Vitruvian Cogitationes - RVC

LEONHARD EULER E O EPISÓDIO HISTÓRICO DA FORMULAÇÃO DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA DINÂMICA: F=MA

LEONHARD EULER Y EL EPISODIO HISTÓRICO DE LA FORMULACIÓN DEL PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA: F=MA

LEONHARD EULER AND THE HISTORICAL EPISODE OF THE FORMULATION OF THE FUNDAMENTAL PRINCIPLE OF DYNAMICS: F = MA

Camila Maria Sitko
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará/PPGECM
Centro de Investigação, Desenvolvimento e Inovação- IESF-PT
e-mail: camilasitko@yahoo.com.br

Resumo: Este artigo, recorte de uma tese de doutorado, busca oferecer uma imagem detalhada da contribuição de Euler na construção do Princípio Fundamental da Dinâmica. Euler modificou o conteúdo do Princípio Fundamental e formulou um novo, ampliando o entendimento da lei proposta por Newton (conhecida como F=ma). São abordados os principais fatores que contribuíram para a produção desse novo princípio, os principais nomes envolvidos, e a consolidação do princípio hoje chamado de Segunda Lei de Newton. É apresentada a inserção de Euler na construção da mecânica do século XVIII, suas concepções conceituais e realizações, bem como os elementos utilizados por ele para a elaboração do novo princípio, além da abordagem específica da construção da lei fundamental do movimento, como a conhecemos hoje. Finalmente, é apresentado o quadro completo do novo princípio de Euler, elaborado a partir da mecânica newtoniana, o qual serve de exemplo de como o trabalho científico ocorre.
Palavras-chave: F=ma; Leonhard Euler. Segunda lei do movimento. História da Ciência. Isaac Newton.

Resumen: *Este artículo, parte de una tesis doctoral, busca ofrecer un panorama detallado de la contribución de Euler a la construcción del Principio Fundamental de la Dinámica. Euler modificó el contenido del Principio Fundamental y formuló uno nuevo, ampliando la comprensión de la ley propuesta por Newton (conocida como F=ma). Se discuten los principales factores que contribuyeron a la producción de este nuevo principio, los principales nombres involucrados y la consolidación del principio ahora llamado Segunda Ley de Newton. Se presenta la inserción de Euler en la construcción de la mecánica del siglo XVIII, sus concepciones conceptuales y realizaciones, así como los elementos utilizados por él para la elaboración del nuevo principio, además del abordaje específico de la construcción de la ley fundamental del movimiento, como lo conocemos hoy. Finalmente, se presenta el cuadro*

completo del nuevo principio de Euler, extraído de la mecánica newtoniana, que sirve como ejemplo de cómo ocurre el trabajo científico.
Palabras-clave: *F=ma. Leonhard Euler. Segunda ley del movimento. Historia de la Ciencia. Isaac Newton.*

Abstract: *This paper, part of a doctoral thesis, seeks to provide a detailed picture of Euler's contribution to the construction of the Fundamental Principle of Dynamics. Euler modified the content of the Fundamental Principle and formulated a new one, expanding the understanding of the law proposed by Newton (known as F=ma). The main factors that contributed to the production of this new principle, the main names involved, and the consolidation of the principle now called Newton's Second Law are discussed. Euler's insertion in the construction of 18th century mechanics is presented, his conceptual conceptions and achievements, as well as the elements used by him for the elaboration of the new principle, in addition to the specific approach to the construction of the fundamental law of motion, as we know it today. Finally, the complete picture of Euler's new principle, drawn from Newtonian mechanics, is presented, which serves as an example of how scientific work occurs.*
Keywords: *F=ma. Leonhard Euler. Second law of motion. History of Science. Isaac Newton.*

1 PANORAMA GERAL DA MECÂNICA DO SÉCULO XVIII

Euler foi responsável pela tradição newtoniana em mecânica que temos hoje, baseada nos princípios do momento linear e angular, utilizando a ideia de vetores, referenciais, coordenadas cartesianas e também a relatividade do movimento (MALTESE, 2000).

Ele estendeu a segunda lei de Newton para além do seu domínio de aplicação inicial (como pode ser visto em Sitko 2019a, 2019b, 2020). Os conceitos newtonianos permitiam resolver problemas a partir de leis gerais; com a ajuda de Euler, que esclareceu (de maneira até parecer óbvia hoje em dia) e ampliou tais conceitos, a mecânica passou a ser capaz de resolver uma grande gama de problemas a partir de poucos axiomas e leis. O diferencial proposto por Euler está na generalização; é essa a mecânica que hoje chamamos de newtoniana. Podemos tratar a relação de Euler com Newton de duas formas; a primeira é a diferenciação no formalismo matemático, em que Euler coloca a descrição do movimento no formalismo do cálculo leibniziano, fazendo a descoberta de que os processos mecânicos possuem dependências funcionais entre suas variáveis; e a outra é a escolha de Euler por teorias dinâmicas, a fim de buscar uma teoria geral para a descrição dos movimentos do sistema.

Euler teve um grande trabalho de esclarecimento, organização e extensão dos princípios de mecânica, mostrando (diferentemente da complexidade trazida nos trabalhos de Newton e Bernoulli, por exemplo) como, a partir de princípios newtonianos, problemas reais poderiam ser resolvidos. Foi ele quem tornou a mecânica simples e com o caráter moderno que hoje estudamos. Para Gaukroger (1982), o objetivo de Euler era reformular a dinâmica newtoniana de maneira a ser bem estabelecida, preocupando-se principalmente com a explicação da ação de um corpo sobre o outro.

Euler desejava tornar a mecânica newtoniana um sistema indiscutível, baseado nos seus princípios eulerianos de impenetrabilidade e de extensão (que serão comentados na sequência); entretanto, somente esses conceitos não poderiam explicar o movimento uniforme ou repouso, a partir de $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$; antes, era necessário levar em conta a inércia para caracterizá-lo, ligando assim conceitos de dinâmica e cinemática, o que não era possível naquele nível de estudos antes de Euler. Quantitativamente falando, o que Euler estabeleceu é que a medida da inércia fornece a força que, por sua vez, está relacionada à variação do movimento produzida. A partir desses argumentos qualitativos, Euler estabeleceu a fundação de sua mecânica quantitativa.

Gaukroger identifica três níveis que distinguem a mecânica de Euler das outras: o primeiro é metafísico, com a introdução do conceito de impenetrabilidade e com a fundação conceitual da mecânica; o segundo é qualitativo, em que se deduz que a força advém da impenetrabilidade e inércia; o terceiro é o quantitativo, em que ocorrem as comparações das ações das forças (1982). Na próxima seção, vamos abordar tais concepções eulerianas para entendermos melhor como Euler estabeleceu esses argumentos como bases de sua mecânica.

2 CONCEPÇÕES CONCEITUAIS DE EULER

2.1 PRINCÍPIOS FUNDACIONAIS EULERIANOS

Em *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, Euler comenta a respeito do uso do método newtoniano e da limitação que ele oferece na resolução de problemas diferentes dos exemplificados nos manuais, assim como as posteriores formulações de outros cientistas (EULER, 1736), como foi o caso de Hermann (1716). Dias (2017) comenta a respeito da leitura de Euler acerca do método de Newton e da passagem do axioma II de Newton (das leis do movimento) para o formalismo leibniziano por Hermann como uma prática não bem sucedida, o que leva Euler a utilizar seu próprio método para a solução de problemas diferentes daqueles tratados por Newton e Hermann.

Truesdell afirma (1968) que Euler introduziu suas leis como independentes, fundamentais e gerais, mas na visão de Stan (2017), isso pode não ser necessariamente verdadeiro. A generalidade de suas leis é discordada por alguns, como Lagrange[1] e seus seguidores, os quais embasaram suas mecânicas num princípio diferente, o do trabalho virtual. Euler não oferece objeções a tal embasamento, e muito pelo contrário, na obra *Cartas de Euler sobre diferentes assuntos em filosofia natural enderessada a uma princesa alemã* (*Letters of Euler on different subjects in natural philosophy addressed to a german princess)* (EULER, 1823), ele explica a natureza do corpo a partir do Princípio da Mínima Ação, um princípio variacional não-newtoniano. Dessa forma, conforme explana Stan (2017), pode-se perceber que Euler possuía três concepções diferentes a respeito da dinâmica: as leis newtonianas, o Princípio da Mínima Ação e o Princípio do Trabalho Virtual.

