizar alguns dos problemas de divisão comentados no grupo, considerados interessantes e não rotineiros. Assim, uma das autoras aplicou dois desses problemas em duas turmas nas quais atuava do curso de Pedagogia na Universidade Federal do Espírito Santo. Ela tomou essa iniciativa, pois também queria investigar como esses futuros professores dos anos iniciais compreendiam esses problemas de divisão não rotineiros, que conceitos matemáticos utilizavam e como resolviam esses problemas. Ao comentar a respeito desse experimento de ensino no grupo de estudos, as autoras também constataram a importância de pesquisar se os procedimentos de resolução, acertos e erros dos futuros professores foram similares aos dos alunos dos anos iniciais.

Além disso, as autoras pensaram em aproveitar as potencialidades que o retorno dessas discussões envolvendo alunos do ensino básico e estudantes do ensino superior poderiam provocar nos integrantes do GEEM-ES. Acreditamos que provocar essa discussão e reflexão a respeito de estratégias de resolução, acertos e erros poderia instigar e estimular os professores participantes do grupo para que promovessem outras formas de fazer e ser na sala de aula (BRUM, 2010), bem como poderia levar todos os integrantes do grupo a refletirem conscientemente a respeito de seus conhecimentos matemáticos e pedagógico-matemáticos em relação aos processos de ensinar, aprender e avaliar divisão (SANTOS, 1993, 1997).

EXPLORANDO CONCEITOS MATEMÁTICOS COM PROFESSORES EM FORMAÇÃO INICIAL

A partir das experiências das autoras, como professoras e formadoras de professores que ensinam matemática por algumas décadas, elas constataram, como outros pesquisadores, que professores dos anos iniciais precisam rever suas experiências anteriores com matemática, como alunos, bem como suas ideias matemáticas a respeito das quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão, ao pensarem em ensinar esse conteúdo (FUSON, 1992; GREER, 1992; SANTOS, 1993, 1997; SANTOS;REZENDE, 1996; SANTOS-WAGNER, 2008). Ao planejarem tarefas matemáticas que despertem a curiosidade e interesse dos alunos por esses conceitos, os professores devem pensar em como explorá-las de forma integrada. Desse modo, os professores introduzem essas operações com materiais concretos e/ou manipuláveis em poucas aulas e passam imediatamente para o algoritmo, porém os alunos tendem a ter dificuldades e ficam sem relacionar os conceitos matemáticos entre si. Além disso, essas operações devem e precisam ser trabalhadas concomitantemente, pois adição e subtração, multiplicação e divisão são operações inversas e envolvem raciocínios matemáticos reversos (CARAÇA, 1951; FUSON, 1992; GREER, 1992; SANTOS; REZENDE, 1996).

No caso de adicionar e subtrair, os alunos precisam experimentar situações variadas de agrupar e desagrupar, completar, complementar e comparar, ao invés de trabalhar essas operações linearmente e de forma separada. No caso de multiplicar e dividir, os alunos também precisam compreender que essas operações devem ser trabalhadas de forma integrada. Eles devem explorar e experimentar diversas situações que envolvam agrupamentos repetidos, agrupamentos proporcionais, repartição em partes iguais (ou repartir em cotas iguais), retirar partes de mesma medida (ou subtrair partes ou cotas de mesma medida) e calcular possibilidades de combinação. Outro ponto a destacar é que as ideias de número e das quatro operações também devem ser exploradas desde o início, usando a reta numérica ou reta numerada (SANTOS, 1993, 1997; SANTOS; REZENDE, 1996).

Autores como Caraça (1951), Santos (1993, 1997), Santos e Rezende (1996) e outros sempre recomendaram que as ideias de número e as quatro operações fossem construídas pensando em quantidade e medida. Vale lembrar que o trabalho excessivo que vem sendo realizado em sala de aula e muitas vezes aparecendo nos livros didáticos com a ideia de número associado apenas a quantidades discretas não favorece que o aluno adquira um entendimento relacional de número e das quatro operações. Como Skemp (1976) enfatiza, de que adianta termos em aulas alunos que saibam resolver tarefas matemáticas apenas de forma instrumental, procedimental e fiquem sem ter um entendimento relacional dos conceitos e significados associados.

Portanto, é importante que os professores identifiquem acertos e erros de seus alunos e procurem compreender as razões e motivos de alguns erros que ocorrem em tarefas matemáticas. Por outro lado, professor e aluno precisam identificar e analisar de forma consciente os erros que ocorrem em cálculos operatórios, resolução de problemas e outras tarefas matemáticas. Apenas quando o erro se torna observável por professor e alunos é que temos a possibilidade de gerar conflitos cognitivos que desestabilizem as verdades que os alunos/professores incorporaram em suas mentes (CURY, 2008; PINTO, 2000; SANTOS, 1993, 1997).

MAS O QUE SÃO PROBLEMAS NÃO ROTINEIROS?

