

Vitruvian Cogitationes - RVC

A GEOMETRIA DOS FRACTAIS E OS TIPOS DE TAREFAS PROPOSTOS EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

LA GEOMETRÍA FRACTAL Y LOS TIPOS DE TAREFAS PROPUESTAS EM LOS LIBROS DE TEXTO DE ESCUELA SECUNDARIA

THE FRACTAL GEOMETRY AND THE TYPES OF TASKS PROPOSED IN HIGH SCHOOL TEXTBOOKS

Arielle Rodrigues Silveira

Universidade Estadual de Maringá – UEM; ariellerodrigues01@gmail.com

 <https://orcid.org/0009-0001-1572-9932>

Mariana Moran

Universidade Estadual de Maringá – UEM; mbarroso@uem.br

 <https://orcid.org/0000-0001-8887-8560>

Resumo: O presente artigo detém resultados obtidos durante uma pesquisa de iniciação científica, cujo objetivo foi analisar duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio acerca do ensino da geometria dos fractais. O estudo de elementos da geometria dos fractais propicia o desenvolvimento do pensamento geométrico, bem como a exploração de diferentes conceitos matemáticos através de construções geométricas que, geralmente são atrativas aos alunos devido a beleza visual e seu padrão de regularidade, presentes nos fractais. Outrossim, além da beleza visual dos fractais, recorreu-se como aporte teórico e metodológico, à Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, a qual possibilitou uma Organização Matemática com base na investigação dos tipos de tarefas contemplados nas abordagens de geometria dos fractais nos livros didáticos analisados e aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2021. Ao investigar e classificar tais tipos de tarefas, identificou-se habilidades e objetos de conhecimento presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Palavras-chave: Geometria dos fractais. Teoria Antropológica do Didático. Livro Didático.

Resumen: *El presente artículo presenta los resultados obtenidos durante una investigación científica de iniciación, cuyo objetivo fue analizar dos colecciones de libros de texto sobre educación en Geometría Fractal con el respaldo de la Teoría Antropológica de la Didáctica, de Yves Chevallard. El estudio de elementos de la Geometría Fractal promueve el pensamiento geométrico, así como la exploración de diferentes conceptos matemáticos a través de construcciones geométricas que generalmente resultan atractivas para los estudiantes debido a la belleza visual presente en los fractales. Además, informamos que tomamos como principio*

en este trabajo una Organización Matemática, basada en la investigación de tipos de tareas en enfoques de la Geometría Fractal en los libros de texto de la Nueva Educación Secundaria, aprobados por el Programa Nacional de Libro y Material Didáctico de 2021. Al investigar y clasificar estas tareas, identificamos habilidades y objetos de conocimiento presentes en la Base Nacional Común Curricular.

Palabras-clave: Geometría Fractal. Teoría Antropológica de la Didáctica. Libro Didáctico.

Abstract: The current article presents the results obtained during a scientific initiation research, whose objective was to analyze two collections of textbooks about the teaching of Fractal Geometry with the support of the Anthropological Theory of Didactics, by Yves Chevallard. Studying elements of Fractal Geometry fosters the development of geometric thinking and the exploration of diverse mathematical concepts through geometric constructions that are often appealing to students due to the visual beauty inherent in fractals. Furthermore, we inform that in addition to the visual beauty of fractals, we took as a principle in this work a Mathematical Organization, based on the investigation of the types of tasks included in the approaches to Fractal Geometry in textbooks of the New High School, approved by the Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) of 2021. By investigating and classifying such types of tasks, we identified skills and objects of knowledge present in the National Common Curricular Base.

Keywords: Fractal Geometry. Anthropological Theory of Didactics. Textbooks.

1 INTRODUÇÃO

Este texto foi elaborado durante uma pesquisa de iniciação científica, cujo objetivo foi investigar, por meio da Teoria Antropológica do Didático (TAD), os tipos de tarefas presentes nas abordagens de geometria dos fractais em duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio aprovado pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2021. Para cumprir tal objetivo, estudamos as abordagens da geometria dos fractais em livros didáticos (LD) do Novo Ensino Médio, que estavam de acordo com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018). Sendo assim, como tínhamos em mãos duas coleções que foram aprovadas no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2021 – Objeto 2, da área de conhecimento *Matemática e suas Tecnologias*, nos dedicamos a pesquisar nestas obras como uma amostra para nossa investigação.

