

PROVAS EM DUAS COLUNAS – UM MÉTODO DE DEMONSTRAR TEOREMAS EM GEOMETRIA: APROPRIAÇÕES NO CONTEXTO BRASILEIRO

Two-Column Proofs – a method for demonstrating theorems in geometry:
appropriations in the Brazilian context

Pruebas en dos columnas – un método para demostrar teoremas en geometría:
apropiaciones en el contexto brasileño

MARIA CÉLIA LEME DA SILVA

Universidade Federal de São Paulo, Diadema, SP, Brasil. E-mail: celia.leme@unifesp.br

Resumo: Este artigo investiga a criação, circulação e apropriação do método de demonstração conhecido como prova em duas colunas, amplamente utilizado no ensino de Geometria nos Estados Unidos desde o início do século XX. A partir do estudo de Herbst (2002), discutimos como o método se consolidou naquele país, em meio à transição entre diferentes formas de apresentação das demonstrações nos livros didáticos. Identificamos os livros produzidos durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM) como possíveis vetores iniciais de introdução do método no Brasil. Argumentamos que a incorporação da prova em duas colunas indica um movimento de reestruturação das práticas demonstrativas no âmbito escolar. O estudo contribui para a história da Geometria escolar ao evidenciar que a demonstração, ao longo do século XX, deixou de ser entendida apenas como prática de especialistas e se constituiu como habilidade a ser aprendida no ensino básico.

Palavras-chave: livros didáticos; Movimento da Matemática Moderna; História da geometria escolar.

Abstract: This article investigates the creation, circulation, and appropriation of the demonstration method known as the *two-column proof*, widely used in the teaching of geometry in the United States since the early 20th century. Drawing on Herbst (2002), we discuss how this method became consolidated in the U.S., amidst a transition between different forms of presenting proofs in school textbooks. We identify textbooks produced during the Modern Mathematics Movement (MMM) as possible initial vectors for introducing the method in Brazil. We argue that the incorporation of the two-column proof reflects a process of restructuring demonstrative practices within school mathematics. The study contributes to the history of school geometry by showing that, throughout the 20th century, mathematical proof ceased to be understood solely as a practice of specialists and came to be viewed as a skill to be learned in basic education.

Keywords: textbooks; Modern Mathematics Movement; History of school geometry.

Resumen: Este artículo investiga la creación, circulación y apropiación del método de demostración conocido como *prueba en dos columnas*, ampliamente utilizado en la enseñanza de la geometría en los Estados Unidos desde principios del siglo XX. A partir del estudio de Herbst (2002), discutimos cómo dicho método se consolidó en ese país, en medio de la transición entre diferentes formas de presentación de las demostraciones en los libros de texto. Identificamos los libros producidos durante el Movimiento de la Matemática Moderna (MMM) como posibles vectores iniciales de introducción del método en Brasil. Argumentamos que la incorporación de la prueba en dos columnas indica un proceso de reestructuración de las prácticas demostrativas en el ámbito escolar. El estudio contribuye a la historia de la geometría escolar al mostrar que, a lo largo del siglo XX, la demostración dejó de entenderse únicamente como una práctica de especialistas y pasó a constituirse como una habilidad a ser aprendida en la educación básica.

Palabras clave: libros de texto; Movimiento de la Matemática Moderna; Historia de la geometría escolar.

INTRODUÇÃO

O presente estudo tem por objetivo analisar historicamente um método de demonstrar teoremas em geometria conhecido como provas em duas colunas¹. Iniciamos o artigo apresentando uma síntese do estudo de Herbst (2002) que discute a criação e o estabelecimento desse método nos Estados Unidos da América (EUA), desde o início do século XX. Em seguida, examinamos um conjunto de livros didáticos brasileiros publicados entre 1930 e 1950, com o intuito de verificar sua presença nesse período. Por fim, analisamos o que consideramos ser as primeiras inserções do método nos livros didáticos brasileiros, no contexto do Movimento da Matemática Moderna (MMM)².

É importante registrarmos que o caminho da pesquisa não se desenvolveu de forma linear. No final do século XX, um grupo de professores da PUC/SP, atuando em disciplinas de Geometria na formação inicial de professores de Matemática, utilizou o método das provas em duas colunas com os licenciandos, sem, no entanto, conhecer sua origem, sua chegada ao Brasil, ou o contexto histórico que favoreceu sua apropriação. Naquele momento, esses docentes não tinham familiaridade com os estudos de História da educação matemática ou com o próprio MMM.

Anos depois, em 2006, no âmbito de um projeto de Cooperação Internacional Brasil e Portugal³ voltado ao estudo da Matemática Moderna, a abordagem da Geometria na primeira coleção de livros didáticos modernos, de Osvaldo Sangiorgi⁴, foi objeto de investigação. Contudo, naquele estudo, o método de prova em duas colunas não recebeu atenção específica, assim como não foram examinados os livros didáticos anteriores à década de 1960.

O retorno ao tema ocorreu em 2023, em um novo projeto de pesquisa⁵, agora com foco nas práticas de demonstrações e validação em Geometria. O público para o qual tais propostas foram originalmente direcionadas era composto por estudantes de

¹ No decorrer do texto, o método é explicado e exemplificado.

² O MMM foi um movimento de âmbito internacional, iniciado na década de 1950, cujo objetivo era discutir e elaborar propostas de mudança no ensino da Matemática, tanto na Europa como na América. As propostas defendiam a unificação dos diversos campos da Matemática, aproximando o ensino da Educação Básica do Ensino Superior, o que corresponde à linguagem e à estrutura empregada pelos matemáticos da época. No Brasil, ele ganha força a partir da década de 1960.

³ Projeto CAPES/GRICES (2006-2010) *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: estudos históricos comparativos*.

⁴ Osvaldo Sangiorgi (1921-2017), matemático formado pela Universidade de São Paulo (USP), professor de Matemática reconhecido e autor de livros didáticos desde a década de 1950. É considerado uma referência na inserção e divulgação das ideias modernizadoras para o ensino de Matemática no Brasil. Criou, em 1961, o Grupo de Ensino de Matemática (GEEM), responsável pelas primeiras iniciativas na circulação do MMM no Brasil, além de ter sido o primeiro autor de livros didáticos a inserir a abordagem moderna nos livros didáticos para os cursos ginásiais (alunos de 11 a 14 anos) na década de 1960.

⁵ Projeto de Pesquisa História da Geometria do Ensino e o Movimento da Matemática Moderna, financiado pela Fapesp (2023/04639-8) sob a coordenação da autora do artigo.

aproximadamente 13 anos, especialmente nos livros da 3^a série ginásial, desde a Reforma Francisco Campos (1931). Em 2024, durante o 26th ICMI *Advances in Geometry Education*, tivemos contato com o estudo de Patrício Herbst (2002), o qual indicava que o método da prova em duas colunas constituía um padrão de longa duração nas escolas norte-americanas, ao passo que, no Brasil, passou a aparecer como uma novidade a partir da década de 1960.

Tais aspectos revelam que os percursos metodológicos de uma pesquisa envolvem escolhas temáticas, disponibilidade e natureza das fontes, bem como diálogos com referenciais teóricos adequados. Consideramos relevantes destacar que essa trajetória desempenhou papel fundamental na formulação do projeto *Processo de validação em contextos de geometria: histórias e articulações com a formação de professores*⁶. Empregamos o termo *processo de validação* em lugar de provas ou demonstrações para enfatizar que, ao longo da escolarização e em diferentes períodos históricos, podem ser identificadas múltiplas formas de justificar, explicar, argumentar ou sustentar propriedades e conceitos geométricos.