Entendemos por problemas não rotineiros aqueles que não são apenas exercícios de aplicação de algum algoritmo para a fixação de conteúdos, mas são problemas que permitem aos alunos desenvolverem suas próprias soluções. O estudante pode utilizar mais de um algoritmo na resolução de um problema não rotineiro, e esses problemas possibilitam ao estudante estabelecer relação com outros conteúdos. Para Santos (1997, p. 15-16) são etapas que envolvem a resolução de problemas rotineiros e não rotineiros:

> [...] compreender a situação através de leitura, interpretação, dramatização, etc; não ter solução pronta de início, nem uma fórmula pronta para ser usada; querer resolver a situação proposta; identificar o que precisa ser resolvido (ou solucionado) e que informações utilizar (ou que informações são relevantes); planejar e tentar através de uma ou mais ações encontrar a solução; verificar durante todo o processo se de fato está resolvendo a situação-problema; interpretar os resultados e checar a razoabilidade dos mesmos [...]; efetuar sempre questionamentos que ajudem a compreender a situação-problema como um todo e que monitorem os raciocínios e a solução encontrada.

Buscando que os alunos desenvolvessem tais habilidades, os problemas propostos escolhidos pela professora-pesquisadora foram os seguintes:

> **Problema 1:** Uma pista de corrida circular tem 420 metros de extensão. Um corredor já percorreu 1.390 metros. a) Quantas voltas completas ele já deu? b) A quantos metros da posição de partida ele se encontra? c) Quantos metros faltam para completar mais uma volta?
>
> **Problema 2:** Vic tem 325 clips coloridos para fazer brinquinhos. Ela quer distribuir entre ela e suas amigas: Kamily, Débora e Jéssica. a) Quantos clips caberá a cada uma? Sobrarão clips? b) Se forem necessários 12 clips para um par de brincos, quantos pares poderão fazer com a quantidade que cada uma receber?

Os problemas não rotineiros propostos traziam as duas ideias de divisão. No primeiro, abordava-se a ideia de divisão como medida e, no segundo, o problema iniciava-se com questionamentos envolvendo a ideia de divisão como partição e depois também como medida. Segundo Toledo e Toledo (2010), a divisão traz no seu bojo duas ideias: partição (repartir igualmente) e medição (de quantos cabe?). As autoras deste artigo apontam que a primeira ideia de divisão é a mais comum de ser encontrada em livros didáticos. Ademais, essa é a ideia mais trabalhada por professores nos anos iniciais do ensino fundamental. Entretanto, as duas ideias devem e precisam ser exploradas e trabalhadas desde os anos iniciais para que os alunos possam compreender o conceito de divisão de forma mais abrangente. E precisam estar articuladas com as ideias de multiplicação, como comentamos antes neste texto.

Inicialmente, o objetivo das autoras deste trabalho era compreender que conhecimentos e entendimentos a respeito de problemas de divisão com resto os estudantes de pedagogia possuíam. Posteriormente, esse objetivo foi transformado nos seguintes objetivos específicos:

a) diagnosticar o nível de compreensão dos problemas pelos alunos;
b) elencar os principais tipos de soluções apresentadas;
c) entender qual a compreensão dos alunos sobre o que é uma divisão com resto;
d) analisar as estratégias que usaram para resolver os questionamentos colocados na situação-problema, bem como os procedimentos corretos e errados encontrados nas resoluções apresentadas.

Para alcançar esses objetivos e conduzir nosso estudo exploratório, focalizamos, em alguns trabalhos a respeito de análise de erros, resolução de problemas e divisão. Baseamo-nos nos estudos a respeito de análise de erros de Cury (2008) e Pinto (2000). Sobre resolução de problemas, fundamentamo-nos em Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2004, 2008, 2014), Onuchic, Allevato, Noguti e Justulin (2014), Polya (1945/1995), Santos (1993, 1997), Santos e Rezende (1996) e Santos-Wagner (2008). Os trabalhos de Greer (1992), Santos e Rezende (1996), Senna (2014), Toledo e Toledo (2010) nos nortearam em relação à divisão.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Realizamos um estudo exploratório de natureza qualitativa (FIORENTINI; LORENZATO, 2007), no entanto fizemos também levantamentos quantitativos dos acertos e erros dos estudantes, para compreendermos o que aconteceu nessa intervenção pedagógica e para conseguirmos dialogar posteriormente com os estudantes. A tarefa foi executada por um total de 51 estudantes dos 77 matriculados nas duas turmas. No turno matutino, dos 42 alunos matriculados, 29 estavam presentes e fizeram a tarefa. No noturno, dos 35 matriculados, 22 resolveram os dois problemas.

Os estudantes tiveram alguns minutos para resolver os dois problemas. Nenhuma informação foi passada aos alunos em termos de como resolver uma conta de divisão. Supúnhamos que estudantes universitários tivessem conhecimento de como resolver uma situação-problema de divisão trabalhada nos anos iniciais. Acreditávamos que esses estudantes conseguiriam identificar as ideias de divisão e que soubessem efetuar divisões em uma situação-problema, nem que fosse de forma instrumental, como comenta Skemp (1976, 1987/2009). Esse autor nos chama a atenção para o fato de que muitos alunos pensam que aprendem matemática, porque acertam tarefas semelhantes às de livros didáticos e aos exemplos de professores. Mas, de fato, esses alunos apenas aprenderam e entenderam matemática de forma procedimental (ou instrumental), pois usam alguns conceitos matemáticos ao memorizarem os procedimentos de resolução associados com esses conceitos e os exemplos resolvidos com o conceito matemático em foco. No entanto, esses alunos nem sempre compreendem de fato os conceitos e as relações entre conceitos matemáticos.