Neste artigo, traremos aspectos gerais da geometria dos fractais, uma contextualização da teoria e da metodologia adotada para esta pesquisa – a Teoria Antropológica do Didático – e apresentaremos os resultados obtidos nas análises dos livros selecionados. Assim, exibiremos os tipos de tarefas contemplados em cada exercício encontrado nos livros didáticos analisados, as discussões referentes às classificações dos conteúdos envolvendo a geometria dos fractais e os objetos de conhecimentos que foram explorados de acordo com a BNCC.

Deste modo, a seguir, faremos uma explanação a respeito das principais características da geometria dos fractais e, em seguida sobre a Teoria Antropológica do Didático. Abordaremos, principalmente no que diz respeito à composição do quarteto praxeológico – Tipo de Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria.

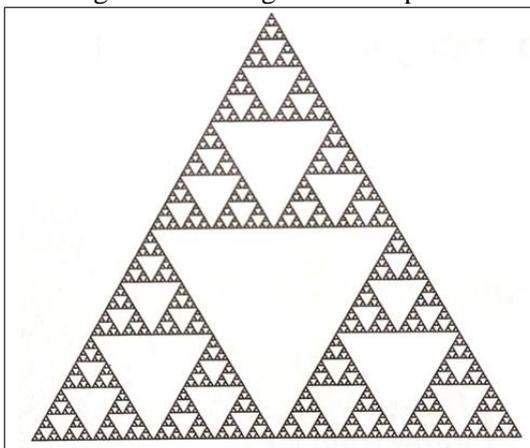
2 A GEOMETRIA DOS FRACTAIS

O conceito de fractal foi introduzido através das pesquisas de Benoit Mandelbrot analisando objetos que não eram compreendidos pela geometria euclidiana. Mandelbrot

também definiu três características para se obter um fractal: autossimilaridade, dimensão fracionária e complexidade infinita. A característica de autossimilaridade proporciona encontrar padrões presentes nas irregularidades dos fractais; a dimensão fracionária refere-se a dimensão de um fractal que pode ser um número fracionário; e a complexidade infinita explica que podemos repetir infinitas vezes os processos geradores de um fractal sem de fato obter a sua imagem final.

A seguir, traremos o exemplo do fractal Triângulo de Sierpinski, em que é possível observarmos as características mencionadas anteriormente:

Figura 1 – Triângulo de Sierpinski



Fonte: Teixeira (2020, p. 148).

A geometria dos fractais pode ser adotada para explicar diferentes conceitos matemáticos. As Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCE) recomendam que seja desenvolvido o conteúdo de Geometrias não Euclidianas, devendo este ser aprimorado no Ensino Médio. O mesmo documento indica que “Na Geometria dos Fractais pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski” (Paraná, 2008, p. 57).

Barbosa (2005, p. 19) justifica a abordagem da geometria dos fractais em sala de aula baseado em:

[...] conexões com outras ciências; deficiências da Geometria Euclidiana para estudo de formas da natureza [...]; difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização; existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e arte aplicada à construção de fractais [...]; sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

O Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná sugere o estudo dos fractais porque ele “permite que os estudantes desenvolvam a criatividade, a intuição, e a imaginação, percebendo os processos de regularidades e interação dessas entidades” (Paraná, 2021, p. 541).

No que diz respeito à Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), nota-se que a temática dos fractais está presente em uma das habilidades na parte da BNCC para o Ensino Médio, referindo-se à primeira competência para a área de Matemática e suas Tecnologias:

Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (Brasil, 2018, p. 533).

A seguir, traremos algumas considerações a respeito da Teoria Antropológica do Didático, a qual será usada nesta pesquisa.

3 A TERIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Nesta seção, descreveremos alguns conceitos iniciais referentes a Teoria Antropológica do Didático (TAD), buscando explicitar o quarteto praxeológico.