Na base fundacional de Euler, os fenômenos incluem situações imagináveis, e podem ser entendidos a partir de suas funções[2] (SITKO, 2019b). As forças são trabalhadas mediante suas funções e sua relação com o espaço. Mesmo que os valores das quantidades sejam alterados de acordo com a descrição da situação, a relação funcional permanece a mesma. Ao que parece a Hepburn (2007), Euler derivava suas relações de acordo com a localização dos corpos no espaço, ou seja, a representação matemática o permitia lidar com "*forças e movimentos através de suas relações com corpos e espaços*". Sua análise revela o objeto de investigação, que é uma função, que descreve fenômenos.

2.2 MATÉRIA E INÉRCIA

Quanto à ontologia da matéria, Euler utiliza as expressões "pontos materiais", "corpos rígidos" e "corpos deformáveis". Para Stan (2017), Euler moldou essas entidades matematicamente, todavia, também havia uma metafísica por trás delas; entretanto, estas não

[1] Lagrange também produziu outra teoria unificada, a partir da lei geral do princípio da mínima ação, da qual Euler tinha conhecimento, já que era uma extensão da mecânica variacional euleriana.

[2] Já para Newton, as forças são induzidas por fenômenos de movimento, e não com relacionais funcionais imaginárias.

eram coerentes entre si, tornando uma questão mais complexa definir a teoria da matéria de Euler.

Inércia em Euler (EULER, 1765) é definida como uma força, *vis inertiae*, pois é algo que se opõe à mudança de estado, e não o que causa a mudança de estado. E por causa da inércia, os corpos persistem em seus estados (absolutos e relativos), seja de repouso, seja de movimento uniforme, e então, dessa forma, são providos referenciais inerciais.

Euler apresenta o modo de se medir a inércia de um corpo, que seria sua resistência ao movimento e, assim, define que "*a massa do corpo é sua quantidade de inércia*"[3] (GAUKROGER, 1982, p. 137), e está relacionada ao esforço necessário para movê-lo.

Euler pensava a inércia da mesma maneira que o fazia para a impenetrabilidade, entretanto, não mencionava muito o primeiro conceito. Apenas sabemos que, na visão de Euler, para que o corpo mude seu estado, é necessária uma causa, que é especificada em termos de forças externas. O conceito de inércia não era tão auto-evidente quanto os demais, entretanto, era essencial para a fundação da mecânica de Euler.

2.3 IMPENETRABILIDADE COMO ORIGEM DAS FORÇAS

Os procedimentos para os cálculos de forças em Euler são os mesmos para os casos estático e dinâmico; os efeitos das forças são proporcionais às próprias forças. Além disso, Euler faz distinção entre potência e *vis*. Para ele, potência seria a força responsável pela mudança no estado de movimento do corpo (COELHO, 2018), e *vis* seria uma noção mais geral, incluindo a potência, mas estaria maiormente relacionada à inércia do corpo, que por sua vez estaria relacionada à sua ocupação no espaço; posteriormente, Euler reduz a *vis inertia* à força de impenetrabilidade, e "*discute o papel da impenetrabilidade na mudança de estado dos outros corpos através do contato*" (HEPBURN, 2007, p. 22). Assim, este tratou as forças matematicamente de uma maneira que Newton não o fez (SITKO, 2019a), o que levou então, por parte de Euler, a uma desconsideração dessas forças metafísicas, como a *vis inertia*, que não eram representadas matematicamente (HEPBURN, 2007), colocando a dinâmica newtoniana na forma em que a conhecemos hoje, e introduzindo uma série de grandezas definidas agora como coeficientes numéricos e relações entre funções.

Euler considerava os princípios "externos" ao corpo em forma de força, que definem a mudança no estado deste (EULER, 1765). Na ausência de forças, os corpos persistem em seus movimentos, devido à inércia. Um corpo não pode mudar seu estado, mas pode mudar o de outros, ou seja, quando um corpo entra em contato com outro, este segundo "se esforça em perseverar" em seu estado, e isso faz com que seja fornecida uma força para mudar o estado do primeiro corpo. É justamente esse esforço para que não haja a mudança que significa força externa aplicada.

Para Euler, tudo o que é impenetrável possui inércia, ou seja, tudo que exerce esse "esforço em perseverar" possui inércia, e então, a impenetrabilidade é a origem de todas as forças. Se há uma mudança no estado, isso então somente ocorre devido à impenetrabilidade, e seu efeito é a prevenção de penetração (GAUKROGER, 1982). A impenetrabilidade não é quantificável, mas a força é medida em termos da mudança de estado de movimento. Essas forças ocorrem somente onde a penetração é evitada, e impenetrabilidade sempre oferece força suficiente para isso, a qual Euler afirma ser a única forma relevante de forças mecânicas.

Euler afirmava que a força entre dois corpos surge da impenetrabilidade, ou seja, do momento em que eles não podem persistir em seus estados sem que haja penetração (surgem do "medo da penetração", que ocorre somente no impacto, e então, não existem forças que

---

[3] Para Euler, a matemática tinha um papel funcional. Todavia, Euler mantinha, para algumas entidades, o caráter metafísico, como é o caso da força de inércia (HEPBURN, 2007).

atuem a distância (GAUKROGER, 1982)), e assim, uma força surge e altera seu movimento[4]. A partir daí, Euler mostrou como derivar as leis de colisão entre corpos. Assim, pode-se ver que Euler tinha uma concepção cartesiana de mundo pleno de matéria, mas uma atitude newtoniana. Euler acredita que uma ciência matemática do movimento é possível, mesmo que não saibamos as causas das forças, e a única forma de garantir que haja causas que originam essas forças é mostrar que a consideração dessas causas leva a leis de movimento matemáticas bem conhecidas; e essas leis, por sua vez, são expressões da realidade do universo (MARONNE & PANZA, 2014).

Para se compreender como de fato tal força atua, devemos tomar corpos infinitesimalmente pequenos, em períodos infinitesimais e integrarmos para encontrar a mudança no estado de movimento de um período finito (GAUKROGER, 1982). Euler utilizou o princípio estático do equilíbrio para sua mecânica como mecanismo de medida da força, pois afirmava que a distância percorrida por um corpo ao sofrer uma mudança de estado era proporcional à força atuante sobre ele e inversamente proporcional à sua massa. Assim, era estabelecida uma relação entre força e massa, as quais poderiam agora ser medidas. Devido ao tratamento analítico das grandezas em Euler, para este foi possível resolver uma classe muito maior de problemas do que a geometria utilizada por Newton.

Euler imaginava vários corpos esféricos pequenos, e fez a consideração de que estes colidem, resultando assim em forças e mudanças de movimento; caso não existissem forças, os corpos penetrariam uns nos outros, mas eles possuem impenetrabilidade; assim, essa situação seria impossível, e para que ela não ocorra, o resultado são forças sendo exercidas.

O corpo A modifica o corpo B para que A não sofra a penetração, e vice-versa; o princípio interno que mantém A em seu estado é visto por B como uma força no momento do impacto. Há então uma força externa atuando em B, que não está dentro de A. Estas são forças externas aos corpos, mas diferentes daquelas de gravitação, que atuam a distância, as quais Euler não aceita[5]. Para Euler, força externa não é algo além dos limites do corpo a distância, mas é externa ao corpo em que esta atua. Para ele, na mecânica, todas as forças são de contato, e provêm da impenetrabilidade e da inércia.

Entretanto, nesse mesmo exemplo, se tivermos dois corpos um ao lado do outro, mesmo com impenetrabilidade e inércia, não ocorre uma alteração no movimento, pois não há o "*medo da penetração*" (GAUKROGER, 1982, p. 147); assim, é necessário que um dos corpos pelo menos esteja em movimento e venha a entrar em contato. Dessa forma, faz-se necessária a introdução do conceito de extensão, pois se os corpos nunca se movem no espaço, não há colisão, e consequentemente, não há forças.

2.4 EXTENSÃO

Para Euler, a posição dos corpos no espaço (extensão) tinha um papel muito importante: movimentos seriam mudanças de posição no espaço, expressos através de funções. Dessa forma, havia um compromisso com a natureza dos corpos e suas reais posições no espaço.

No que diz respeito à extensão, Euler chama de espaço absoluto aquilo que não podemos conceber, e espaço relativo é aquele que escolhemos como espaço finito para decidir o movimento ou o repouso de um corpo. O espaço absoluto para Euler seria um conceito puramente matemático e as leis da mecânica se aplicariam nesse espaço. Já que qualquer ideia que temos de movimento é relativa, mesmo essas leis não são suficientes para determinar o movimento absoluto de um corpo. Euler defendia que não é necessário então estudar o

---

[4] Se essas conclusões estivessem corretas, suas considerações seriam bem mais claras que as de Newton. As forças para Newton não eram internas ao corpo, e eram interpretadas pelos princípios internos experienciados pelos outros corpos. Newton considerava os corpos como impenetráveis, entretanto, não tinham o mesmo papel que para Euler.
[5] Euler leva em conta a força de gravitação, mas acredita que esta atua por algum mecanismo de contato.

movimento absoluto, já que o relativo, ao nosso alcance, é regido pelas mesmas leis (MALTESE, 2000). Dessa forma, pode-se transformar o referencial convenientemente.