A partir de agora, vamos chamar a turma do diurno de “Dia” e a turma do noturno de “Noite”, bem como os alunos presentes na turma “Dia” de: D1, D2... D29; e os alunos presentes na turma “Noite” de: N1, N2... N22. Cabe ressaltar que utilizamos o critério alfabético para nomear os alunos para não nos perdermos e conseguirmos identificar o caminho seguido por eles. Também fizemos isso para manter em sigilo os nomes dos estudantes e por uma questão de ética de pesquisa.

Retomamos aqui os dois problemas e resolvemos separar a segunda pergunta do problema 2, que induzia a duas respostas, reformulando-o.

> **Problema 1:** Uma pista de corrida circular tem 420 metros de extensão. Um corredor já percorreu 1.390 metros. a) Quantas voltas completas ele já deu? b) A quantos metros da posição de partida ele se encontra? c) Quantos metros faltam para completar mais uma volta?
>
> **Problema 2:** Vic tem 325 clips coloridos para fazer brinquinhos. Ela quer distribuir entre ela e suas amigas: Kamily, Débora e Jéssica. a) Quantos clips caberá a cada uma? b) Sobrarão clips? c) Se forem necessários 12 clips para um par de brincos, quantos pares poderão fazer com a quantidade que cada uma receber?

DADOS E ANÁLISES

Para ajudar nossas análises, organizamos os dados em quatro tabelas. Procuramos também fazer uma comparação entre acertos e erros nos dois problemas em uma mesma turma. Queríamos identificar se os alunos leram e compreenderam os dois problemas de divisão e como resolveram as questões. Também desejávamos verificar se notavam que o problema 2 envolvia a ideia de divisão como repartição em partes iguais para responder aos dois itens iniciais e também a ideia de divisão como medida para responder ao terceiro item. Pensávamos que todos os estudantes acertariam o primeiro item do problema 2. Desconfiávamos que o problema 1, envolvendo a ideia de divisão como medida, fosse mais complicado para os estudantes, pois a maioria deles parece estar mais familiarizada com a ideia de divisão como partição. Assim sendo, esperávamos que os alunos tivessem mais dificuldades em resolver os itens do problema 1 e em responder ao terceiro item do problema 2.

Ao tentarmos categorizar os dados, deparamo-nos com questionamentos que nem tínhamos antecipado e observamos como nem tudo pode ser explicado pela lógica. Em nossa tabulação inicial, percebemos dois fatos curiosos: Como um cálculo certo pode gerar uma resposta errada? E como um cálculo errado pode gerar uma resposta certa? Seria uma questão só de interpretação inapropriada dos estudantes dos enunciados dos problemas e de seus questionamentos nos diferentes itens? Seria um uso inadequado de uma operação para o contexto da situação-problema? Ou seria cálculo indevido? Como compreender como cada estudante pensou ao resolver os problemas, se tínhamos apenas cópias digitalizadas de suas soluções e nem conversamos individualmente com cada um deles depois de resolverem os problemas? Afinal, nesta etapa de interpretação e análise de dados, constatamos a complexidade envolvida nesse processo de avaliação. Notávamos complexidade tanto em termos de estabelecer critérios de correção quanto de procurar formas de compreender como nosso aluno pensa ao resolver problemas. Percebemos, enfim, quantas etapas complexas envolvem um procedimento criterioso para organizar, categorizar, apreciar, compreender e julgar os procedimentos de resolução dos estudantes nesses seis itens dos dois problemas não rotineiros.

Constatamos, então, que outras questões estavam envolvidas nas respostas dos alunos e que aparentemente fugiam a uma categorização linear. Ao percebermos que não conseguiríamos abarcar todas as possibilidades, uma vez que outros fatos escapavam à nossa tentativa de categorizar, mantivemos as quatro tabelas, mas pontuamos que outros olhares podem incidir sobre os dados e gerar muitas outras perguntas e outros critérios de análise.

Para facilitar os procedimentos de análise, a professora-pesquisadora que aplicou as questões categorizou e organizou os dados procurando relacionar as soluções apresentadas com as quatro principais etapas de Polya (1945/1995) sobre resolução de problema. Após discussão e consenso entre as autoras, assim se caracterizaram nas quatro etapas abaixo as possibilidades de categorização das evidências de interpretação do problema, uso de estratégias, cálculo realizado e respostas apresentadas pelos estudantes:

a) Etapa 1: “Compreender o problema” verificando se o aluno interpretou corretamente ou de forma equivocada:
IC – interpretação correta;
IE – interpretação errada.

b) Etapa 2: “Elaborar o plano” observando se o aluno utilizou estratégias que permitiam realizar um cálculo certo ou errado:
EC – estratégia correta;
EE – estratégia errada;
OE – outras estratégias, certas ou erradas.

c) Etapa 3: “Executar o plano” considerando se foi efetuado o cálculo de forma correta ou errada:
CC – cálculo correto;
CE – cálculo errado.