A TAD refere-se a uma teoria desenvolvida por Yves Chevallard e colaboradores, que possibilita a investigação e análise de situações dentro da área da Didática da Matemática. Três estudos compõem esta teoria, o primeiro, denominado transposição didática, refere-se ao estudo das transformações que um saber sofre ao ser ensinado. O segundo é a ecologia dos saberes, que aborda as condições de existência de um saber em uma instituição (nesta pesquisa consideramos como instituição os livros didáticos analisados). Por fim, temos o estudo das práticas institucionais em uma instituição (Bittar, 2017).

Ainda, de acordo com Bittar (2017, p. 367) “para Chevallard toda atividade humana pode ser descrita por meio de uma tarefa”. Essa tarefa demanda uma organização que pode ser descrita por um modelo, denominado de praxeologia. Assim, temos os seguintes componentes dessa praxeologia: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Por exemplo, passar roupa é um tipo de tarefa, que demanda distintas técnicas a depender do tecido e modelo da roupa, as técnicas utilizadas podem ser justificadas por leis físicas (Bittar, 2017).

O tipo de tarefa é representado pela letra (T) e indica a ação perante uma proposta. Para resolver uma tarefa, adotamos uma técnica (τ) que é justificada através de uma tecnologia (θ), que garante a veracidade da técnica escolhida. A teoria (Θ) justifica e explica de maneira aprofundada as condições apresentadas na tecnologia. Portanto, obtemos a Organização Matemática (OM) expressa pelo quarteto praxeológico: [T, τ , θ , Θ].

Em nossa pesquisa tivemos o interesse em classificar os tipos de tarefas, envolvendo a geometria dos fractais, abordados nos livros didáticos do Novo Ensino Médio.

4 PERCURSO METODOLÓGICO

A metodologia adotada segue um viés qualitativo, visto que “é o que se desenvolve numa situação natural, é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada” (Lüdke; André, 1986, p. 18). Ainda, é uma pesquisa documental, uma vez que se caracteriza através do estudo das coleções de livros didáticos. De acordo com Gil (2002, p. 45) “a pesquisa documental vale-se de matérias que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa”.

A análise dos dados obtidos está amparada na Teoria Antropológica do Didático, utilizada como ferramenta de investigação das abordagens da geometria dos fractais nas seguintes coleções analisadas: Diálogo (Teixeira, 2020) e Matemática Interligada (Andrade, 2020). O intuito desta investigação é classificar os tipos de tarefas apresentados nos LD investigados. Denominaremos por LD1, a coleção Diálogo e por LD2, a coleção Matemática Interligada. Veja abaixo o quadro que apresenta as divisões de ambas coleções:

Quadro 1 – Coleção didática

LD1			
1. Grandezas, Medidas e Matemática Financeira;		4. Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas;	
2. Geometria Plana;		5. Estatística e Probabilidade;	
3. Geometria Espacial;		6. Funções e Progressões.	

LD2
1. Estatística, Análise combinatória e Probabilidade;
2. Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica;
3. Geometria espacial e plana;

4. Grandezas, Sequências e Matemática Financeira;
5. Matrizes, Sistemas lineares e Geometria analítica;
6. Trigonometria, Fenômenos periódicos e Programação.

Fonte: Autoras (2023).

Destacamos que a BNCC divide as unidades de conhecimento em três categorias, sendo elas: números e álgebra, geometria e medidas, probabilidade e estatística. E, como podemos observar no Quadro 1, os livros didáticos sejam uma organização própria do conteúdo.

A seguir, apresentaremos os resultados das análises e algumas discussões referente as abordagens da geometria dos fractais, encontradas nos livros didáticos analisados.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após analisar a coleção LD1, encontramos elementos fractais em dois livros: **Funções e progressões** e **Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas**, denominados respectivamente por LD1-I e LD1-II. Os livros que abordaram objetos fractais na coleção LD2 foram: **Matrizes, Sistemas lineares e Geometria analítica** e **Grandezas, Sequências e Matemática financeira**, respectivamente nomeados de LD2-I e LD2-II. Discutiremos tais abordagens adiante.

Com relação a análise dos conteúdos referentes aos fractais encontrados nos livros didáticos selecionados, decidimos classificá-los em quatro categorias: teoria, curiosidades, exercícios propostos e exercícios resolvidos. Entendemos por teoria os conceitos que abordam a geometria dos fractais de maneira sistematizada, já a curiosidade apresenta questões históricas, sucintas e que assemelham os fractais com composições da natureza. Os exercícios propostos são aqueles que estão à disposição para serem resolvidos e relacionam o conteúdo abordado com os fractais, e os exercícios resolvidos são os exemplos que utilizam da geometria dos fractais para explicar conceitos dos conteúdos.