É importante considerarmos que o tema da argumentação, estreitamente relacionado aos métodos de provar teoremas, vem sendo objeto de estudo em diversas áreas do conhecimento. Esses estudos têm promovido aproximações e possibilitado a construção de redes de cooperação entre os pesquisadores no Brasil e no exterior⁷, o que reforça a necessidade de trazer ao debate uma trajetória histórica sobre os processos de criação, circulação e apropriação de diferentes modos de argumentar – como é o caso particular do método das provas em duas colunas.

Assim, o presente estudo constitui uma narrativa histórica acerca da incorporação do método das provas em duas colunas, delimitando o período de análise entre o início do século XX – com a criação do método nos EUA – e sua apropriação nos livros didáticos brasileiros durante o MMM, nas décadas de 1960 e 1970.

Do ponto de vista teórico-metodológico, adotamos o referencial da circulação e apropriação de saberes, considerando autores de livros didáticos e professores como mediadores culturais na produção e difusão de práticas pedagógicas (Matasci, 2016). A abordagem de transferências culturais permite compreender que os processos de apropriação dependem dos contextos de recepção, evidenciando que os saberes que chegam não são idênticos aos saberes emitidos (Burke, 2016).

As principais fontes brasileiras analisadas para examinar a inserção de um novo método de provas nos livros didáticos – o método de provas em duas colunas – foram as normativas dos diferentes períodos, que expressavam, de modo geral, a proposta de um estudo dedutivo, sem, contudo, especificar ou apresentar exemplos. A essas

⁶ Projeto de Pesquisa do Edital Universal CNPq (405027/2023-0), sob a coordenação da autora do artigo, com a colaboração de pesquisadores da USP, UFJF, UNIR, UFMS.

⁷ A Associação Brasileira de Argumentação (ABA) foi criada em 2023. Mais detalhes podem ser consultados no site: <https://www.ababrasil.net/>

normativas somou-se o cotejamento dos livros didáticos, o que permitiu interpretar propostas educacionais que podem revelar elementos da cultura escolar, como nos esclarece Munakata (2012):

noção de cultura escolar refere-se não somente a normas e regras, explícitas ou não, símbolos e representações, além dos saberes prescritos, mas também, e sobretudo, a práticas, apropriações, atribuições de novos significados, resistências, o que produz configurações múltiplas e variadas, que ocorrem topicamente na escola. [...] Uma dessas coisas peculiares à escola é precisamente o livro didático (p. 122).

Nesse sentido, a análise crítica dos livros didáticos de diferentes períodos permite identificar problemáticas e aproximar-nos das práticas pedagógicas, bem como das múltiplas tentativas de atribuir significado aos processos de argumentação, validação e justificativa – aspectos que podem ser assumidos como parte dos objetivos educacionais presente em diferentes áreas, níveis e contextos escolares.

MÉTODO DA PROVA EM DUAS COLUNAS NOS EUA

Patrício Herbst (2002), em seu artigo *Establishing a Custom of Proving in American School Geometry: Evolution of the Two-Column Proof in the Early Twentieth Century*⁸, apresenta um relato histórico que permite compreender como o método de prova em duas colunas contribuiu para estabilizar o ensino de Geometria nas escolas norte-americanas desde o final do século XIX.

O autor identifica três períodos distintos no ensino das provas ou demonstrações geométricas⁹ no curso secundário, a partir da análise de livros didáticos, que denomina: (1) Era do Texto – As provas eram apresentadas integralmente nos livros. Os alunos estudavam e reproduziam demonstrações completas; (2) Era do Original – Os livros passaram a incluir problemas ao final dos capítulos para que os alunos produzissem provas “originais”. A expectativa era que os estudantes pensassem e raciocinassem, ainda que a prova não fosse tratada como uma habilidade sistematicamente ensinada e (3) Era do Exercício – As provas passam a ser

⁸ Estabelecendo um padrão de provas na geometria escolar americana: evolução das provas em duas colunas no início do século XX.

⁹ Herbst (2002) utiliza o termo prova como sinônimo de demonstração, em diversos momentos. Nas referências trazidas pelo Comitê dos Dez – grupo de líderes educacionais presidido por Charles Eliot, durante o século XIX –, observa-se o mesmo uso. Essa equivalência terminológica também aparece nas classificações propostas pelo autor, como na Era do Texto, na Era dos Originais e a na Era do Exercício.

organizadas em duas colunas (afirmações e justificativas). A demonstração tornava-se um objeto de ensino explícito, uma habilidade a ser aprendida e praticada.

Na Era do Texto, o conhecimento geométrico e a capacidade de provar os teoremas eram habilidades indistinguíveis, as provas eram redigidas em parágrafos longos e com linguagem frequentemente complexa. Entretanto, à medida que o ensino de geometria se ampliava nas escolas secundárias, a abordagem começou a se afastar da simples reprodução de um texto de Geometria (Herbst, 2002). Tudo indica que, atrelada a tal concepção, estava a prova de um teorema como algo realizado por matemáticos (geômetras) e possivelmente de uma única maneira, segundo a sequência exposta pelos livros, cabendo, ao aluno, memorizar e reproduzir a demonstração.

Na Era do Original, os autores passaram a incluir exercícios no final dos capítulos, como oportunidades para os alunos realizarem trabalhos originais. Os autores criaram representações para realizar provas, como desenhar diagramas. Wentworth (1878) foi apontado como pioneiro ao reorganizar visualmente a página do livro: passou a apresentar cada teorema e sua demonstração em uma única página, introduziu justificativas curtas entre os passos do argumento. Essa disposição tornava explícitas as etapas do raciocínio lógico, permitindo ao professor verificar se o aluno havia compreendido o argumento. A justificativa de cada passo era indicada em letras pequenas entre esse passo e o seguinte, evitando a necessidade de interromper o processo do argumento referindo-se a uma seção anterior. Além disso, cada afirmação distinta nas demonstrações era iniciada em uma nova linha. Podemos inferir ser este um momento importante no sentido de buscar uma maneira pedagógica de apresentar as etapas: cada frase em uma linha, a demonstração toda na mesma página e inserir as justificativas que explicavam os passos mesmo que com letras pequenas.

A transição para a Era do Exercício marcava a sistematização do ensino das demonstrações. Os livros passaram a explicitar o que era considerado uma prova: cada afirmação deveria basear-se num postulado, num axioma, numa definição ou em alguma proposição previamente demonstrada. Autores como Wooster Beman e David Eugene Smith, em 1895, elaboraram seções introdutórias sobre a natureza da prova geométrica, apresentando exemplos e conduzindo o estudante por passos graduais.