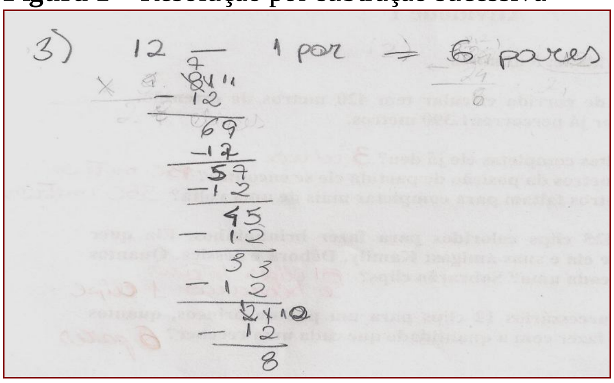
d) Etapa 4: “Verificação do plano”: aqui não pudemos considerar que houve realmente o retrospecto, uma vez que não foi possível retornar com os estudantes e questionar se eles fizeram a verificação, porém foi observado:
RC – resposta correta;
RE – resposta errada.

Ao analisar os dados em detalhes, percebemos que os problemas não rotineiros de divisão apresentavam maior complexidade de interpretação e resolução para os estudantes do que imaginávamos de início. Ao revermos as respostas e lembrarmos que, inicialmente, esses dois problemas foram discutidos nos encontros do GEEM-ES para serem trabalhados nos anos iniciais, ficamos mais perplexas ainda. Refletir a respeito das ideias do conceito de divisão e acerca dos problemas selecionados nos mostrou duas prioridades que nem sempre levamos em conta: a primeira é admitir que professores e professores-pesquisadores devem pensar e antecipar formas alternativas de resolver tarefas pelos alunos; a segunda envolve a necessidade de professores e professores-pesquisadores pensar em outras estratégias de resolução para alguns problemas.

Neste nosso estudo exploratório, deparamo-nos com estratégias diferentes de resolução nessa tarefa. Por exemplo, na Figura 1, a seguir, mostramos como um estudante resolveu o último item do problema 2. Esse aluno procurou descobrir quantos pares poderia fazer com o total de clips recebido por uma das amigas, efetuando subtrações sucessivas, retirando sempre 12, que é a quantidade necessária para compor um par de brincos.

Será que esse futuro professor nem reparou que poderia ter efetuado uma divisão para descobrir quantos pares de brinco poderia formar ou achou mais simples ir efetuando as subtrações sucessivas? Como analisamos posteriormente esses dados, ficamos sem perguntar isso ao estudante. Assim, observamos como é importante efetuar imediatamente esses procedimentos detalhados de análise para podermos interagir com os estudantes e obter mais informações sobre o que pensaram ao resolver uma determinada tarefa.

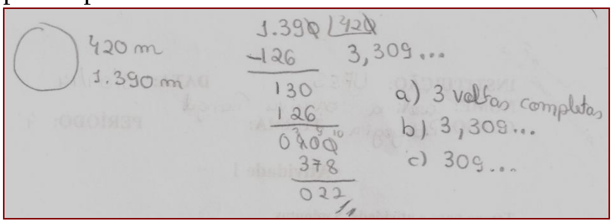
Figura 1 – Resolução por subtração sucessiva



Fonte: Arquivo pessoal.

Retomando a primeira pergunta do problema 1: “Uma pista de corrida circular tem 420 metros de extensão. Um corredor já percorreu 1.390 metros. a) Quantas voltas completas ele já deu?”, a situação-problema apresentada trabalha com uma grandeza contínua que envolve a ideia de dividir com a ideia de quantos cabe. Ou seja, quantos 420 metros cabem em 1.390 metros já percorridos ou quantas vezes 420 metros cabem em 1.390 metros? Porém, para respondermos ao primeiro questionamento desse problema, estamos interessadas somente no resultado da divisão, ou seja, estamos interessadas em descobrir o quociente. Dessa forma, quem respondeu corretamente três voltas, mas continuou dividindo, evidenciou para nós que ficou sem entender o contexto do problema e sem saber o que devia fazer. Na Figura 2, temos os procedimentos de natureza instrumental de um estudante que efetuou exatamente isso. Ele continuou dividindo, colocando vírgula e seguindo as etapas que interiorizou instrumentalmente acerca do algoritmo de divisão independente do contexto do problema (SKEMP, 1976).

Figura 2 – Resolução de natureza instrumental para o problema 1

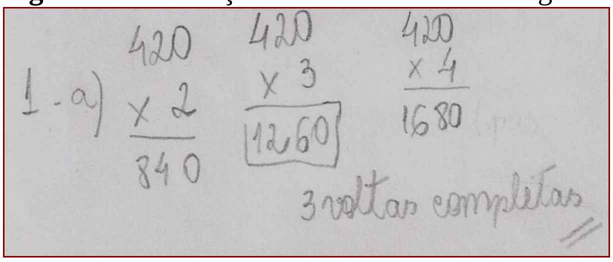


Fonte: Arquivo pessoal.

Parece-nos que alguns estudantes simplesmente efetuam os cálculos de divisão de forma mecânica e sem demonstrar que compreendem qual é o contexto do problema e o que foi questionado. Esse procedimento está de acordo com os questionamentos de Skemp (1976, 1987/2009) a respeito da compreensão instrumental e relacional de alunos, pois parece que esses futuros professores resolveram as duas tarefas matemáticas de forma instrumental, mecânica, sem evidenciar que compreenderam de fato os conceitos matemáticos envolvidos naquele problema. Os estudantes que seguiram efetuando os cálculos nessa divisão também parecem nem ter lido e interpretado corretamente o enunciado do problema, e essa é a etapa inicial e crucial para um resolvedor de problemas (POLYA, 1945/1995; SANTOS, 1993, 1997; SCHROEDER; LESTER, 1989).