No LD1 foram encontradas 2 (duas) abordagens no momento em que se tem a teoria e 9 exercícios propostos. No LD2 não encontramos nenhum aspecto relacionado a geometria dos fractais na parte teórica, encontramos 2 (duas) abordagens em curiosidades e 3 exercícios propostos. Em ambas as coleções analisadas não encontramos exercícios resolvidos.

A seguir, discutiremos cada uma das categorias em cada um dos livros analisados e classificaremos os exercícios propostos e exercícios resolvidos em tipos de tarefa (T), de acordo com a organização matemática descrita na seção 3.

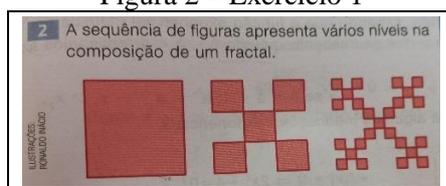
5.1 DISCUSSÕES SOBRE O LD1-I

Neste livro não encontramos informações que enquadrassem nas categorias teoria, curiosidade e exercícios resolvidos, mas observamos 6 exercícios propostos.

5.1.1 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

O primeiro exercício proposto encontrado aparece no início da seção denomina: exercícios e problemas, do capítulo que aborda o estudo de equações e inequações exponencial. Nesta tarefa o autor apresenta de forma explícita na descrição do enunciado que se trata de um fractal, conforme a figura a seguir.

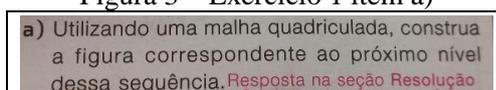
Figura 2 – Exercício 1



Fonte: Teixeira (2020, p. 123).

Após o enunciado são descritas três tarefas que relacionam o conteúdo estudado no capítulo com o fractal apresentado no exercício. No item a) é solicitado a construção, em malha quadriculada, do próximo nível do fractal. Veja a figura abaixo.

Figura 3 – Exercício 1 item a)



Fonte: Teixeira (2020, p. 123).

Por se tratar de uma tarefa de construção, classificamos o item a) como o seguinte Tipo de Tarefa:

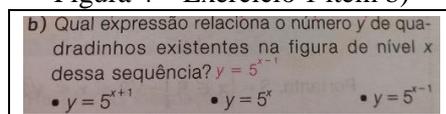
Quadro 2 – Tipo de Tarefa 1

Tipo de Tarefa	T1: Construir a figura correspondente ao próximo nível da sequência.
----------------	--

Fonte: Autoras (2023).

Os outros dois itens são indagações algébricas, o item b) se refere a encontrar a função que define o processo de iteração padrão do fractal, como pode ser observado abaixo.

Figura 4 – Exercício 1 item b)



Fonte: Teixeira (2020, p. 123).

Observamos que o item b) solicita aos alunos a expressão algébrica que relaciona o número de quadrados existentes na figura com o nível da sequência. Assim, classificamos esta tarefa como o Tipo de Tarefa:

Quadro 3 – Tipo de Tarefa 2

Tipo de Tarefa	T2: Determinar a expressão algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório de um fractal.
----------------	---

Fonte: Autoras (2023).

Por fim, é apresentada a tarefa que utiliza a função encontrada no item anterior para calcular o nível da sequência.

Figura 5 – Exercício 1 item c)

c) Em qual nível da sequência o número de quadradinhos da figura será:

- 3 125? nível 6
- 78 125? nível 8

Fonte: Teixeira (2020, p. 123).

Classificamos esta tarefa como:

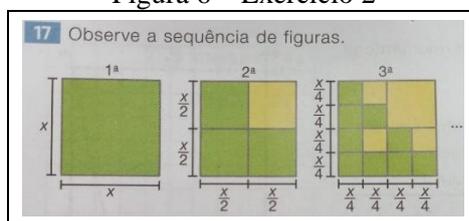
Quadro 4 – Tipo de Tarefa 3

Tipo de Tarefa	T3: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.
----------------	--

Fonte: Autoras (2023).