2.5 ESSÊNCIA DO MOVIMENTO

Gaukroger argumenta (1982) que a essência do movimento não poderia ser a força, já que Euler queria esclarecer o que esta significava, tratando-a, portanto, em termos de impenetrabilidade, e, além disso, somente um tratamento e definição cinemáticos não apresentariam, como Euler queria, a realidade da força, que para ele, era um ente que necessitava de elucidação. Euler não teria tomado força como um conceito primitivo porque existia na época certa tensão quanto ao uso da dinâmica newtoniana, pois de um lado, havia corpos inertes ocupando um espaço inerte, e do outro, a ideia de ação à distância. O ponto de maior discussão era essa ação à distância. Então, se Euler fundamentasse sua mecânica em algo que fosse aceito pela maioria e fosse autoevidente, estaria em vantagem: esse "algo" era a impenetrabilidade. Havia concepções intuitivas de forças, entretanto, estas podiam não estar de acordo com a lei newtoniana de inércia, que Euler desejava adotar; entretanto, não haveria problemas com o uso da impenetrabilidade.

Contudo, a relação entre impenetrabilidade, extensão e inércia não era visível imediatamente. O que Euler pretendia dizer afinal é que se há mobilidade, então há inércia, a qual não se refere à massa inercial, conceito que ainda não havia sido introduzido, mas à mudança de estado do corpo que fora submetido a uma força externa. Impenetrabilidade e inércia estão relacionadas quanto à origem das forças. Para Euler, uma sombra, por exemplo, conforme explica Gaukroger (1982), possuiria inércia, pois manteria seu estado de movimento se não houvesse forças, entretanto, como não seria impenetrável, não forneceria forças que modificassem o estado de outras sombras; assim, a impenetrabilidade do corpo seria essencial, e faria com que a inércia adquirisse um efeito dinâmico. Entretanto, interpretamos hoje que é a inércia que tem esse efeito dinâmico.

Além disso, conforme os argumentos de Descartes, Euler acreditava que o corpo deveria ser necessariamente impenetrável e ocupar uma extensão. Os argumentos de Euler levam à compreensão de que tendo essa definição autoevidente de corpo, é possível construir "*uma sofisticada mecânica quantitativa*" (GAUKROGER, 1982, p. 142), diferentemente daquela com inúmeras entidades, como a de Newton.

2.6 FORÇAS ABSOLUTAS E RELATIVAS

Euler entendia forças absolutas e relativas também de maneiras diferentes. As absolutas atuariam da mesma maneira, independentemente do estado de movimento do corpo, como a gravidade, e já as relativas atuariam de maneiras diferentes, como a resistência dos fluidos (MALTESE, 2000). Assim, Euler afirma que fará de problemas de forças relativas os casos de corpos em meios resistentes. Para forças absolutas, assume-se que o movimento ocorre sempre no vácuo.

Para considerarmos se Euler estabeleceu uma noção clara de força, antes temos que ver se esse conceito é válido para todas as situações em que detectamos a ação de forças (GAUKROGER, 1982). Essas forças são de contato e repulsivas, no sentido de resistir, e não atuar. Há outros tipos de força, como a de gravitação, e Euler estava ciente disso; quanto a elas, tinha uma atitude instrumentalista, no sentido de utilizá-las, mas não saber explicar suas causas. Gaukroger conclui que não foi suficiente a definição de forças de contato repulsivas como as únicas forças existentes; era necessário poder explicar as forças gravitacionais, elétricas, magnéticas. A posição de Gaukroger sobre o assunto também (assim como Stan) é de que Euler deixou "*mais inexplicado do que explicado*" (1982, p. 150). Gaukroger afirma que o projeto fundacional de Euler não foi perfeito, uma vez que, do ponto de vista metafísico, a lei da inércia não podia ser justificada, e do ponto de vista qualitativo, a definição de forças repulsivas de contato como únicas não era clara.

No entanto, mesmo com essas pequenas complicações nas concepções, um estudioso que recorra às obras de Euler as encontrará de maneira clara e moderna, assim como estudamos mecânica atualmente (TRUESDELL, 1975), diferentemente das demais obras do mesmo período, que trazem certa dificuldade de compreensão.

3 TRAJETÓRIA E REALIZAÇÕES DE EULER

Euler se interessou pela matemática logo em 1726, ainda enquanto estudante, com o problema da queda mais rápida em um meio resistente, como amplamente tratado em sua obra *Mechanica*, de 1736, o primeiro tratado de mecânica a partir do método da análise, ou seja, primeiro tratado de mecânica cujos problemas são resolvidos a partir de processos puramente matemáticos. Em *Mechanica*, Euler visa tratar de corpos rígidos, flexíveis, elásticos, mecânica dos fluidos e também de mecânica celeste, que eram classes de problemas até então não possíveis de serem tratadas. Nessa obra, definiu o conceito de corpo (vago na obra de Newton em que só era possível resolver problemas de massas pontuais), utilizou a aceleração como uma grandeza cinemática e estabeleceu o conceito de vetor não somente para forças estáticas, como era feito por Newton, mas também para velocidades e acelerações.

Nesse tratado, somente corpos de massas pontuais foram abordados, sendo os demais colocados em obras posteriores. É o primeiro tratado de Mecânica Analítica que faz uso do cálculo diferencial e integral (que seria essencial para a emergência de $F = ma$), e trata na maior parte das vezes da dinâmica do ponto material. O trabalho obteve sucesso, sendo grandemente elogiado por grandes nomes, como Johann Bernoulli. Desde a redação de *Mechanica*, Euler foi colocado como um dos principais matemáticos europeus, embora alguns tratem seus trabalhos como matemática pura. Depois disso, o sistema euleriano dominou o continente. Alguns críticos britânicos identificam esse grande abismo entre a matemática britânica e a do continente, e colocam como razão disso o uso do método euleriano em vez de geometria, mas se isso é verdade, não se sabe ao certo[6]. O fato é que a *Mechanica* foi o pontapé inicial de Euler para a construção do princípio fundamental da mecânica[7].

Prosseguindo com seus estudos na área, na década de 1740, Euler discorria a respeito da variedade de princípios disponíveis para a descrição dos movimentos, entretanto, afirmava que todos podiam ser reduzidos a um único e fundamental, e é essa busca que o levou à segunda lei do movimento que hoje conhecemos, e que foi escrita em 1752.

A economia do século XVIII na Europa era em grande parte voltada às navegações, e dessa forma, era necessário que estudos fossem feitos a fim de otimizar processos na engenharia naval, como problemas com a direção dos navios e a transmissão de momento angular nas engrenagens. Em consequência dessas necessidades sócio-econômicas, a Academia francesa anualmente oferecia prêmios como incentivo a estudos relacionados a tais problemas, suas soluções e melhoramentos. Essas necessidades da engenharia e a premiação motivaram Euler a se aprofundar no tema. Este sempre concorria aos prêmios e por diversas vezes ganhou (STAN, 2017). Desse concurso surgiu o tratado *Scientia Navalis* (1749a), dividido em dois volumes: um marco histórico no desenvolvimento da mecânica racional. Na obra, além dos estudos de hidrostática, estão contidos, no primeiro volume, os primeiros estudos da mecânica do corpo

[6] Sobre o uso da matemática analítica na ilha e no continente, ver Guicciardini (2004).
[7] SITKO (2019b) mostra o envolvimento de Euler e de outros nomes como os Bernoullis na Mecânica Analítica e como as atuações desses cientistas culminaram na produção de $F = ma$.

rígido de Euler. O segundo volume da obra aplica as teorias às construções de navios e navegação.

A preocupação com as ciências navais pode mostrar que, ao contrário da imagem que se faz de Euler como um matemático que ignorava a aplicação, na verdade o revela como uma pessoa que se preocupava com a física e melhoramento das condições das questões navais. Em *Scientia Navalis*, ele começa a trabalhar com a otimização de *designs*, cinemática e dinâmica dos corpos rígidos através do uso de equações diferenciais. Para Truesdell (*apud* CALINGER, 1996), a experiência era de fundamental importância para Euler, uma vez que este formulava equações que se aplicavam ao mundo físico real.
de newtoniano em certos aspectos, conforme Maugin e também Hepburn (MAUGIN, 2014; Hepburn, 2007) defendem, Euler também foi o "inventor" do cálculo variacional como base para solução de problemas de mecânica, generalizando a abordagem de Lagrange ao atacar o problema da braquistócrona (SITKO, 2019b).