Já na Figura 3, temos outro estudante que resolveu esse item do problema 1 usando estratégia de tentativa e erro. Ele foi efetuando multiplicações para verificar se o corredor já tinha percorrido o caminho com três voltas completas ou com quatro voltas. Portanto, esse futuro professor resolveu o problema raciocinando com a multiplicação, que é a operação inversa da divisão e que também permite que ele solucione o problema dado. No entanto, cabe ressaltar que, apesar de considerarmos sua solução correta, ficamos sem saber se os alunos que resolveram os cálculos por aproximação têm uma compreensão dos conceitos envolvidos em uma operação de divisão. Nada nos garante como esses futuros professores interpretam e compreendem problemas de divisão.

Figura 3 – Resolução utilizando outra estratégia

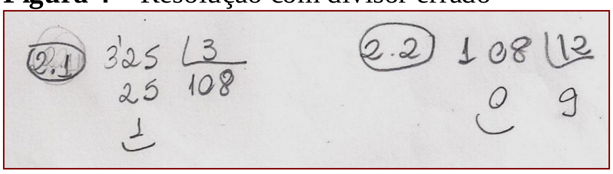


Fonte: Arquivo pessoal.

Em relação ao problema 2: “Vic tem 325 clips coloridos para fazer brinquinhos. Ela quer distribuir entre ela e suas amigas: Kamily, Débora e Jéssica. a) Quantos clips caberá a cada uma?”, identificamos dois erros de interpretação que poderiam gerar critérios diferentes de análise.

O primeiro erro é o aluno, ao interpretar o enunciado do problema, **não** considerar a quantidade de meninas corretamente (4 amigas), mas resolver o problema de forma correta ao pensar em dividir entre três pessoas, o que deixa claro que o aluno sabe resolver o cálculo de divisão correspondente a essa outra situação-problema. Trazemos esse exemplo na Figura 4.

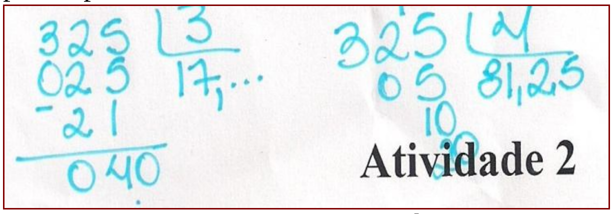
Figura 4 – Resolução com divisor errado



Fonte: Arquivo pessoal.

O segundo erro corresponde ao fato de que estamos trabalhando com uma grandeza discreta, “clips” e para atender à pergunta “[...] Sobrarão clips?”. Estamos interessadas no resto, portanto o aluno não poderia ter continuado o processo de divisão. Temos o exemplo da resolução desse problema por um estudante (Figura 5):

Figura 5 – Resolução de natureza instrumental para o problema 2



Fonte: Arquivo pessoal.

No entanto, há uma diferença entre as duas situações exemplificadas com erros que nos parece importante comentar. Na primeira situação, o futuro professor evidenciou que cometeu um erro de interpretação simples de enunciado. Nesse caso, dependendo de como o aluno resolve a tarefa, o professor pode tirar diferentes conclusões. Aqui ocorreu um erro de compreensão do enunciado do problema, mas isso não significa que o aluno não tivesse conhecimento da operação envolvida no problema. Portanto, o professor, ao corrigir acertos e erros de seus alunos em tarefas avaliativas, deve ter um olhar diferenciado e pontuar de forma adequada acertos e erros em uma avaliação. Os professores devem evitar correções que pontuem apenas os resultados e respostas finais e quantifiquem os erros. Assim, eles devem olhar, analisar e pontuar em detalhes formas de interpretar e resolver cálculos para valorizar os procedimentos de raciocínio dos alunos, procurar compreender suas ideias e evitar apenas uma análise quantitativa de erros (CURY, 2008; SANTOS, 1993, 1997).

De acordo com a categorização elaborada neste texto e com as considerações elencadas, montamos os quatro quadros seguindo a legenda abaixo:

Legenda dos Quadros 1, 2, 3 e 4:

IC/EC/CC/RC	Fez tudo certo
IC/EC/CC/RE	Resolveu corretamente, porém respondeu errado
IC/EC/CE/RC	Interpretou, respondeu e utilizou a estratégia correta, porém fez o cálculo errado
IC/OE/CC/RC	Resolveu corretamente utilizando outras estratégias
IC/OE/CE/RE	Interpretou corretamente, utilizou outra estratégia, porém, ao calcular, efetuou a operação de forma errada
IE/EC/CE/RC	Interpretou errado e calculou errado, porém utilizou a melhor estratégia e, apesar do cálculo errado, respondeu corretamente
IE/EC/CE/RE	Fez tudo errado, porém conseguiu identificar a operação correta
IE/OE/CE/RE	Fez tudo errado utilizando outras estratégias
IE/EE/CE/RE	Fez tudo errado

Quadro1 – Turma “DIA”