Os próximos quatro exercícios propostos do LD1-I estão presentes no capítulo que contempla o conteúdo de progressão geométrica (PG). O primeiro não cita o termo fractal em seu enunciado, apesar de conter as propriedades de um fractal, o autor exibe três ilustrações, como podemos observar:

Figura 6 – Exercício 2



Fonte: Teixeira (2020, p. 134).

Em seguida, os autores apresentam três perguntas relacionadas a sequência das ilustrações. A primeira delas se refere a determinar as áreas, em verde e amarelo, dos 5 primeiros termos da sequência. A segunda é uma indagação que menciona as sequências encontradas no item anterior, para que o aluno identifique qual delas é uma progressão geométrica e a terceira questiona sobre o décimo termo de cada uma das sequências.

A seguir, apresentamos os exercícios e seus respectivos quadros com as classificações dos Tipos de Tarefa.

Figura 7 – Exercício 2 item a)

a) Escreva, em função de x , os 5 primeiros termos da sequência que representa áreas em:

- verde. Respostas no final do livro.
- amarelo.

Fonte: Teixeira (2020, p. 134).

Como o item a) relaciona a iteração do fractal em questão com uma grandeza, neste caso, a área, classificamos esta tarefa da seguinte forma:

Quadro 5 – Tipo de Tarefa 4

Tipo de Tarefa	T4: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.
----------------	---

Fonte: Autoras (2023).

Com relação ao item b), temos:

Figura 8 – Exercício 2 item b)

b) Qual das seqüências que você escreveu é uma PG? Justifique sua resposta. *Resposta no final do livro.*

Fonte: Teixeira (2020, p. 134).

Em nossa análise caracterizamos essa tarefa como:

Quadro 6 – Tipo de Tarefa 5

Tipo de Tarefa	T5: Identificar uma progressão geométrica a partir da iteração de um fractal.
----------------	---

Fonte: Autoras (2023).

Para encerrar o exercício 2 apresentamos o item c), a seguir:

Figura 9 – Exercício 2 item c)

c) Determine o 10^a termo de cada uma dessas seqüências. *Resposta no final do livro.*

Fonte: Teixeira (2020, p. 134).

Observamos que o item c) contempla o mesmo Tipo de Tarefa que o item b) do exercício 1, a T2: Determinar a expressão algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório de um fractal, apresentada no Quadro 3.

A próxima Tarefa apresenta uma breve explicação sobre a geometria dos fractais, mostrando o significado da palavra *fractal*, o período em que foi criada e os principais conceitos envolvidos nos estudos desse conteúdo.

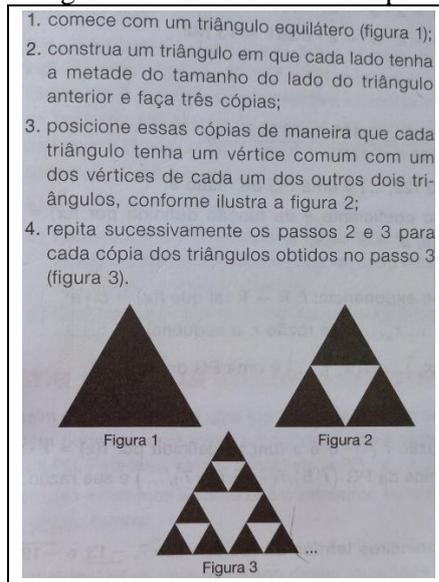
Figura 10 – Exercício 3

22 (Enem, 2008) Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

Fonte: Teixeira (2020, p. 135).