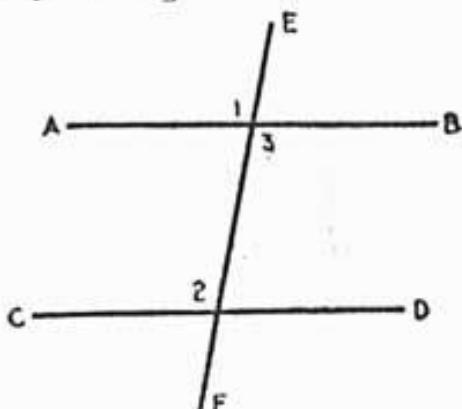
Os livros de Geometria de Arthur Schulze e Frank Sevenoak (1913) foram os primeiros a apresentar explicitamente as provas em duas colunas, com afirmações e justificativas separadas por uma linha vertical, conforme ilustrado na Figura 1:

Figura 1 - Prova em duas colunas de Schulze e Sevenoak (1913)

PROPOSITION XIX. THEOREM

106. *If two parallel lines are cut by a transversal,
the corresponding angles are equal.*

[Converse of Prop. XIV.]



Given parallel lines AB and CD and the cor. $\angle 1$ and 2 .

To prove $\angle 1 = \angle 2$.

Proof

STATEMENTS

$\angle 1 = \angle 3$.
 $\angle 2 = \angle 3$.
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$.

Q. E. D.

REASONS

Vertical \angle are equal.
Alt. int. \angle of || lines are equal.
Things equal to the same thing
are equal to each other.

Nota. De Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century (Herbst, 2002, p. 284).

A principal diferença entre a Era do Original e a Era do Exercício residia no volume e na natureza das tarefas: enquanto as primeiras eram poucas e consideradas difíceis, na segunda, propunha-se que os alunos resolvessem muitas provas simples, cuidadosamente avaliadas. Os autores enfrentaram, então, o desafio de equilibrar fundamentos e exercícios: que proposições deveriam ser consideradas básicas? Em que ordem as apresentar? Quais demonstrações deveriam ser modelos e quais deveriam ser realizadas pelos alunos?

Nesse contexto, o modelo de prova em duas colunas consolidou-se como recurso pedagógico, permitindo destacar a estrutura lógica da argumentação e tornando visíveis os vínculos entre afirmações e justificativas. Conforme Herbst (2002), o método representou uma conquista para o ensino de Geometria no século XX, permanecendo como um ícone da prática escolar norte-americana por várias décadas.

GEOMETRIA DEDUTIVA NO BRASIL

O ensino secundário brasileiro teve, no século XIX e nas primeiras décadas do século XX, o Colégio Pedro II¹⁰, no Rio de Janeiro, como importante referência formadora. Estudos como Valente (2007) e Bittencourt (1993) mostram que os livros didáticos adotados nessa instituição seguiam predominantemente modelos franceses, muitas vezes em forma de traduções ou compilações. Um exemplo significativo é o livro de Cristiano Benedito Ottoni, indicado para a disciplina de Geometria e considerado referência em meados do século XIX, o qual se baseia na obra francesa de Vincent (Valente, 2007). A segunda edição, publicada em 1857, apresenta cerca de 280 definições e teoremas, demonstrados por três métodos distintos: demonstração direta, demonstração por absurdo e superposição. Entretanto, não há exercícios destinados aos alunos ou propostas de produção de provas. Dessa forma, tal material pode ser associado ao que Herbst (2002) caracteriza como Era do Texto, na qual as demonstrações são integralmente fornecidas, e o aluno exerce uma função essencialmente reprodutiva.

Com a Reforma Francisco Campos, em 1931, que estruturou o ensino secundário no Brasil, o método intuitivo passou a ser defendido como base do primeiro movimento de modernização do ensino de Matemática, liderado por Euclides Roxo¹¹. No caso da Geometria, o Programa de 1931 instituiu, para as duas primeiras séries do curso secundário, uma abordagem experimental e intuitiva (Iniciação Geométrica), a partir da qual se deveria evoluir para a exposição formal dedutiva. Roxo justificava tal proposta da seguinte forma:

Do ponto de vista psicológico, o curso propedêutico da geometria não se justifica apenas como ponte entre a experiência vulgar do espaço e a geometria dedutiva, mas ainda, como complemento desta última, que, se pode desenvolver a capacidade do raciocínio dedutivo, é incapaz, por si só, de completar a educação matemática do aluno. Com efeito, aquilo que se denomina a intuitividade ou percepção espacial do meio ambiente, aptidão eminentemente necessária ao êxito na vida prática, não pode ser fornecido pela geometria demonstrativa unicamente. Ao contrário, a preocupação exclusiva com a dedução lógica impede o que se poderia chamar a ambientação especial do indivíduo. (Roxo, 2003, p. 186)

¹⁰ O Imperial Colégio Pedro II foi criado em 1837 com o intuito de servir de modelo de escolarização secundária para o Brasil (Valente, 2007). Em 1889, com a Proclamação da República, o nome foi alterado para Instituto Nacional de InSTRUÇÃO SECUNDÁRIA, e depois para Ginásio Nacional. Em 1911, voltou à designação de Colégio Pedro II.

¹¹ Euclides Roxo, engenheiro, professor, intelectual e educador matemático no início do século XX. Mais detalhes podem ser lidos em Dassie & Carvalho, 2010.

Entretanto, essa proposta modernizadora enfrentou forte resistência, inclusive de colegas do próprio Colégio Pedro II. O professor Almeida Lisboa, por exemplo, criticou publicamente os livros de Roxo no *Jornal do Commercio* (1931), Rio de Janeiro, argumentando que a ênfase excessiva em atividades intuitivas teria suprimido o caráter dedutivo considerado essencial ao estudo da Matemática:

Os livros em que o Sr. Euclides Roxo expõe o seu programa são excessivamente infantis. Suas aplicações práticas são ilusórias e de nenhum alcance. Neles não há vestígio da mais simples demonstração de qualquer teorema, por mais elementar que seja: existem apenas verificações materiais, e, portanto, imperfeitas e grosseiras. Desapareceu o raciocínio modelar, característica de uma demonstração e da própria Matemática. (Almeida Lisboa como citado em Carvalho, 2003, p. 131)

Assim, embora a Reforma de 1931 defendesse uma Geometria intuitiva nas primeiras séries do secundário, as críticas e resistências contribuíram para que a abordagem dedutiva permanecesse dominante na formação ao longo da primeira metade do século XX. Essa característica torna-se ainda mais evidente na década de 1950, quando têm início os Congressos Nacionais de Ensino de Matemática¹² (CNE). Nos Anais do II Congresso Nacional de Ensino da Matemática (1957), professores como Antonio Rodrigues¹³ e Benedito Castrucci¹⁴ apontam a excessiva memorização das demonstrações como um dos principais problemas da prática de ensino, sugerindo a redução do número de teoremas demonstrados e a inclusão de formas de demonstração experimental ou intuitiva.

Estudo realizado por Oliveira & Pietropaolo (2008) nos artigos sobre Matemática e Desenho publicados na Revista Escola Secundária, entre 1957 e 1963, indicou que:

Em síntese, esses autores concordavam com os programas prescritos de que a geometria dedutiva deveria ser desenvolvida em aulas, respeitando o ritmo, as necessidades e interesses dos alunos, desde que as práticas dos professores não se distanciassem muito da máxima: as demonstrações devem ser rigorosas, tendo em vista que a prova é crucial na cultura matemática. (p. 105)

¹² Os Congressos Nacionais de Ensino de Matemática ocorreram entre as décadas de 1950 e 1960. O I realizado em Salvador, Bahia, em 1955; o II em Porto Alegre, Rio Grande do Sul, em 1957; o III no Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, em 1959; o IV em Belém, Pará, em 1962 e o V e último, em São José dos Campos, SP, em 1966.