	Situação	Pergunta a	Pergunta b	Pergunta c
PROBLEMA 1	IC/EC/CC/RC	D11, D13, D28	D11	D3, D11, D16, D28
	IC/EC/CE/RC	D26		
	IC/OE/CC/RC	D1, D9, D14, D17, D18, D20, D21, D23, D29	D14, D18, D19, D21, D28	D14, D17, D18
	IE/EC/CE/RC	D2, D3, D5, D7, D8, D16, D24	D3	
	IE/EC/CE/RE			D21, D26
	IE/OE/CE/RE	D19	D1	D1, D23
	IE/EE/CE/RE		D5, D7, D8, D15, D25	D2, D5, D7, D8, D9, D19, D20
	Resposta certa sem cálculo	D4, D6, D10, D25, D27	D16, D24	D6, D24
	Resposta errada sem cálculo	D15, D22	D4, D6, D9, D10, D13, D17, D20, D23, D26, D27, D29	D4, D7, D10, D13, D22, D25, D27, D29
	Não fez	D12	D2, D12	D12, D15

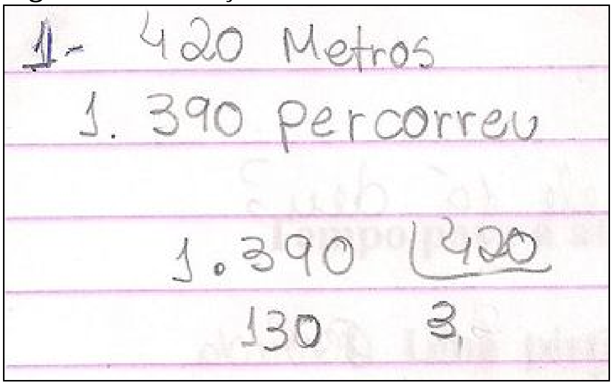
Fonte: Elaborada pelas autoras com base nas atividades realizadas.

Observamos pela tabulação que três alunos conseguiram resolver de forma correta toda a situação-problema 1 e também três utilizaram corretamente a operação de divisão necessária para resolver o item a – D11, D13 e D28; e que: D1, D3, D9, D14, D17, D18, D20, D21, D23 e D29, resolveram e responderam corretamente o item a utilizando como estratégia a multiplicação da pista por 2, por 3 e por 4, chegando à conclusão de que seriam três voltas. O fato é que dos 29 alunos da turma “Dia”, somente três alunos sabiam utilizar corretamente o algoritmo da divisão.

Se olharmos quantos acertaram a pergunta b, encontraremos no Quadro 1 apenas o estudante

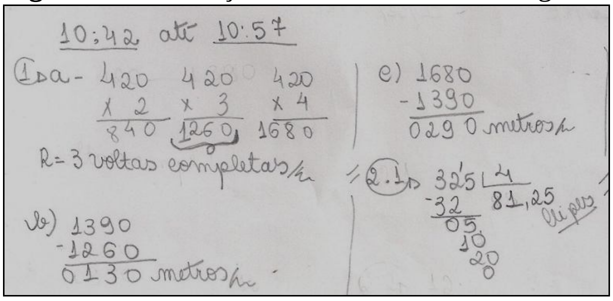
D11 usando a estratégia correta e os estudantes D14, D18, D19, D21 e D28 acertaram e usaram outras estratégias. Para exemplificar, colocamos a resolução dos alunos D11 e D14, respectivamente, conforme abaixo:

Figura 6 – Resolução correta



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 7 – Resolução utilizando outra estratégia



Fonte: Arquivo pessoal.

Pelo exemplo acima, observamos que o aluno D11 resolveu o problema utilizando a divisão e teve a oportunidade de perceber que o resto seria a resposta do item b, fato este que não ocorreu com o aluno D14, no entanto destacamos que ele efetuou outros cálculos, mas também acertou a resposta b.

Ainda temos os alunos D16 e D24 que acertaram e deixaram de nos mostrar os cálculos feitos. Assim, um total de nove futuros professores acertaram o item b do problema da pista de corrida.

Para a pergunta c notamos que apenas os alunos D2, D11, D16 e D28 acertaram com a estratégia correta. Os estudantes D14, D17 e D18 também acertaram a pergunta c, mas utilizaram outras estratégias. Identificamos no Quadro 1 que os futuros professores D6 e D24 acertaram esse item sem mostrar seus cálculos e raciocínios. Ou seja, tivemos, de fato, um total de nove estudantes acertando o item c do problema 1 da pista de corrida.

Quadro2 – Turma "DIA"

	Respostas	Pergunta a	Pergunta b	Pergunta c
PROBLEMA 2	IC/EC/CC/RC	D1, D2, D3, D11, D12, D13, D15, D19, D20, D23	D1, D2, D3, D11, D12, D13, D15, D19, D20, D23	D1, D11, D15, D19, D24
	IC/EC/CE/RE	D8	D8	
	IC/OE/CC/RC			D2, D8, D14, D18, D21, D26
	IE/EC/CE/RC	D14, D16, D18, D21, D24	D5, D7, D14, D16, D17, D18, D21, D24, D27, D28	D13, D20, D27, D28
	IE/EC/CE/RE	D5, D7, D9, D17, D22, D26, D27, D28, D29	D9, D22, D26	D3,
	IE/OE/CE/RE			D9, D12, D17
	IE/EE/CE/RE			D5, D7, D22, D23, D29
	Resposta certa sem cálculo	D6, D10, D25	D6, D10, D25	D4, D16
	Resposta errada sem cálculo	D4	D4	D6, D10, D25
	Não fez		D29	

Fonte: Elaborada pelas autoras com base nas atividades realizadas.