Euler trabalhou ainda posteriormente com o movimento dos sólidos. Sua importante obra nesse tema é a memória *Decouverte d'un nouveau principe de Mecánique* (1752), em que aparece pela primeira vez a segunda lei do movimento[8] no formato moderno. No artigo de 1752, Euler introduz as equações gerais do movimento para um corpo rígido com relação ao seu centro de massa, sobre o qual atua uma força externa. Também aparecem no artigo a velocidade angular e o tensor de inércia. A expressão "momento de inércia" foi cunhado por Euler, embora já houvesse sido também estudado por Huygens anteriormente.

O tratado *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, de 1765, traz com detalhes seu trabalho em mecânica (seria um aperfeiçoamento do trabalho de 1752), em que, além de tratar massas pontuais, também aborda o problema do corpo rígido sujeito a forças externas, fazendo uso de equações diferenciais para a descrição do movimento, e traz a novidade de um sistema de coordenadas fixo e um móvel, movendo-se juntamente ao corpo, que seria o uso de três direções para se determinar velocidade e direção de movimentos com relação a referenciais. Euler também formulou o momento angular e a concepção de momento de inércia sobre o centro de massa, constituindo as leis de Euler, válidas para pontos materiais ou corpos contínuos.

Entretanto, foi somente em 1776 que Euler encontrou[9] a formulação definitiva dos princípios do momento angular e momento linear, em *Nova methodus motum corporum rigidorum degerminandi*, como dois princípios independentes e fundamentais para a descrição completa de um sistema mecânico. Esses dois princípios é o que conhecemos hoje como lei de Newton para o caso linear e angular, na forma impulso-quantidade de movimento.

4 OS ELEMENTOS UTILIZADO POR EULER PARA A PRODUÇÃO DE F=MA

4.1 FORMALISMO LEIBNIZIANO E TRATAMENTO DE CORPOS RÍGIDOS

Em *Mechanica*, Euler utilizou o formalismo leibniziano e pensou as relações entre as quantidades mecânicas como funções, mas ainda assim, seguia a tradição do uso de coordenadas intrínsecas e curvaturas de trajetórias (ao trabalhar com forças cuja direção é a mesma do movimento). Foi somente na publicação de 1752 que Euler apresentou o uso de um referencial exterior ao sistema e a invariância das leis com relação a diferentes referenciais em movimento uniforme[10].

[8] Ou como a conhecemos hoje, segunda lei de Newton.
[9] É importante salientar que estamos descrevendo apenas os momentos em que se nota alguma relação para o desenvolvimento de $F = ma$, entretanto, Euler estava a todo momento desenvolvendo trabalhos em várias áreas de estudo.
[10] Não significa que foi o único na época, mas foi um importante trabalho a respeito do assunto.

Inicialmente, a obra de Euler tratava apenas de pontos materiais, mas este já fazia a distinção em relação aos corpos rígidos. No prefácio de *Mechanica*, dá-se a entender que, para Euler, os princípios até então disponíveis conseguem resolver problemas para corpos pontuais, mas não os de extensão finita, quanto mais os flexíveis ou fluidos. Euler encontra a constante da relação dv/dt na resolução do problema do movimento acelerado e atribui o crédito a Galileu; os *Principia* somente são citados com relação à força de inércia.

4.2 UNIFICAÇÃO DO CONCEITO DE FORÇA

Euler foi o responsável pela unificação do conceito de força, a partir dos estudos de colisão: a colisão era reduzida a um fenômeno contínuo, e era a partir dela que este também trabalhava com os corpos rígidos. Para o estudo dos problemas com corpos finitos em que a reta que liga os centros de gravidade dos corpos não passa pelo ponto de contato (*percussio excentrica*[11]), ele afirma que os princípios disponíveis não são suficientes. Com a ajuda de conceitos descobertos por Daniel Bernoulli[12], Euler foi capaz de descrever tais sistemas. Em sua obra de 1738, Euler afirma (Maltese, 1992) que seus desenvolvimentos são feitos a partir de princípios fundamentais da mecânica ($dv = adt$), diferentemente das abordagens de outros matemáticos.

Euler fala de dois tipos de força, a *vis viva* e a *vis mortua*; a primeira está relacionada a ações contínuas e a segunda a ações instantâneas; o objetivo de Euler é mostrar que essas são a mesma coisa, e assim acabar com a ambiguidade entre $F = ma$ e $F = \Delta(mv)$. Euler mostra que não existem colisões instantâneas, mas que todas ocorrem em um intervalo de tempo muito pequeno, mas finito. Assim, reúne as forças de pressão e de colisão: a força de colisão é a ação de uma pressão variável no tempo (MALTESE, 1992). Além da mudança de movimento causada, é necessário também perceber quanto de força o corpo suporta. Em todas as situações, Euler entende a colisão como um elástico colocado entre os corpos: seu comportamento é definido conforme a colisão seja elástica ou inelástica. Como defende Maltese (1992), esse quadro conceitual foi necessário para que a segunda lei do movimento na forma moderna pudesse ser elaborada.

As forças são consideradas como “pressões” que obedecem a $dv = a\ dt$, estando a um passo da redação de $F = ma$, pois acabam com a ambiguidade das leis até então descritas: o fenômeno da queda livre (ou movimento acelerado) era entendido como a ação contínua de forças, enquanto que a colisão era vista como a ação discreta destas. Para Euler, cada movimento infinitesimal era uniformemente acelerado, e usa essa afirmação para descrever a dinâmica na forma diferencial[13].

Da mesma forma, já era utilizada por vários autores, mas de maneiras diferentes, a lei da conservação do momento angular. Euler também fez a lei como advinda de $dv = a\ dt$, assim como Daniel Bernoulli, entretanto, utiliza-a de maneira independente. Esses princípios permitem tratar a *percussio excentrica*. Para Maltese (1992), é justamente o uso de princípios

---

[11] Na *percussio excentrica,* Euler já havia confirmado que possuía o princípio do movimento de um corpo rígido, entretanto, não o iria demonstrar; nessa memória em questão (de 1737) ele ainda não demonstra, mas o explica detalhadamente, de maneira a mostrar a equação da variação do momento angular em relação ao momento das forças externas (MALTESE, 1992). Dessa técnica, pode-se obter a conservação da *vis viva*; vale lembrar que os movimentos de rotação tratados nessas memórias são com relação a um eixo fixo. Aqueles cujo eixo não era fixo exigiram a elaboração de um novo princípio, que é o assunto deste trabalho.

[12] Os dois mantinham correspondências a respeito do tema.

[13] Para Newton, a força tinha essas duas faces, a discreta e a contínua, e assim, não haveria problemas em se carregar as duas versões. Nesse período, então, havia os dualismos entre duro/elástico, duração finita/instantânea da colisão; isso era essencial para o desenvolvimento da segunda lei do movimento (ou melhor, para o não desenvolvimento dessa lei por Newton) da forma como a conhecemos hoje, conhecimento devido essencialmente a Euler.

gerais e que podem ser utilizados independentemente, em vez de leis de conservação, que traz a superioridade dos estudos de Euler com relação aos seus contemporâneos.

4.3 DINÂMICA DOS FLUIDOS E DECOMPOSIÇÃO DOS MOVIMENTOS

Foi no estudo da dinâmica dos fluidos, por volta de 1737, que Euler percebeu os novos princípios necessários para a descrição do sistema entre translação e rotação do corpo rígido em torno de um eixo fixo através de sua decomposição em movimentos independentes (MALTESE, 1992). Dentre as razões que levaram Euler a investigar o assunto estava a necessidade de engenharia da época com relação à transmissão de momento angular e à montagem das engrenagens dos guinchos que puxavam as âncoras dos navios. Como já mencionado, a Academia de Ciências de Paris oferecia prêmios para os que apresentassem melhorias, ora em mecânica celeste, ora em navegação. O prêmio anual da Academia em 1737 era para o tema de otimização desse tipo de processo. Euler foi um dos ganhadores do prêmio, com o trabalho *Dissertation sur la meilleure construction du cabestan* (EULER, 1745). A grande intuição de Euler foi perceber que o princípio newtoniano da segunda lei, válido para movimentos retilíneos, tinha uma equivalência na rotação de corpos rígidos: na redação do *Dissertation*, Euler descreve o movimento de rotação e as forças envolvidas como um análogo ao retilíneo (descrito na segunda lei, proposta por Newton). Posteriormente, esses achados foram publicados em seu *Scientia navalis*, de 1749.