¹³ Catedrático de Geometria da Faculdade de Filosofia da URGES. Sua tese é apresentada nos Anais no capítulo intitulado “O Ensino da Geometria Dedutiva”.

¹⁴ Professor Catedrático da Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo. Doutor em Matemática. Autor de livros didáticos de Geometria e responsável pela Geometria no GEEM.

Em síntese, apesar das tentativas de renovação, tudo indica que a Geometria dedutiva permaneceu como a base estruturante do ensino no curso secundário brasileiro ao menos até meados do século XX, sendo formalmente introduzida na 3^a série ginásial, destinada a estudantes de aproximadamente 13 anos.

PROVAS EM LIVROS DIDÁTICOS DE 1930 A 1950 NO BRASIL

Estudo anterior (Jahn & Leme da Silva, 2023) identificou, nas normativas educacionais entre 1930 e 1950, que a Geometria dedutiva era introduzida a partir da 3^a série do curso secundário nas três reformas do período: Francisco Campos (1931), Capanema (1942) e Simões Filho (1951). Nas duas primeiras, a abordagem intuitiva constituía uma etapa preparatória; na última, o ensino passa a ser exclusivamente dedutivo.

Para este estudo, selecionamos livros didáticos representativos de cada década, priorizando obras com ampla circulação, com diversas edições e autoria de professores reconhecidos. Os autores analisados – como Euclides Roxo, Cecil Thiré, Júlio César de Mello e Souza (Malba Tahan), Algacyr Maeder, Ary Quintella, Carlos Galante, Oswaldo Santos e Osvaldo Sangiorgi – atuaram em instituições centrais, como o Colégio Pedro II e o Colégio Militar, além de terem realizado sua formação na Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo.

Não se pretende generalizar os resultados, mas examinar se o método da prova em duas colunas aparece nos livros didáticos e quais oportunidades de realização de demonstrações¹⁵ eram oferecidas aos estudantes. Para isso, contabilizamos o número aproximado e analisamos os exercícios que propunham aos estudantes a demonstração ou prova de teoremas, dos livros da 3^a série ginásial, série em que se iniciava a Geometria dedutiva, conforme o Quadro 1. Os enunciados encontrados solicitam, em geral, exercícios como: “Demonstrar que as bissetrizes dos ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais” (Roxo et al., 1944, p. 180) ou “Provar que as bissetrizes de ângulos que têm os lados paralelos são paralelas ou perpendiculares.” (Galante & Santos, 1953, p. 236).

¹⁵ Em todos os seis livros analisados, constatamos o uso dos termos prova e demonstração como sinônimos. Contudo, a expressão “demonstrar” ou “demonstração do teorema” aparece com muito mais frequência, especialmente na década de 1950.

Quadro 1 – Livros didáticos de Matemática

Reforma	Ano	Livro	Autores	Editora	Ex. de provas	PDC
Francisco Campos	1934	Curso de Matemática 3º Ano	Euclides Roxo, Cecil Thiré, Mello e Souza	Livraria Francisco Alves	6	0
	1936	Lições de Matemática 3º Anno	Algacyr Munhoz Maeder	Companhia Melhoramentos de São Paulo	0	0
Capanema	1944	Matemática Ginasial 3ª Série	Euclides Roxo, Cecil Thiré, Mello e Souza	Livraria Francisco Alves	70	0
	1946	Matemática 3º Ano	Ary Quintella	Companhia Editora Nacional	46	0
Simões Filho	1953	Matemática Terceira Série	Carlos Galante, Osvaldo Marcondes dos Santos	Editora do Brasil S / A	19	0
	1958	Matemática Curso Ginasial 3ª Série	Osvaldo Sangiorgi	Companhia Editora Nacional	84	0

Nota. De *Curso de matemática: 3º ano* (Roxo et al., 1934); *Lições de matemática (3º anno [3ª série])* (Maeder, 1936); *Matemática ginasial: 3ª série* (Roxo et al., 1944); *Matemática: 3º ano* (Quintella, 1946); *Matemática: Terceira série* (Galante & Santos, 1953); e *Matemática para a terceira série ginasial* (Sangiorgi, 1958).

O primeiro resultado de nossa investigação foi que nenhum dos seis livros didáticos examinados apresentou o modelo de prova em duas colunas (PDC), em contraste com o relato de Herbst (2002), que indica a presença desse modelo como forma de sistematizar demonstrações em livros escolares dos Estados Unidos desde o início do século XX. Por alguma razão, o modelo não foi incorporado aos livros didáticos brasileiros no período analisado, pelo menos dentre aqueles selecionados para este estudo.

Entretanto, ao examinarmos a prática de propor aos estudantes da 3ª série do curso secundário (alunos de aproximadamente 13 anos de idade) exercícios de prova e demonstração, identificamos mudanças ao longo do período considerado. Na década de 1930, durante a Reforma Francisco Campos, que introduziu a proposta de uma geometria intuitiva nas duas primeiras séries, a presença de exercícios é bastante reduzida, tanto para os conteúdos em geral quanto para a realização de demonstrações de teoremas.

A partir da década de 1940, com a Reforma Capanema, observa-se um cenário distinto: há um número significativamente maior de exercícios nos livros analisados. Nos dois livros de Roxo et al., um de 1934 e outro de 1944, apesar de compartilharem os mesmos autores e diferirem pela data de publicação em dez anos, constatamos um crescimento expressivo no número de exercícios que solicitam a realização de provas, passando de 6, na década de 1930, para 70, na década de 1940. Roxo et al. (1944) utilizavam as expressões “mostrar”, “provar” e “demonstrar” como sinônimos, e os

exercícios eram apresentados tanto em listas gerais ao final dos capítulos quanto em seções específicas intituladas “exercícios teóricos”.

Na década de 1950, com a Reforma Simões Filho, verificamos a manutenção dessa ênfase na demonstração. No livro de Sangiorgi (1958), que também emprega as expressões “provar” e “demonstrar” como equivalentes, o número de exercícios destinados à realização de provas é ainda maior do que nas décadas anteriores.

Em síntese, constatamos uma crescente valorização dos exercícios de demonstração de teoremas e propriedades nos livros didáticos da década de 1950, o que dialoga com os debates registrados no II Congresso Nacional de Ensino de Matemática (1959), ocorrido em 1957, nos quais se destacavam as dificuldades atribuídas ao ensino de Geometria, especialmente o fato de os estudantes memorizarem as demonstrações. O aumento progressivo do número de exercícios de demonstração entre as décadas de 1930 e 1950 pode ser interpretado como uma transição entre o que Herbst denomina Era do Original para a Era do Exercício.

MÉTODO DE PROVA EM DUAS COLUNAS NOS LIVROS DIDÁTICOS BRASILEIROS

No IV Congresso Nacional de Ensino de Matemática (CNEM), realizado no Pará, em 1962, o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) apresentou um programa de Matemática concebido sob uma perspectiva modernizadora. O documento, intitulado *Assuntos mínimos para um moderno programa de matemática*, foi aprovado por unanimidade pelos participantes do congresso. Para a 3^a série ginásial (atual 8º ano do Ensino Fundamental, alunos com cerca de 13 anos), o tema *Elementos fundamentais da geometria plana* foi acompanhado de indicações metodológicas, tais como: “introduzir intuitivamente os elementos fundamentais e suas propriedades; usar sempre a linguagem de conjuntos e suas operações; e mostrar como algumas propriedades são consequências de outras mais elementares, introduzindo o processo dedutivo” (Grupo de Estudos do Ensino de Matemática [GEEM], 1965, p. 94). Assim, observa-se que a introdução da Geometria dedutiva, mesmo no contexto da Matemática Moderna, não foi questionada; ao contrário, foi reafirmada, ainda que precedida de uma abordagem intuitiva.