Notamos, no Quadro 2, que os estudantes D1, D11, D15 e D19 acertaram as três perguntas do problema 2 dos clips. Se olharmos apenas quem acertou o item a desse problema, encontraremos os alunos D1, D2, D3, D11, D12, D13, D15, D19, D20 e D23, o que nos leva a constatar que a situação-problema apresentada era de mais familiaridade para os alunos conforme acreditávamos inicialmente. Ainda temos os estudantes D6, D10 e D25 acertando esse item, mas sem mostrar os cálculos realizados para dar a resposta. Ou seja, tivemos um total de 13 estudantes acertando o item a do problema 2 dos clips.

Também identificamos no Quadro 2 que os alunos D1, D2, D3, D11, D12, D13, D15, D19, D20 e D23 responderam corretamente e usaram a estratégia correta para o item b do problema dos clips. Os estudantes D6, D10 e D25 também acertaram esse item, mas deixaram de exibir seus cálculos. Portanto, tivemos um total de 13 alunos respondendo corretamente ao item b.

Para a última pergunta desse problema, percebemos que os estudantes D1, D11, D15, D19 e D24 usaram a estratégia correta e acertaram. Os alunos D2, D10, D18, D21 e D26 acertaram usando outras estratégias, e os alunos D4 e D16 acertaram a resposta e não nos mostraram seus cálculos. Assim, tivemos de fato um total de 13 estudantes acertando o item c do problema 2 dos clips.

Quando analisamos todos os dados nos Quadros 1 e 2, constatamos que apenas o futuro professor D11 acertou os dois problemas e respondeu corretamente aos seis itens.

Quadro 3 – Turma "NOITE"

	Situação	Pergunta a	Pergunta b	Pergunta c
PROBLEMA 1	IC/EC/CC/RC	N5, N6, N8, N9, N16, N22	N5, N8, N9, N22	N8, N9, N10, N11, N14, N16, N21, N22
	IC/OE/CC/RC	N4, N10, N11, N13, N14, N15, N17, N20, N21	N10, N11, N14, N17, N20, N21	N20
	IC/OE/CE/RE	N3		
	IE/EC/CE/RC	N2, N7		
	IE/EE/CE/RE	N18	N4, N7, N13, N18	N4, N6, N7, N13, n17, N18
	Resposta certa sem cálculo	N1, N12, N19	N15, N19	N5, N15
	Resposta errada sem cálculo		N1, N12, N16	N1, N2, N12
	Não fez		N2, N3, N6	N3, N19

Fonte: Elaborada pelas autoras com base nas atividades realizadas.

Quadro 4 – Turma "NOITE"

	Respostas	Pergunta a	Pergunta b	Pergunta c
PROBLEMA 2	IC/EC/CC/RC	N3, N5, N6, N8, N9, N10, N13, N14, N16, N21	N3, N5, N6, N8, N9, N10, N13, N14, N16, N21	N5, N8, N9, N10, N16, N21
	IC/EC/CC/RE			N3
	IC/OE/CC/RC	N15, N20	N15, N20	N13, N14, N15
	IE/EC/CE/RC		N1, N4, N7, N11, N18, N22	
	IE/EC/CE/RE	N1, N4, N7, N11, N17, N18, N22	N17	N1, N4, N7, N11, N18
	IE/EE/CE/RE			N17, N20
	Resposta certa sem cálculo	N2	N2, N12, N19	N6
	Resposta errada sem cálculo	N12, N19		N2, N12, N19, N22

Fonte: Elaborada pelas autoras com base nas atividades realizadas.

Ao olharmos o Quadro 4 referente à turma da noite, observamos que tivemos seis estudantes (N5, N8, N9, N10, N16, e N21) que interpretaram, resolveram corretamente os cálculos e responderam de forma correta aos três itens do problema 2, sem utilizar outras estratégias.

Se considerarmos apenas as respostas aos itens a e b do problema 2, constatamos que outros estudantes também acertaram esses itens (N3, N6, N13, N14). Assim, podemos observar que dez futuros professores acertaram os dois itens iniciais do problema 2 sobre os clips. Se olharmos no Quadro 4 quem respondeu certo algum item do problema 2, mas deixou de mostrar como fez os cálculos, teremos o estudante N2 acertando os itens a e b, os estudantes N12 e N19 acertando apenas o item b e o estudante N6 acertando o item c sem mostrar seus cálculos.

Tivemos dois estudantes resolvendo o problema 2 com outras estratégias, os alunos N15 e N20, que acertaram os dois itens iniciais do problema 2. Apenas o estudante N15 usou outras estratégias e resolveu corretamente os três itens do problema. Os estudantes N13 e N14, que já tinham resolvido corretamente os itens a e b, acertaram também o item c usando a multiplicação como estratégia para a resolução do problema.

Os resultados nos permitiram notar que a maioria dos futuros professores cometeu erros semelhantes aos dos alunos dos anos iniciais, por exemplo: dificuldades de interpretação dos problemas. Isso é preocupante, porque segundo Polya (1945/1995) e todos os pesquisadores interessados em trabalhar com resolução de problemas, ler e interpretar corretamente o enunciado de uma situação-problema ou de um problema com texto é a primeira etapa a ser realizada pelo solucionador de problemas.