Para Euler, os princípios utilizados para a descrição de um sistema de pontos materiais eram diferentes daqueles de um sistema de corpos rígidos; um avanço conceitual nessa direção também era necessário, no sentido deste perceber que $dv = a\,dt$ poderia ser aplicado a cada elemento do sistema. Essa percepção ocorreu para Euler com o mesmo método que Johann Bernoulli tratou o movimento de fluidos em *Hydraulica* (1742). Euler carregou esse método para a publicação do *Scientia navalis*. Nessa obra, o segundo maior tratado de Euler, depois de *Mechanica*, estão contidos os princípios de hidrostática e a teoria da resistência dos fluidos. Ali também se encontra a primeira formulação da mecânica de corpos rígidos em três dimensões e a enunciação do momento angular. Euler percebeu então, com o trabalho sobre engrenagens, de 1739, que havia um análogo entre o caso linear e o rotatório. Em *Scientia navalis*, Euler escreveu o equivalente para a aceleração angular de um corpo rígido em torno de um eixo de rotação fixo como o torque dividido pelo momento de inércia[14] (STAN, 2017).

Em *Scientia navalis*, Euler já afirmava que se soubermos o movimento progressivo de um corpo e seu movimento em torno de um eixo, podemos determinar todo o movimento do corpo[15]. O movimento progressivo era comandado pelo princípio $dv = a\,dt$. Para construir um princípio de movimento rotatório, era necessário saber[16] que os movimentos eram independentes, e para que essa independência fosse descrita, Euler utilizou o conceito de invariância dos movimentos. Inicialmente, trabalhou com sistemas de massas pontuais, de onde extraiu que o sistema age como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro de massa, e também que as forças de vínculo não alteram o movimento. Depois disso, Euler estabeleceu um princípio para descrever o movimento rotatório.

Dessa forma, fazendo uso do movimento relativo, pode-se estudar o movimento rotatório como se o corpo estivesse em repouso[17]. Se tivermos dois movimentos independentes,

---

[14] Esse termo seria cunhado por ele posteriormente para expressar a resistência de uma massa em rotação, dependendo de sua forma.
[15] Euler referia-se a navios, que era o problema da época e, consequentemente, o estipulado para a premiação da Academia.
[16] Apesar de que, segundo Maltese (2000), Euler já sabia disso desde 1727.
[17] De qualquer forma, nos anos de 1740, Euler já utilizava esse artifício da relatividade do movimento a fim de "isolar" o movimento de translação para estudo.

serão necessários dois princípios. Assim, Euler enuncia o princípio do movimento rotatório também em *Scientia navalis*. Entretanto, ele não tinha consciência ainda de que eram dois princípios fundamentais, o que seria comprovado somente em 1760 e publicado em 1765, em *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (EULER, 1765).

4.4 MOVIMENTOS DE ROTAÇÃO

As soluções descritas em *Scientia navalis* ainda eram problemas específicos com eixo de rotação fixo. Quando a solução para o eixo não fixo aparecer, teremos a segunda lei na forma moderna. Anteriormente, Euler havia tratado o movimento de um corpo rígido em torno de um eixo fixo ao encontrar os princípios necessários por acaso, ao trabalhar com oscilações em corpos imersos em água, decompondo o movimento entre um movimento de rotação e um de translação. Era um passo à frente de sua *Mechanica*, entretanto, ainda não era um princípio geral, já que tratava apenas de eixos fixos, e era insuficiente para o tratamento de corpos contínuos deformáveis (MALTESE, 1992).

É no estudo dos movimentos com eixo de rotação móvel que Euler precisou procurar novos princípios e chegou ao princípio fundamental. As primeiras tentativas de tratamento do movimento de um corpo em uma superfície móvel são as de Euler e Johann Bernoulli. Nestas, Euler faz uso do princípio da *vis viva* (conservação de energia), mas relata não estar satisfeito e que procura soluções em termos de princípios primários da mecânica.

A fim de se obter uma teoria geral, que fosse válida também para eixos móveis, Euler só teria entendimento depois de 1749, ao ler o material de d'Alembert a respeito da precessão dos equinócios, *Recherches sur la precession des equinoxes* (STAN, 2017). Ao que parece, a compreensão de Euler veio com a prova de d'Alembert de que num movimento rotatório sempre há um eixo de rotação instantâneo com relação a algum referencial inercial.

4.5 COORDENADAS CARTESIANAS E AS PRIMEIRAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Para Truesdell e Maltese (1992), foi na *Hydraulica* (BERNOULLI, 1742)[18] de Johann Bernoulli que Euler encontrou os princípios genuínos que utilizaria para elaborar a segunda lei na forma moderna (Euler teve acesso a esta através de uma carta em 1739). Entretanto, a novidade de Johann que chama a atenção de Euler está no uso do método, assim como do conceito de pressão, estudando a dinâmica interna do fluido, ou seja, Johann baseou sua teoria no princípio primário $dv = a\,dt$, diferentemente de Daniel, que fez uso da conservação de energia. É importante frisar que foi também Johann Bernoulli quem introduziu em 1742 o uso de coordenadas cartesianas de modo geral, o que foi essencial para a resolução do problema, auxiliando na generalização e facilidade na resolução de problemas mais elaborados, assim como a eliminação do uso das velocidades. Euler também se inspirou no método de Johann Bernoulli com relação ao uso das primeiras equações diferenciais de movimento, que foram propostas por Bernoulli e d'Alembert em 1743 (DIAS, 2017).

Euler se baseou no trabalho de Johann sobre a hidráulica e produziu um tratamento de sistemas vinculados similar, porém, mais geral e mais claro. Em 1744, Euler apresentou as equações diferenciais para um sistema de barras rígidas conectadas, fazendo uso das coordenadas cartesianas; foi a primeira vez que apareceu o método newtoniano como hoje utilizamos. Outros cientistas estiveram muito perto da enunciação da lei, como Taylor e d'Alembert, entretanto, ao fazer uso de hipóteses integrativas e limitar as resoluções a certos

[18] No episódio da construção dessa obra, há uma disputa entre o pai e o filho Daniel, uma vez que Johann roubou as ideias do filho e as incluiu em sua obra, publicando-a antes para levar o mérito.

tipos de problemas pela falta de uso de derivadas parciais, desviaram-se da tão esperada generalização. Para Truesdell (1955 *apud* MALTESE,1992), Euler utilizou a essência do que Johann fez para os infinitesimais e aplicou aos contínuos.

Euler defendeu o importante uso do sistema cartesiano de coordenadas, a fim de evitar demasiados cálculos de curva de trajetórias, assim como o fornecimento da direção, por exemplo, da velocidade fornecida pelo sistema. Para Truesdell (1960), a importância não está somente nessa facilidade, mas na naturalidade com que a soma vetorial é realizada, e também na trivialidade com que as propriedades do momento e energia cinética são descobertas. Conforme Meli (1993), o uso das coordenadas cartesianas transformou a mecânica, apesar desta não ter ocorrido repentinamente.

4.6 MOMENTO ANGULAR

Maltese (1992) comenta a respeito da carta que Euler recebeu de Daniel Bernoulli, em 1743, acerca do problema de três corpos conectados por um fio, a respeito da insuficiência dos princípios disponíveis e da necessidade da busca de princípios gerais do movimento. Nela, Daniel Bernoulli comenta com Euler acerca do problema do corpo móvel no tubo que rotaciona, que havia conseguido uma solução sem necessitar de derivadas segundas e expressa sua alegria de ter conseguido deduzir o momento angular por princípios ordinários, ou seja, $dv = a\,dt$, sem sequer utilizar a conservação de energia. Segundo Truesdell (MALTESE, 1992), é daí que surge a ideia disseminada nos livros de Física de que a conservação do momento angular advém da Segunda Lei. Claro que equilíbrio de momento não garante equilíbrio de forças e vice-versa; entretanto, uma ideia errônea disseminada no ensino de física é que os dois princípios são equivalentes e podem ser considerados como apenas um. Tal relação é comumente (e erroneamente) derivada como consequência das "leis de Newton". O trabalho de Daniel é importante já que se pode perceber a compreensão da conservação do momento angular nessa época, e assim, a análise das forças de vínculo.

Segundo Maltese (1992), é possível que Euler, ao ver os trabalhos de Daniel Bernoulli e dos outros contemporâneos, não tenha publicado memórias intermediárias, que foram publicadas somente postumamente, em 1862 (foram 4 memórias), buscando apresentar, de uma vez por todas e antes dos dois primeiros, uma memória que trouxesse um ponto de vista mais geral dos problemas em questão.

No conteúdo dessas memórias, Euler trata o problema, em uma delas, com o uso não explícito do momento angular, e posteriormente, faz o uso explícito dessa conservação. Na última memória, Euler expressa seu desejo pela proposição de uma generalidade, mostrando a vantagem de se resolver o problema via equações de movimento, ao invés de utilizar integrais primeiras, assim como o fez Johann Bernoulli, afirmando que por mais que este último seja de mais fácil aplicação, o primeiro é mais natural (MALTESE, 1992); além disso, Euler chama a atenção para o uso de um segundo princípio para se obter a solução completa do problema, que é o do momento angular. Assim, nos anos de 1740, Euler já colocava seu método em construção acima dos demais.