Com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB n.º 4.024/61), os Conselhos Estaduais de Educação passaram a ter autonomia para estabelecer programas curriculares. Nesse contexto, em 1965, o estado de São Paulo publicou o documento *Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática*, no qual a Geometria dedutiva permaneceu concentrada na 3^a e 4^a séries ginásiais (alunos de 13 e 14 anos).

Ao longo da década de 1960, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) consolidou-se por meio dos CNEM, da atuação do GEEM na oferta de cursos de

formação para professores e de outras iniciativas que contribuíram para a difusão das novas propostas. Nesse cenário, surgiram os primeiros livros didáticos alinhados à abordagem moderna.

Para analisar esse período, selecionamos duas obras consideradas representativas das primeiras inserções da Matemática Moderna no contexto brasileiro (Quadro 2). Uma delas, de autoria de Osvaldo Sangiorgi, coordenador do GEEM, destinada à 3^a série ginásial (alunos de 13 anos). O segundo livro, dedicado exclusivamente à Geometria, corresponde a uma tradução de obra norte-americana, com estudo completo sobre a Geometria plana e espacial, contemplando a proposta de Geometria presente nos programas da 3^a série ginásial até o curso colegial.

Quadro 2 – Livros didáticos de Matemática e Geometria

Programa	Ano	Livro	Autores	Editora	PDC
<i>Sugestões para um roteiro de Programa SEE-SP (1965)</i>	1967	Matemática Curso Moderno 3º Ano	Osvaldo Sangiorgi	Companhia Editora Nacional	5
	1971	Geometria Moderna – Parte I	Moise & Downs Trad. Renata Watanabe e Dorival Mello	Edgard Blücher Ltda	30

Nota. De *Matemática: Curso moderno (3º volume para os ginásios)* (Sangiorgi, 1967); e de *Geometria moderna – Parte I* (Moise & Downs, 1971).

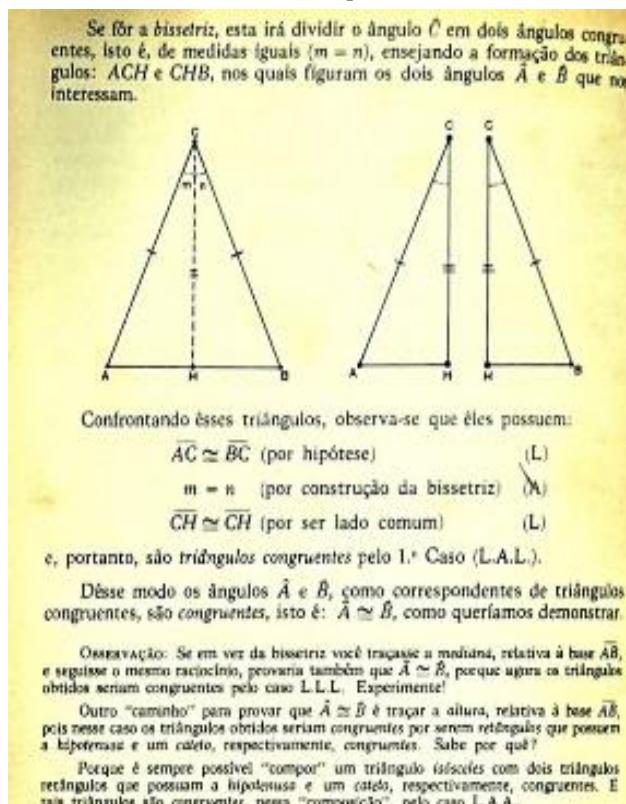
Osvaldo Sangiorgi foi um autor amplamente reconhecido no mercado de livros didáticos, com obras publicadas pela Companhia Editora Nacional desde a década de 1950 (Valente, 2008). Um dos livros incluídos no Quadro 1 apresenta 84 exercícios de “provar” ou “demonstrar”, termos empregados como sinônimos pelo autor. O livro *Matemática – Curso Moderno*, destinado à 3^a série ginásial (1967), foi analisado comparativamente com o livro do mesmo autor, para a mesma série, publicado em 1958, no artigo *Não decore demonstrações de teoremas! A Geometria Moderna de Osvaldo Sangiorgi* (Jahn & Leme da Silva, 2023). As autoras concluíram que, no livro moderno:

fica explicada a necessidade de reduzir os teoremas demonstrados na coleção moderna, visto que o tratamento para as demonstrações ganha outra perspectiva, muito mais explicativa, mobilizando diferentes registros de representação para o encadeamento lógico. Podemos inferir que tais inovações correspondem a maneira que Sangiorgi criou, elaborou, a partir do momento em que ele estava mergulhado no debate do MMM, para que um(a) jovem de 13 anos compreenda o processo dedutivo ao invés de decorar os teoremas e suas demonstrações (p. 17).

Entre as inovações, destaca-se a introdução de uma etapa preparatória de geometria intuitiva antes do estudo dedutivo, com exercícios exploratórios nos quais o termo “provar” é empregado entre aspas. Na coleção moderna, ao contrário da coleção anterior, provar não é sinônimo de demonstrar: “provar” refere-se a uma verificação intuitiva – por exemplo, ao identificar por meio de construções geométricas, os casos de congruência de triângulos –, enquanto demonstrar é reservado para o estudo dedutivo formal. Além disso, o número de exercícios que solicitam demonstrações é significativamente reduzido: de 84, no livro de 1958, para 29, no livro de 1967.

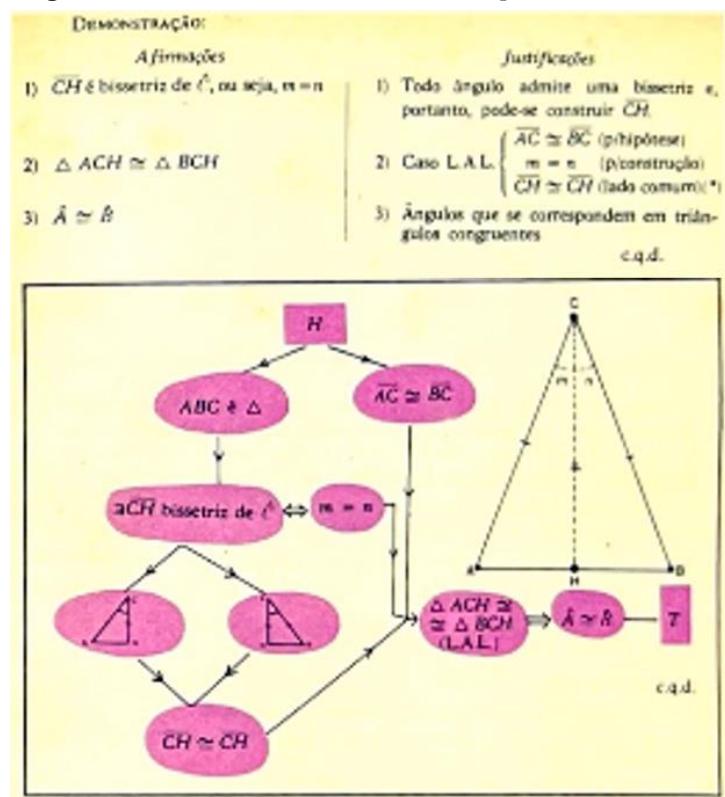
Outra característica inovadora é a apresentação de múltiplas representações de demonstrações para um mesmo teorema. Sangiorgi apresenta cinco registros de representação do encadeamento lógico para o teorema 1 do livro – sobre a congruência dos ângulos da base de um triângulo isósceles. Os três primeiros correspondem a demonstrações usuais, cada uma usando uma construção auxiliar diferente: a bissetriz do ângulo oposto à base, a mediana e, por fim, a altura relativa à base, configurando três maneiras distintas de demonstrar o mesmo teorema (Figura 2). O quarto registro utiliza o modelo da prova em duas colunas, e o quinto emprega o modelo de “esquemas desenhados”, coloridos e organizados com uma série de deduções por meio de construções (–), de equivalências (\Leftrightarrow) e de implicações (\Rightarrow), técnica preferida da matemática e pedagogista francesa Lucienne Félix (Figura 3).