Atendendo aos nossos objetivos de diagnosticar o nível de compreensão dos problemas pelos alunos e entender a compreensão deles sobre o que é uma divisão com resto, ficou claro, para as pesquisadoras, que nossos estudantes de pedagogia possuem conhecimentos superficiais a respeito de divisão e sobre o que é uma divisão com resto. Cabe ressaltar que se faz necessário trabalhar com os dois significados da operação de divisão e com outras situações que envolvam divisão com resto.

Em relação ao nosso objetivo de elencar os principais tipos de soluções apresentadas, notamos que muitos estudantes de pedagogia utilizam outras estratégias para a resolução dos problemas propostos, deixando claro que a maioria não sabe ou não lembra o algoritmo da divisão. Um grande número de alunos resolveu os problemas utilizando outras operações, o que pode ser verificado nos quadros apresentados neste texto.

Outro dado importante é que, nas duas situações-problema, alguns alunos responderam, de forma correta ou errada, a pelo menos uma das perguntas/itens, mas não fizeram cálculo e nem deixaram nenhuma anotação. Então fica a dúvida: será que fizeram algum cálculo mental ou deram uma espiada/um sussurro no trabalho de algum colega? Não temos como saber, já que não nos foi possível retornar a essas análises e questionamentos com os estudantes naquele período.

CONCLUSÃO

É preocupante ter estudantes de pedagogia com essas falhas conceituais. Preocupa-nos também os espaços/tempos de: revisar, revisitar, reconstruir os conceitos básicos de aritmética, álgebra e geometria, dentre os vários conceitos matemáticos com os quais eles irão trabalhar futuramente, depois de formados, como professores dos anos iniciais do ensino fundamental. Entretanto, ficou claro para as professoras que esses estudantes de pedagogia desconhecem alguns cenários onde a divisão aparece dentro de um texto de problema. Portanto, eles precisam: a) explorar outras situações problema sobre divisão em textos rotineiros e não rotineiros; b) ser motivados a formular problemas de divisão, e nós (formadores de professores) precisamos ouvir cada um deles para saber o que pensam ao resolveram problemas com textos rotineiros e não rotineiros envolvendo as ideias de divisão. Afinal, eles atuarão futuramente como professores dos anos iniciais e deverão ensinar e explicar esse conceito matemático aos futuros alunos deles. Assim sendo, estudantes de pedagogia necessitam ter esse conhecimento compreendido e articulado com outros conceitos matemáticos.

Dessa forma, este estudo também nos possibilitou refletir que precisamos fazer uma análise mais profunda sobre o pensar e o fazer matemático desses professores em formação inicial. Ademais, necessitamos investigar caminhos e possibilidades que apontem, como dissemos no início deste texto, para uma outra ética e estética para o pensamento matemático e para os processos de ensinar, aprender e avaliar matemática.

Referências

ABRANTES, Paulo. Um (bom) problema (não) é (só)... In: **Revista Educação e Matemática**, Lisboa: APM, n. 8, p. 10-35, 1989.

BRUM, Jaqueline Magalhães Brum. **Redes cotidianas de saberes e fazeres matemáticos**: sobre possíveis potências e experiências de vida. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo/ES, Vitória, 2010.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradativa, 1951.

CURY, Helena. Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. rev. Campinas/SP: Autores Associados, 2007.

FUSON, Karen C. Research on whole number addition and subtraction. In: GROUWS, Douglas A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM); New York: Macmillan Publishing Company, 1992. p. 243-275.

GREER, Brian. Multiplication and division as models of situations. In: GROUWS, Douglas A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM); New York: Macmillan Publishing Company, 1992. p. 276-295.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 199-220.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma. Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andressa Maria (Org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí, SP: Paco, 2014. p. 35-52.

______. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas: aritmética, álgebra e geometria. In: ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE SANTA MARIA, 2008, Santa Maria. **Anais** ... Santa Maria: UFSM, 2008. p. 1-7.

______. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. IN: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez Editora, 2004. p. 213-231.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andressa Maria (Org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí/SP: Paco, 2014.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática**. 2. ed. Curitiba: Papirus, 2000.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1945-1995.

SANTOS, Vânia Maria Pereira dos. **Metacognitive awareness of prospective elementary teachers in a mathematics content course and a look at their knowledge, beliefs and metacognitive awareness about fractions.** 1993. Tese (Doctoral of Philosophy) – Department of Curriculum and Instruction (Mathematics Education) in the School of Education, Indiana University. Publicado por

Associação de Professores de Matemática, Coleção Teses. Lisboa: APM, 1996.

SANTOS, Vânia Maria Pereira dos. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997.

______. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro: UFRRJ, n. 53, p. 43-74, jul./dez. 2008.

SANTOS, Vânia Maria Pereira dos; REZENDE, Jovana F. de (Coord.). **Números**: linguagem universal. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1996.

SCHROEDER, Thomas L.; LESTER JUNIOR, Frank K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, Paul R.; SHULTE, Albert P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SENNA, A. L. M. L. S. da. **A apropriação do conceito de divisão por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória/ES, 2014.

SKEMP, Richard R. **The psychology of learning mathematics**. Expanded American Edition. New York: Routledge, 2009. (Primeira publicação ocorreu em Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erbaum Associates em 1987).

______. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, n. 77. p. 20-26, 1976.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática da matemática**: como dois e dois: a construção da matemática. São Paulo/SP: FTD, 2010.

Recebido em 05 de maio de 2015
Aprovado em 15 de outubro de 2015