Dessa forma, Euler não trata mais os problemas particularmente, mas adota um único tipo de solução de maneira geral. Euler não quer utilizar princípios como a conservação de energia, mas princípios primários:

> [...] não é para colocar em dúvida a verdade desse princípio, mas antes para confirmar plenamente de sua veracidade também àqueles que agora duvidam dele através do acordo das minhas soluções com aquelas deduzidas desse princípio (EULER, 1746 *apud* MALTESE, 1992, p. 135-136).

Nas memórias, Euler traz uma equação formalmente igual à segunda lei na forma moderna, entretanto, ainda não conceitualmente igual, já que ainda não utiliza as coordenadas cartesianas nem assume o princípio para cada partícula do corpo ou sistema. Conforme discute Maltese, podemos perceber aí a evolução do pensamento euleriano (1992). Euler afirma que a abordagem é válida para corpos infinitamente pequenos ou nos casos em que sua massa pode ser considerada como concentrada em um único ponto, mas ainda assim comenta sobre a necessidade de se encontrar princípios válidos para corpos extensos (rígidos).

4.7 PROBLEMAS EM ASTRONOMIA

O século XVIII foi um período riquíssimo para o desenvolvimento da Mecânica. Na área de Astronomia não foi diferente: havia muitos debates com relação a questões clássicas, como o problema de três corpos (Terra, Sol, Lua), colocando em cheque a validade da lei da gravitação universal. Euler, Clairaut, e d'Alembert passaram então a estudar o problema dos três corpos, chegando a resultados incompatíveis com a gravitação universal; cerca de um ano e meio depois, Clairaut e d'Alembert conseguiram detectar seus erros; entretanto, Euler demorou mais para encontrá-los, e nesse tempo, tentou "*estender a gravitação ao caso de corpos não esféricos*" (MALTESE, 1992).

Todavia, ao tentar fazer isso, os princípios primários se tornaram insuficientes, o que o levou a um maior esforço para generalização e finalmente, à proposição da segunda lei. Euler percebeu, em 1747, que a ideia de planetas em órbitas perfeitamente elípticas é pura abstração (MALTESE, 1992), e que na verdade, a atração não é estabelecida somente a um par de corpos, mas também a terceiros, o que dá origem a deslocamentos dos eixos de rotação dos corpos, ou seja, Euler afirmava que a força gravitacional não decaía exatamente com o inverso do quadrado da distância. Ele acreditava nessa proporcionalidade, entretanto, não para a resultante das forças, já que outras influências acabavam por tornar o movimento mais complexo, e assim, os princípios disponíveis não eram capazes de dar conta disso. Segundo a percepção de Maltese (1992), é o mesmo problema encontrado por Euler na *percussio excentrica*, de 1737, e nas superfícies móveis, de 1746, o qual abriu caminho para a discussão sobre os princípios fundamentais da Mecânica. Além de ter percebido o uso geral de $dv = a\ dt$ no contexto dos contínuos, agora Euler também retira o termo velocidade das equações, que não faz o menor sentido ao se tratar problemas astronômicos, assim como a partir dali passa a utilizar as coordenadas cartesianas, que eliminam diversas complicações na resolução do problema.

Euler formulou o problema de três corpos em 1747 (publicado em 1749b), assim como para vários outros casos, e assim, logo seu método se tornou um método geral, após sessenta anos dos *Principia*, e como Truesdell comenta "*ninguém se surpreendeu; de fato, isso era "óbvio"*" (1960, p. 22). O que Euler fez foi mostrar que esse princípio era geral e aplicável a cada parte de um sistema. Para Maltese (1992), a aparição de um novo princípio já havia sido verificada na publicação dessa memória (sobre precessão dos equinócios e nutação do eixo terrestre). Em tal trabalho, Euler já afirmava que o eixo de rotação móvel agora pode ser explicado através dos princípios que ele irá propor (MALTESE, 1992). Entretanto, deve-se deixar claro que em 1747 Euler fez isso para corpos discretos, mas ainda falhava na descrição de um sistema fluido ou contínuo.

Em 1748, Euler havia ganhado o prêmio da Academia pelo estudo do problema dos três corpos. Sua técnica, como já comentado, foi a de não utilizar a velocidade, mas a relação entre espaço e tempo, e de colocar as equações no sistema cartesiano. Coube a Euler também modelar os planetas como corpos rígidos. Em algum momento depois disso até 1750, é que Euler percebeu que esse esquema era na verdade um novo princípio da mecânica. O que Euler fez então foi generalizar o problema dos corpos celestes como se forças quaisquer atuassem sobre eles, e não especificamente as proporcionais ao inverso do quadrado da distância. Após utilizar um método similar ao da corda vibrante, percebeu que o princípio do momento linear se aplicava a sistemas mecânicos de todos os tipos, o que seria publicado no artigo *Decouverte* (EULER, 1752).

Euler escreve uma carta a d'Alembert (7 de março de 1750, Stan, 2017) contando-lhe sobre suas desventuras anteriores na elaboração dessa solução geral, e anuncia sua descoberta, feita com o auxílio das produções de d'Alembert, que seria lida em 3 de setembro de 1750, à Academia de Berlim (e publicada em 1752).

5 O NOVO PRINCÍPIO: F=MA

No *Découverte*, Euler define corpo rígido[19], movimento de translação e de rotação. Estabelece então que qualquer movimento de um corpo rígido pode ser encarado como uma composição do movimento de rotação e daquele de translação, ou seja, que cada um pode ser trabalhado independentemente do outro, e a determinação de cada um fornece o movimento completo do corpo ou sistema, instante a instante. É abordado inicialmente o caso do eixo de rotação fixo. Em seguida, Euler afirma que com os princípios conhecidos até então não é possível resolver problemas para além desse tipo, como aquele em que o eixo de rotação não passa pelo centro de gravidade; e assim, Euler apresenta um novo caminho em que torna possível o trabalho com esse tipo de problemas, a partir de princípios primários da mecânica. No *Decouverte*, Euler estabelece um princípio de inércia para o movimento de translação e um para o movimento de rotação. Ao fim, Euler consegue estabelecer dois princípios independentes, um para o movimento de translação do centro de gravidade, e um movimento de rotação em torno do centro de gravidade.

Euler apresenta as equações de movimento para um corpo que se move em torno de um eixo de rotação variável. O que há de novo nesse princípio é que agora existe um eixo de rotação instantâneo, e cada elemento do corpo é representado por três funções de coordenadas com relação aos eixos ortogonais, cuja origem é o centro de massa do corpo, fixo no espaço, e principalmente, Euler aplica $dv = a\,dt$ a uma rede de forças, que atuam em cada elemento do corpo. Ele utilizou as mesmas bases que no problema da corda vibrante e nos problemas de hidráulica, generalizando a partir daí, que o princípio poderia ser utilizado para todo tipo de sistema mecânico. Assim, Euler apresenta o novo princípio fundamental:

$$2M\,ddx = Pdt^2; \quad 2M\,ddy = Qdt^2; \quad 2M\,ddz = Rdt^2 \tag{1}$$

P, Q e R são as componentes[20] das forças que atuam sobre o corpo de massa M, considerando-se toda a massa deste em um único ponto. As letras x, y e z representam as distâncias do corpo até os eixos de referência correspondentes, e a constante 2[21] é advinda da álgebra manipulada por Euler como resultado de uma derivação[22]. Em alguns momentos ele traz a constante, e em outros não. Dessa forma, podemos eliminá-lo sem problemas, pois Euler assim o fez nas obras posteriores.

[19] É um corpo composto de várias partículas cuja distância entre elas não muda.
[20] Essas equações (nº 1.7) já haviam sido escritas anteriormente por Euler (1749b) em uma dimensão para o caso das superfícies móveis (MALTESE, 1992). Para Truesdell (1968), o que apareceu no trabalho de 1749 foi o enunciado da segunda lei para pontos materiais (MALTESE, 1992). Somente três anos depois (em 1752) é que Euler perceberia nessa equação uma forma de expressar um novo princípio, não somente para pontos materiais, mas para corpos extensos (MALTESE, 1992, p. 188-189).
[21] Hoje é muito comum o uso de símbolos para representar grandezas, entretanto, naquela época o modo de representação era feito através de segmentos geométricos. Nesse tipo de representação, o uso de constantes some, explicando o porquê do não aparecimento da massa na segunda lei por muito tempo.
[22] Para um maior aprofundamento nessa álgebra ver Dias, 2017.