Figura 2 – Três caminhos usuais para demonstrar o Teorema 1



Nota. De Matemática: Curso moderno (3º volume para os ginásios) (Sangiorgi, 1967, p. 240).

Figura 3 – Modelo de duas colunas e Esquemas desenhados



Nota. De *Matemática: Curso moderno (3º volume para os ginásios)* (Sangiorgi, 1967, p. 241).

Pelo estudo realizado nos livros representativos das décadas de 1930 e 1950 (Quadro 1), nos quais não identificamos o modelo de prova em duas colunas, é plausível supor que o livro de Sangiorgi para a 3^a série ginásial tenha sido um dos primeiros a incorporar tal modelo em livros didáticos brasileiros. O fato de o autor ter realizado estágio nos Estados Unidos, em 1960, onde teve contato direto com materiais didáticos amplamente difundidos naquele país, reforça a hipótese de que a inclusão do modelo de prova em duas colunas na coleção moderna decorra dessa experiência internacional – ainda que o autor não faça referência explícita a essa influência em sua obra.

É possível ainda reconhecer a relevância atribuída por Sangiorgi aos diferentes processos de justificar e de argumentar, reunindo não somente as propostas vinculadas ao contexto estadunidense, mas trazendo igualmente ideias europeias, como a da educadora francesa Lucienne Félix (esquemas desenhados). Torna-se evidente o aspecto metodológico valorizado na proposta moderna de Sangiorgi para o ensino de geometria, por permitir dialogar de perto com as reflexões e apontamentos relatados por professores e debatidos em Congressos, especialmente no que se refere às práticas pedagógicas consideradas problemáticas, como a memorização de demonstrações pelos estudantes.

O segundo livro didático considerado no Quadro 2, *Geometria Moderna*, de Edwin E. Moise (Universidade de Harvard) e Floyd L. Downs Jr. (Hillsdale College), também circulou no Brasil, destinado a estudantes da 3^a série ginásial à 3^a série colegial. A obra, originalmente produzida nos EUA, foi traduzida para o português por Renata Watanabe¹⁶ e Dorival Mello¹⁷, com apoio do Departamento de Publicações do GEEM, e publicada pela Editora Edgard Blücher, em 1971.

Uma inovação marcante desse livro foi a integração do estudo da Geometria plana e espacial, diferentemente dos programas nacionais de 1931, 1942 e 1951, bem como do Programa paulista de 1965, que preconizavam sua abordagem separada: Geometria plana no ginásio (atual Ensino Fundamental – Anos Finais) e Geometria espacial no colégio (atual Ensino Médio). Essa diferença estrutural dificultaria a adoção direta da obra nas escolas brasileiras, dada a organização curricular vigente.

No prefácio da obra, Moise & Downs reconhecem ter sido fortemente influenciados pelo texto *Geometry*, elaborado pelo Mathematics Study Group¹⁸ (SMSG), destacando que participaram das discussões sobre o ensino de Matemática promovidas pelo grupo. Os autores argumentam que: “o aluno terá uma experiência intuitiva, longa e variada, com geometria no espaço, antes de começar um estudo sistemático dessa geometria no capítulo 8” (Moise & Downs, 1971, Prefácio), o que reforça a importância de uma etapa intuitiva prévia como preparação para o estudo dedutivo, incluindo as provas e demonstrações.

No desenvolvimento do texto, antes de solicitar que os estudantes realizem demonstrações, os autores apresentam definições, conceitos, linguagens e exemplos minuciosamente explicados, além de demonstrações já resolvidas, apresentadas de forma gradual. Como se observa na seção intitulada “Escrevendo demonstrações simples” (Figura 4), as primeiras demonstrações buscam estabelecer um padrão argumentativo básico, visando iniciar os estudantes na lógica dedutiva e no rigor característico da Geometria formal.

¹⁶ Renata Gompertz Watanabe. Foi professora da Universidade Mackenzie, membro do GEEM.

¹⁷ Dorival Antonio Mello. Foi professor da Universidade Mackenzie, membro do GEEM.

¹⁸ A preocupação com o aumento da necessidade de matemáticos resultou, em 1958, em duas conferências patrocinadas pela *National Science Foundation* (NSF), em cujo contexto foi solicitado um projeto para reformular o currículo da matemática escolar e elaborar livros didáticos. Edgar Begle foi indicado e aceitou o cargo de diretor do projeto resultante: *O School Mathematics Study Group* (SMSG). Mais detalhes podem ser lidos em Oliveira Filho (2009).

Figura 4 – Demonstrações simples

4-6. ESCREVENDO DEMONSTRAÇÕES SIMPLES

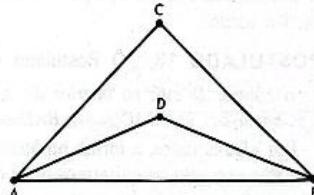
Logo mais, escrever suas próprias demonstrações constituirá uma grande parte de seus exercícios. Será melhor adquirir mais um pouco de prática em escrever demonstrações fáceis antes de atacar as mais difíceis do próximo capítulo. Provavelmente, a melhor maneira de indicar como devem ser suas demonstrações, é dar mais alguns exemplos. Nesses exemplos e problemas você pode supor que as figuras são coplanares salvo aviso em contrário.

Exemplo 1

Dados: $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$,
como na figura à direita, com
 $\angle DAB \cong \angle DBA$ e $\angle CAD \cong$
 $\cong \angle CBD$,

Demonstre:

$$\angle CAB \cong \angle CBA$$



Demonstração

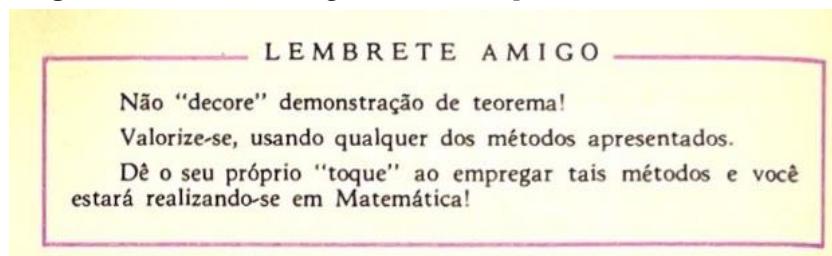
Afirmações	Justificações
1. $m\angle DAB = m\angle DBA$.	Dado.
2. $m\angle CAD = m\angle CBD$.	Dado.
3. $m\angle DAB + m\angle CAD$. $= m\angle DBA + m\angle CBD$.	Propriedade aditiva da igualdade.
4. $m\angle CAB = m\angle CBA$.	Postulado da Adição de Ângulos.
5. $\angle CAB \cong \angle CBA$.	Definição de congruência de ângulos.