A equação apresentada por Euler é exatamente a que hoje conhecemos por segunda lei de Newton. As diferenças são apenas com relação às nomenclaturas. Por exemplo, P para Euler é a força na direção x; geralmente nos manuais de Física atuais é utilizado o termo F_x; Q é a componente y da força, ou seja, F_y, e R é a componente z, que também pode ser denotada por F_z. Assim, as equações de Euler podem ser reescritas como:

$$F_x = M\frac{d^2x}{dt^2};\ F_y = M\frac{d^2y}{dt^2};\ F_z = M\frac{d^2z}{dt^2} \tag{2}$$

Como $\frac{d^2x}{dt^2} = a_x;\ \frac{d^2y}{dt^2} = a_y;\ \frac{d^2z}{dt^2} = a_z$,

$$F_x = ma_x;\ F_y = ma_y;\ F_z = ma_z \tag{3}$$

Esse conjunto de equações representa a lei do movimento que conhecemos por segunda lei de Newton, ou seja, $F = ma$.

Euler resolve também o caso em que não há força atuando sobre o corpo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \tag{4}$$

e chega às relações do movimento uniforme[23]. Se não há força, integrando uma vez o conjunto de equações, obteremos que a derivada primeira da posição é igual a uma constante; sabendo que a derivada primeira da posição é a velocidade, deduz-se que a velocidade do corpo é constante.

Euler também trabalha com a parte angular como um caso análogo ao linear. Ele dá o exemplo de um sistema com barras rígidas conectadas entre si. Para a resolução, além das equações newtonianas, ele utiliza o equilíbrio do momento angular com relação ao centro de massa das barras. Euler então aplica a segunda lei a cada elemento do corpo, depois forma o vetor posição. Assim, ele obtém o torque e a aceleração angular. Euler obteve a solução para um eixo fixo no centro de gravidade do corpo. A partir disso, substituindo a aceleração pelo vetor velocidade angular e fazendo algumas reduções, chega às conhecidas equações de Euler para um corpo rígido, sujeito a um torque, considerando-se toda a massa sobre seu centro de massa. Disso, surgem seis componentes do tensor de inércia, que é uma matriz 3 x 3 cuja diagonal seria uma extensão do conceito de massa para os casos de rotação[24].

Para determinar então o movimento angular completo, basta integrar a nova equação sobre o corpo. Assim, por integração, Euler é capaz de obter o incremento do momento angular para o corpo todo. Euler chama esse incremento de "momento de uma força", ou o que conhecemos popularmente como "torque" (STAN, 2017) (repare que o momento angular é análogo ao momento linear e o torque é análogo à força). E assim, Euler consegue decifrar o movimento de um corpo rígido, como nunca antes feito.

6 APERFEIÇOAMENTOS

Mesmo após a "nova descoberta" de 1752, Euler afirma que suas equações se tornariam muito longas ao serem resolvidas. O problema estava em seu referencial fixo no espaço. Devido a isso, os momentos de inércia não eram constantes e a todo momento deveriam ser

[23] Para ver a dedução detalhada e comentada feita por Euler, ver Dias, 2017.
[24] Os outros elementos da matriz referem-se às localizações dos eixos de rotação.

recalculados. Para que essas limitações sejam vencidas, Euler sabe que são necessários maiores avanços conceituais. Demorou ainda mais alguns anos até que Euler percebesse que era necessário um referencial que se movimentasse junto com o corpo, com origem no centro de massa do corpo. Tudo isso foi elaborado para que as equações se tornassem mais simples e para que fosse possível encontrar relações cinemáticas entre esse referencial do centro de massa e um referencial inercial em repouso; isso foi sistematizado na obra *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, de 1765.

Além disso, nessa mesma obra, Euler mostrou que, para um corpo rígido, a inércia é definida pelo tensor de inércia, ou seja, pela distribuição da massa e não simplesmente por esta última, ou seja, agora inércia não poderia mais ser encarada somente como uma tendência dos corpos de permanecerem em movimento, como tratava Newton. Visando a descrição do movimento de rotação, Euler utilizou as descobertas de Andreas Segner (MALTESE, 2000), que percebeu que cada corpo tem três componentes de inércia perpendiculares entre si. Euler também apresenta em *Theoria* o modo de calcular o momento de inércia de alguns corpos, dependendo de seu formato. Nessa obra, Euler cunha o termo “momento de inércia”.

Não acreditamos que se possa dizer que o artigo de 1752 foi um momento crucial em que foi escrita a segunda lei no formato moderno, pois esta ainda não tinha a compreensão que temos hoje. Como vimos, foram necessários mais alguns anos de Euler nesse estudo para a completa elucidação do problema (para além ainda de 1765). Enquanto trabalhava com problemas envolvendo elasticidade, em 1771, Euler se deu conta de que os resultados obtidos para essa classe de problemas estavam sendo obtidos a partir de propriedades particulares das equações e não a partir de leis gerais. Assim, retomando os conhecimentos fornecidos por Jakob Bernoulli, percebeu que era necessário o equilíbrio das forças e também dos torques em suas resoluções. A partir daí, tem-se o primeiro exemplo de leis gerais independentes (CUNHA, 1983).

Euler percebeu que o movimento de um corpo rígido possui uma parte cinemática, além da mecânica. A parte cinemática conta com a descoberta de que o movimento de um corpo rígido é composto de uma rotação e uma translação independentes. A translação ocorre a partir de um ponto referencial arbitrário em movimento retilíneo, e a rotação gira o corpo com relação a três componentes relativas a um certo ponto (a matriz de rotação ortogonal). Esse material foi publicado em 1776, na obra *Formulas generales pro translatione quacunque corporum rigidorum* (EULER, 1776a). Foi a partir dessas verificações que Euler passou a compreender como causas externas alteram o movimento[25]. Dessa forma, Euler obtém 6 equações, 2 para cada eixo, sendo estas uma da força e outra do torque sobre o corpo. Numa outra obra, apresentada em outubro de 1775, uma semana após *Formulas Generales*, e também publicada em 1776, Euler percebe a generalização dos princípios para todas as classes de problemas e assim, encontra a formulação definitiva dos princípios do momento angular e momento linear, em *Nova methodus motum corporum rigidorum degerminandi* (EULER, 1776b).

Em 1776, Euler percebeu que, na realidade, eram necessários dois princípios independentes e gerais para se obter as equações do movimento do sistema: a primeira lei é a de que a força atuando sobre o corpo é igual à taxa de mudança do seu momento linear total, que é equivalente a $F = ma$, e a segunda é a de que o torque total é igual à taxa de mudança no momento angular total, que seria o análogo da segunda lei para o caso angular, $\tau = I\alpha$. Na mecânica de corpos deformáveis ocorre então a introdução da lei do princípio do momento angular para o caso de rotação, que é análoga à segunda lei de Newton, mas que, todavia, não pode ser deduzida a partir dos princípios newtonianos, devido à falta dos conceitos mencionados anteriormente, na época de Newton. Deve-se ressaltar então que as duas leis são

[25] Algo que Newton também não conseguira.

independentes, embora seja possível derivar o caso rotacional a partir do linear para alguns casos particulares.

Escrevendo tais equações em seu formato diferencial, Euler acaba então por compreender que para que a descrição do movimento seja completa, são necessárias duas equações, uma que descreva a força total sobre o corpo, e a outra, o torque total. A primeira é dada pela variação da quantidade de movimento no tempo, em que F é a força resultante, p é o a quantidade de movimento, enquanto a segunda traz a variação do movimento angular no tempo, em que H é o torque (o mesmo τ mencionado anteriormente) e L é o momento angular. São elas:

$$F = \frac{dp}{dt} \tag{5}$$

e

$$H = \frac{dL}{dt} \tag{6}$$

E essas são a segunda lei do movimento (ou segunda lei de Newton) na forma geral, para o caso retilíneo e para o caso angular, respectivamente.

> Lei 1: a força total que atua sobre o corpo é igual à variação temporal da quantidade de movimento total.
> Lei 2: o par total de forças que atua sobre o corpo é igual à variação temporal do total do momento da quantidade de movimento, onde tanto o par como o momento se tomam com relação ao mesmo ponto fixo.

Essas leis eulerianas tornam as leis de Newton aplicáveis a todos os sistemas, sejam de massas pontuais, corpos contínuos ou sistemas discretos.

7 EPÍLOGO

Cientistas passam por um longo percurso conceitual e experimental para elaborar suas teorias e conclusões, não estando livres de errar e oferecer generalizações não verdadeiras: Newton teve muitas limitações e precisou da ajuda de outros. No *Découverte*, Euler afirma que seu princípio é suficiente para determinar o movimento de qualquer sistema, o que não era verdade: o princípio para o caso angular também era necessário (apesar de ele ser um análogo do princípio fundamental). A falha da história da mecânica é acreditar que essa elaboração tenha sido óbvia, e por isso, omitida a participação de Euler em sua construção.

Como afirma Stan,

> a ignorância da mecânica do Iluminismo por muito tempo nos enganou tomando essas integrais como sendo obviamente princípios newtonianos. E ainda, elas são o último fruto de grande conquista dos esforços de Euler, que primeiro estendeu o conceito de força de Newton para além do alcance dos *Principia* (2017, p. 10).

Para se ter noção da limitação da mecânica da época antes de Euler, nem o movimento de rotação em torno de um eixo fixo era determinado, conforme mostra a carta de Daniel Bernoulli a Euler, de 1745 (TRUESDELL, 1975), quanto mais o movimento em torno de um eixo não fixo. Coube a Euler introduzir essas equações, o conceito de vetor velocidade angular, o tensor de inércia, dentre outras contribuições. As ideias de Euler de centro de massa e momento de inércia levaram à formulação moderna da segunda lei, ampliando a extensão do assunto, que, entretanto, continua a ser chamado de lei de Newton (WHITROW, 1971). A introdução dessas grandezas revela um quadro muito diferente daquele proposto por muitos, de que nenhum conceito teria sido desenvolvido após Newton.

Segundo Truesdell (1975), hoje parece óbvia a dedução do formato moderno da segunda lei do movimento, entretanto, sessenta anos de desenvolvimentos e uso de métodos mais complicados foram necessários para a obtenção do "*princípio primário da mecânica*" (palavras de Euler). Ninguém antes havia percebido que este era o único princípio de caráter geral, já que era difícil a compreensão de que a equação $dv = a\,dt$ poderia ser válida mesmo para corpos de extensão finita, e que poderia descrever qualquer sistema mecânico, e isso não era algo óbvio. Mesmo Euler, até 1747, havia teorizado apenas para corpos discretos; ele ainda não entendia o método como geral para qualquer tipo de sistema. A partir dessas realizações, Maltese salienta (1992, p. 56-57) a quantidade de desenvolvimentos obtidos pós-*Principia*, muito além de formalismos matemáticos.

Depois de todos esses estudos e desenvolvimentos ocorridos em torno de Euler, nota-se finalmente que a lei de Newton somente é válida para corpos infinitamente pequenos ou para centros de massa de corpos específicos, não sendo uma lei tão geral quanto se pensava (ou ainda se pensa).

Tais conhecimentos permitem a apresentação de uma Mecânica fruto da construção de um coletivo, de uma ciência que leva tempo para se desenvolver e se consolidar, de desenvolvimentos matemáticos e conceituais, de nomes ocultos mas relevantes (e até mesmo essenciais, como é o caso de Euler) para a construção desse conhecimento. Essa visão crítica da ciência, exemplificada pelas contribuições de Euler para a construção do Princípio Fundamental, deve ser a abordada nas aulas de Física, seja na Educação Básica, seja no Ensino Superior, mostrando uma ciência muito diferente daquela romantizada popularizada.

Espera-se que este texto, o qual não tem intenção de oferecer uma proposta ou encaminhamentos pedagógicos, mas a de apresentar com mais detalhes a contribuição de Euler no episódio, possa contribuir para a compreensão e discussão acerca do trabalho científico, podendo ser utilizando de maneira direta ou indireta (com a transposição didática para o saber escolar, conforme a necessidade e o planejamento do professor e dos alunos) na sala de aula. Como perspectivas futuras, espera-se construir uma proposta didática que acomode as contribuições de Euler, trazendo à toa a discussão acerca da construção da ciência e do trabalho científico, para as aulas de Física.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

BERNOULLI, J. **Hydraulica nunc primum detecta ad demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis,** 1742.

CALINGER, R. Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727–1741). **Historia Mathematica**. v. 3, n. 15, p.121–166, 1996.

COELHO, R. L. On the deduction of Newton's second law. **Acta Mechanica.** v. 229, n. 5, p. 2287–2290, 2018.

CUNHA, E. B. M. Uma nova visão da história da Mecânica. **Revista Brasileira de Ensino de Física,** v. 5, n.1.

DIAS, P. M. C. Leonhard Euler’s “principle of mechanics” (an essay on the foundations of the equations of motion). **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, n.4, e4601, 2017.

EULER, L. Mechanica sive motus scientia analytice exposita. **Opera Omnia**, série II, VOL. 1 E 2, 1736.

EULER, L. Dissertation sur la meilleure construction du cabestan, Originalmente publicado em **Piece qui a remporte le prix de l'academie royale des sciences** 1741 (data de apresentação), p. 29-87, 1745.

EULER, L. **Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus Pars prior complectens theoriam universam de situ ac motu corporum aquae innatantium,** 1749a.

EULER, L. Recherches sur le mouvement des corps celestes em general, **Mem. Acad. Roy. Sci. Berlin,** 1747 (data de apresentação). v.3, p. 43-143, 1749b.

EULER, L. Découverte d’un nouveau principe de Mécanique. **Mem. Acad. Roy. Sci. Berlin,** 1750 (data de apresentação). v. 6, p. 185-217, 1752.

EULER, L. **Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum.** Rostockii. et Gryphiswaldiae: A. E. Roser, 1765.

EULER, L. Formulas generales pro translatione quacunque corporum rigidorum, **Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, v. 20, p. 189-207, 1776a.

EULER, L. Nova methodus motum corporum rigidorum degerminandi. **Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae.** v.20, p. 208-238, 1776b.

EULER, L. **Letters of Euler on different subjects in natural philosophy addressed to a german princess** (D. Brewster Trad, 3ª ed.), Londres, 1823.

GAUKROGER, S. The Metaphysics of Impenetrability: Euler's Conception of Force. **The British Journal for the History of Science.** v.15, n.2, p.132-154, 1982.

GUICCIARDINI, N. Dot-Age: Newton’s mathematical legacy in the eighteenth century. **Early Science and Medicine**. Newtonianism: Mathematical and 'Experimental'. v. 9, n.3, p.218-256, 2004.

HEPBURN, B. S. **Equilibirum and explanation in 18th century mechanics**. (Tese de doutorado). 134f. Faculty of arts and sciences. University of Pittsburgh. Pittsburgh, 2007.

HERMANN, J. **Phoronomia sive de viribus et motivus corporum solidorum et fluidorum libri duo.** Amsterdam, 1716.

MALTESE, G. **La storia di “F=ma”** – La seconda legge del moto nel XVIII secolo. Firenze: Biblioteca di nuncius, 1992.

MALTESE, G. On the Relativity of Motion in Leonhard Euler's Science. **Arch. Hist. Exact Sci.** v.54, p.319–348, 2000.

MARONNE, S. & PANZA, M. Euler, Reader of Newton: Mechanics and Algebraic Analysis. **Advances in Historical Studies.** v.3, n.1, p.12-21, 2014.

MAUGIN, G. A. **Continuum Mechanics Through the Eighteenth and Nineteenth Centuries** - Historical Perspectives from John Bernoulli (1727) to Ernst Hellinger (1914). Switzerland: Springer Internacional Publishing, 2014.

MELI, D. B. The emergence of reference frames and the transformation of mechanics in the Enlightenment. **Historical Studies in the Physical Sciences,** v.23, p.201–335, 1993.

SITKO, C. M. Why Newton's Second Law is not F=ma. **Acta Scientiae**. v. 21, n. 1, p. 83-94, 2019a.

SITKO, C. M. Os desenvolvimentos da Mecânica Analítica que culminaram na elaboração de F=ma. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física.** v. 36, n. 1, 2019b.

SITKO, C. M. For an undistorted view of Newton's Second Law. **Revista Acta Scientiae**, v. 22, p. 122-133, 2020.

STAN, M. Euler, Newton, and Foundations for Mechanics. In Chris Smeenk & Eric Schliesser (eds.). **The Oxford Handbook of Newton.** (1-22). Oxford University Press, 2017.TRUESDELL, C. Rational Fluid Mechanics, 1687-1765. *In*: C. A. Truesdell (Ed.), **Opera Omnia** (Series II, Vol. 12). Lausanne: Orell Füssli, 1955.

TRUESDELL, C. **The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638-1788.** Birkhäuser Basel, 1960.

TRUESDELL, C. **Essays in the History of Mechanics.** New York: Springer-Verlag, 1968.

TRUESDELL, C. **Ensayos de historia de la mecânica** (J. C. N. Howard & E. T. Perez-Relaño Trad). Madrid: Tecnos, 1975.

WHITROW, G. The laws of motion. **The British Journal for the History of Science**. v.5, n.19, p.217–234, 1971.