Nota. De *Geometria moderna – Parte I* (Moise & Downs, 1971, p. 88).

Conforme observado na Figura 4, o modelo de prova em duas colunas é empregado desde o Exemplo 1 e permanece ao longo de todo o livro como formato padrão de apresentação das demonstrações. Em seguida, os autores introduzem um momento específico para que os estudantes iniciem a redação de suas próprias demonstrações, na Seção 5.4 – *Inventando suas próprias demonstrações*. Nessa etapa, Moise & Downs destacam que os alunos já teriam adquirido os conhecimentos necessários para produzir argumentos dedutivos e enfatizam que: “escrever suas próprias demonstrações será uma parte muito importante de seu trabalho, e as chances são de que será muito mais divertido que ler demonstrações de outras pessoas” (Moise & Downs, 1971, p. 112).

Esse movimento de incentivo à produção de demonstrações pelos estudantes também se evidencia no livro de Sangiorgi para a 3^a série ginásial (1967), no qual o autor inclui o “lembrete amigo” apresentado na Figura 5, destacando a importância de o aluno assumir um papel ativo na construção do raciocínio dedutivo.

Figura 5 – Lembrete amigo de incentivo para demonstrar teoremas



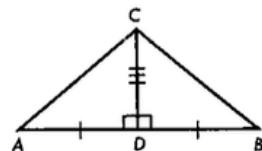
Nota. De *Matemática: Curso moderno (3º volume para os ginásios)* (Sangiorgi, 1967, p. 258).

No livro de Moise e Downs (1971), identificamos ainda uma etapa adicional de preparação para o exercício de demonstrar. As primeiras propostas de demonstração direcionadas aos estudantes são apresentadas de forma parcialmente estruturada, solicitando o preenchimento de lacunas deixadas em branco. Esse procedimento pode ser observado no problema 1 da Figura 6, que orienta o aluno a completar justificativas e encadeamentos lógicos previamente indicados pelos autores. Trata-se, portanto, de um dispositivo pedagógico que busca apoiar a transição do estudante da leitura e compreensão de demonstrações para a construção autônoma de argumentos dedutivos.

Figura 6 – Exercício inicial para demonstrar

1. Copie este problema em seu caderno e complete as informações que faltam.

Dados: A figura ao lado com
 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.
 Demostre que: $\Delta ADC \cong \Delta BDC$.



Demonstração

Afirmações	Justificações
1. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.	Dado.
2. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$
3. $\angle ADC \cong \angle BDC$.	Definições de perpendiculares e ângulo reto.
4. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$.	Identidade. (Todo segmento é congruente a si próprio.)
5. $\Delta ADC \cong \dots$

Nota. De *Geometria moderna – Parte I* (Moise & Downs, 1971, p. 114).

Após se familiarizar com o modelo de prova em duas colunas por meio de exercícios estruturados, nos quais o estudante completa justificativas ou afirmações previamente sugeridas, os problemas passam a solicitar a demonstração diretamente, sem o suporte inicial. Esse estágio intermediário – no qual o aluno preenche partes de uma demonstração orientada – não foi identificado no livro de Sangiorgi, o que evidencia as opções e escolhas do autor em seu processo de apropriação. Ele optou por apresentar diferentes formas de representações, em vez de explorar de maneira mais detalhada o método da prova em duas colunas, tal como proposto por Moise e Downs (1971). Essa escolha reforça que todo processo de apropriação envolve decisões, particularidades e a consideração do contexto no qual será implementado. De todo modo, o método, já consolidado nos EUA em meados do século XX, chega à cultura escolar brasileira inserido em um movimento mais amplo, como o MMM, ainda que não tenha sido originalmente concebido como uma proposta modernizadora para os Estados Unidos na década de 1960.

Em síntese, o livro *Geometria Moderna*, de Moise e Downs (1971), emprega majoritariamente o modelo de prova em duas colunas: identificamos cerca de 30 ocorrências apenas na Parte I da obra. Esse fato oferece evidências claras para a tese

apresentada por Herbst (2002), segundo a qual o modelo havia se consolidado como um padrão amplamente utilizado no ensino de geometria nas escolas norte-americanas, perdurando por um longo período e constituindo-se como um verdadeiro ícone da prática demonstrativa escolar. No contexto do livro, o modelo é tratado como forma prototípica de apresentação de demonstrações, dispensando justificativas adicionais sobre seu emprego – como se a prova em duas colunas se confundisse com a própria ideia de demonstração geométrica no cenário norte-americano.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo buscou apresentar a criação e consolidação de um método de demonstração – o método de prova em duas colunas – enquanto estratégia didática para que as provas e demonstrações passassem a ser concebidas como habilidades aprendidas no âmbito escolar. Ao recuperar sua emergência em contextos específicos, examinar sua circulação internacional e analisar seus primeiros processos de apropriação no Brasil, particularmente em São Paulo, pretendemos contribuir para a compreensão histórica das práticas demonstrativas na geometria escolar, aproximando-as dos processos de argumentação ou validação em geometria.

Uma primeira reflexão refere-se à transição de uma prática originalmente circunscrita à cultura acadêmica – voltada aos matemáticos e geômetras, que operavam sob rígidas normas lógico-dedutivas – para um objeto de ensino escolar destinado a estudantes a partir de 13 anos. De um lado, temos o universo da demonstração formal, no qual o rigor é condição estruturante; de outro, o contexto escolar, no qual a linguagem matemática, os instrumentos de argumentação e os procedimentos lógicos estão em formação e construção. No Brasil, entre as décadas de 1930 e 1950, embora as normativas insistissem na necessidade de uma etapa preparatória, tais orientações não lograram modificar, de modo substantivo, a predominância da geometria dedutiva pautada pela memorização de demonstrações. Por outro lado, a inserção de métodos alternativos para justificar e argumentar – entre eles, o da prova em duas colunas – pode indicar uma ruptura com práticas ditas como tradicionais, reconhecendo o espaço escolar como um lócus diferenciado e, portanto, como um contexto que requer métodos próprios e distintos daqueles tradicionalmente mobilizados pelos matemáticos.

Uma segunda reflexão diz respeito às razões pelas quais o método de prova em duas colunas foi incorporado no Brasil apenas no âmbito do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Nesse momento, o debate central não se restringia ao formato das demonstrações, mas à própria base axiomática da Geometria – se deveria permanecer ancorada em Euclides, ainda que revisitada, ou ser reorganizada à luz das Transformações Geométricas. Ainda assim, o método de provas em duas colunas operou como um recurso pedagógico para evidenciar o encadeamento lógico dos

argumentos, contribuindo para tornar mais acessível o exercício da demonstração pelos estudantes.

Por fim, destacamos a importância de compreender a circulação e a apropriação de saberes em perspectiva transnacional. A adoção ou adaptação de modelos pedagógicos envolve tempos, mediações, intercâmbios e agentes culturais específicos – professores, autores de livros didáticos, tradutores, instituições formadoras. O caso da tradução e circulação do livro *Geometria Moderna* de Moise & Downs (1971) é exemplar: ainda que sua organização integrada de Geometria plana e espacial dificultasse sua adoção no ensino secundário brasileiro, a obra encontrou lugar na formação de professores de Matemática, abrindo novas frentes para a incorporação de práticas demonstrativas e representações geométricas.

O projeto *Processos de validação em contextos de geometria: histórias e articulações com a formação de professores* encontra-se em desenvolvimento e prevê, em um de seus subprojetos, investigar a trajetória posterior do método de prova em duas colunas no Brasil: sua difusão em coleções didáticas, sua permanência ou transformação, bem como sua relação com a formação inicial e continuada de professores. Espera-se, com isso, contribuir para a História da Geometria escolar e, em particular, para a compreensão das formas pelas quais as práticas demonstrativas são apropriadas, ressignificadas e ensinadas nos diferentes níveis de escolarização.

REFERÊNCIAS

- Beman, W. W., & Smith, D. E. (1895). *New plane and solid geometry*. Ginn & Company.
- Bittencourt, C. M. F. (1993). *Livro didático e conhecimento histórico: Uma história do saber escolar* [Tese de doutorado, Universidade de São Paulo].
- Burke, P. (2016). *O que é história do conhecimento?* Editora da UNESP.
- Carvalho, J. B. P. (2003). Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil. In W. R. Valente (Org.), *Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil* (pp. 86–158). Biblioteca do Educador Matemático.
- Congresso Nacional de Ensino da Matemática (2., 1957, Porto Alegre, RS). (1959). *Anais do II Congresso Nacional do Ensino da Matemática, 29 de junho–4 de julho de 1957*. Gráfica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/190262>

Dassie, B. A., & Carvalho, J. B. P. F. (2010). Euclides Roxo: Engenheiro, professor, intelectual e educador matemático. *Bolema*, 23(35A), 137–158.

Galante, C., & Santos, O. M. (1953). *Matemática: Terceira série*. Editora do Brasil.

GEEM (Grupo de Estudos do Ensino de Matemática). (1965). *Matemática moderna para o ensino secundário* (Série Professor n. 1). L.P.M.

Herbst, P. G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 283–312. <https://doi.org/10.1023/A:1020264900803>

Jahn, A. P., & Leme da Silva, M. C. (2023). Não decore demonstrações de teoremas! A Geometria Moderna de Osvaldo Sangiorgi. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM)*, 13(4), 1–19.
<https://doi.org/10.37001/ripem.v13i4.3053>

Maeder, A. M. (1936). *Lições de matemática* (3º anno [3ª série]). Companhia Melhoramentos de São Paulo.

Matasci, D. (2016). A França, a escola republicana e o exterior: Perspectivas para uma história internacional da educação no século XIX. *História da Educação*, 20(50), 139–155. <https://doi.org/10.1590/2236-3459/58076>

Moise, E. E., & Downs, F. L., Jr. (1971). *Geometria moderna – Parte I* (R. G. Watanabe & D. A. Mello, Trads.). Editora Edgard Blücher.

Munakata, K. (2012). Livro didático como indício da cultura escolar. *História da Educação*, 20(50), 119–138. <https://doi.org/10.1590/S2236-34592012000200007>

Oliveira, M. C. A., & Pietropaolo, R. C. (2008). Revista Escola Secundária: Instrumento na formação continuada de professores de matemática. In E. Z. Búrigo, M. C. B. Fischer, & M. B. Santos (Orgs.), *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: Novos estudos* (pp. 95–106). Redes Editora.

Oliveira Filho, F. (2009). *O School Mathematics Study Group e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil* [Dissertação de mestrado, Universidade Bandeirantes de São Paulo].

Quintella, A. (1946). *Matemática: 3º ano*. Companhia Editora Nacional.

Roxo, E. M. G. (2003). A matemática e o curso secundário. In W. R. Valente (Org.), *Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil* (pp. 159–189). Biblioteca do Educador Matemático.

Roxo, E. M. G., Thiré, C., & Mello e Souza, J. C. (1934). *Curso de matemática: 3º ano*. Livraria Francisco Alves.

Roxo, E. M. G., Mello e Souza, J. C., & Thiré, C. (1936). *Curso de matemática: 3º ano (3ª ed.)*. Livraria Francisco Alves.

Roxo, E. M. G., Mello e Souza, J. C., & Thiré, C. (1944). *Matemática ginásial: 3ª série*. Livraria Francisco Alves.

Sangiorgi, O. (1958). *Matemática para a terceira série ginásial*. Companhia Editora Nacional.

Sangiorgi, O. (1967). *Matemática: Curso moderno (3º volume para os ginásios)*. Companhia Editora Nacional.

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. (1965). *Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de matemática*. Governo do Estado de São Paulo.

Schulze, A., & Sevenoak, F. (1913). *Plane geometry*. Macmillan.

Valente, W. R. (2007). *Uma história da matemática no Brasil (1730–1930) (2ª ed.)*. Annablume.

Valente, W. R. (2008). Osvaldo Sangiorgi, um best seller. In W. R. Valente (Org.), *Osvaldo Sangiorgi: Um professor moderno* (pp. 13–41). Annablume.

Wentworth, G. A. (1878). *Plane and solid geometry*. Ginn & Heath.

MARIA CÉLIA LEME DA SILVA: Realizou pós-doutorado em História da Educação pela Universidade Nova de Lisboa (Portugal, 2006); pela Université Paris XI (França, 2015) e em Formação de Professores pela UFABC (2021). Professora Associada da Universidade Federal de São Paulo, Campus Diadema. Professora do Programa de Pós-graduação em Educação para Ciências, Unesp Bauru e do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Unesp Rio Claro. Líder do Grupo de Pesquisa em Estudos e Pesquisas em Geometria Escolar: história e formação de professores.

E-mail: celia.leme@unifesp.br
<https://orcid.org/0000-0001-6029-0490>

Recebido em: 08.11.2025

Aprovado em: 18.01.2026

Publicado em: 13.02.2026

EDITOR-ASSOCIADO RESPONSÁVEL:

Wagner Valente Rodrigues (Unifesp)
E-mail: wagner.valente@unifesp.br
<https://orcid.org/0000-0002-2477-6677>

RODADAS DE AVALIAÇÃO:

R1: dois convites; dois pareceres recebidos.

COMO CITAR ESTE ARTIGO:

Silva, M. C. L. da. Provas em duas colunas – um método de demonstrar teoremas em geometria: apropriações no contexto brasileiro. *Revista Brasileira de História da Educação*, 26, e404 DOI: <https://doi.org/10.4025/rbhe.v26.2026.e404>

FINANCIAMENTO:

A RBHE conta com apoio da Sociedade Brasileira de História da Educação (SBHE) e do Programa Editorial (Chamada Nº 30/2023) do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Este artigo conta com apoio do CNPq, Edital Universal, Projeto 405027/2023-0.

AGRADECIMENTOS:

Agradeço a leitura crítica e cuidadosa feita pelo professor Fabio Luiz Borges Simas, da UNIRIO.

LICENCIAMENTO:

Este artigo é publicado na modalidade Acesso Aberto sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 (CC-BY 4).

DISPONIBILIDADE DE DADOS:

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.