Em seguida, o autor apresenta como exemplo o fractal triângulo de Sierpinski e descreve o passo a passo de sua construção em quatro etapas, com o auxílio de três figuras, vejamos:

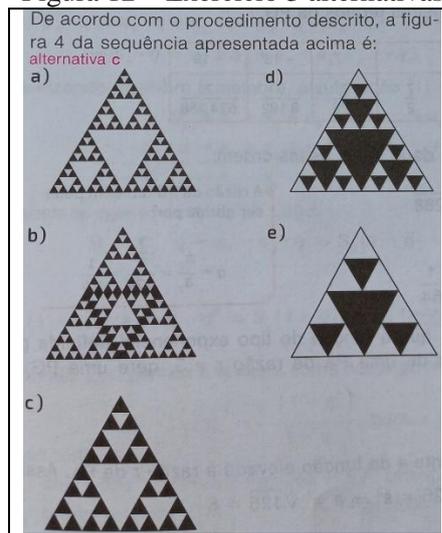
Figura 11 – Exercício 3 exemplo



Fonte: Teixeira (2020, p. 135).

Adiante, é questionado aos alunos qual das alternativas disponíveis representa a figura 4, considerando o procedimento descrito, ou seja, qual das figuras corresponde ao nível 4 do fractal triângulo de Sierpinski. Veja a figura a seguir.

Figura 12 – Exercício 3 alternativas

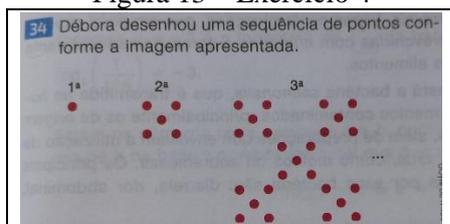


Fonte: Teixeira (2020, p. 135).

Assim, classificamos esta tarefa como o Tipo de Tarefa T1: Construir a figura corresponde ao próximo nível da sequência, apresentado no item a) do exercício 1, Quadro 2.

Apesar de apresentarem objetos fractais, os próximos dois exercícios do LD1-I não mencionam este termo nos enunciados e provocam aos alunos questionamentos algébricos, que envolvem o conteúdo: soma dos n termos de uma PG. A seguir apresentamos o exercício 4 que expressa uma sequência de pontos, vejamos:

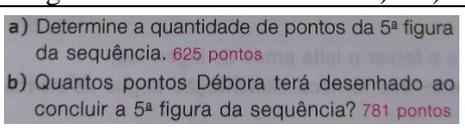
Figura 13 – Exercício 4



Fonte: Teixeira (2020, p. 139).

Após o enunciado o autor propõe aos alunos duas questões. A primeira delas relaciona a continuidade da sequência apresentada, onde os alunos devem determinar a quantidade de pontos presentes na 5ª figura e a segunda pergunta, se refere a quantidade de pontos desenhados ao final da 5ª figura. Como podemos observar:

Figura 14 – Exercício 4 item a) e b)

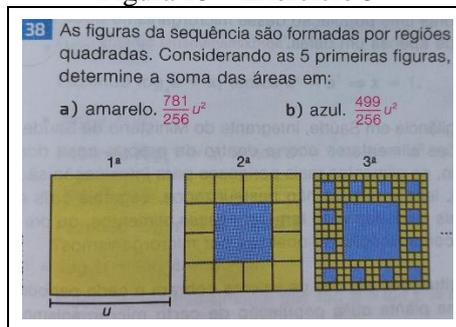


Fonte: Teixeira (2020, p. 139).

As duas tarefas acima são parecidas e possuem a mesma classificação, quanto ao Tipo de Tarefa, caracterizando-se como T3: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa, mesmo Tipo de Tarefa do item c) do exercício 1, Quadro 4.

A última tarefa encontrada no capítulo Progressão Geométrica do LD1-I aborda conceitos de grandezas e medidas, uma vez que em seu enunciado é solicitado a soma das áreas, em amarelo e em azul, de uma sequência com 5 termos. Veja a Figura 15.

Figura 15 – Exercício 5



Fonte: Teixeira (2020, p. 139).

Observamos que esta tarefa se enquadra na T4: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal, mesmo Tipo de Tarefa da Figura 6, apresentado no Quadro 5.

Para finalizar, encontramos no LD1-I, um exercício proposto no capítulo que estuda o conceito de Logaritmo. O autor descreve um processo de construção que gera um fractal, ainda que não mencione este termo, e apresenta como auxílio uma ilustração. Ainda no enunciado, o autor exhibe a fórmula para obter o comprimento do lado de um quadrado e solicita a quantidade de quadrados que possuem comprimento dentro do intervalo dado. Veja a figura a seguir.

Figura 16 – Exercício 6

Em um quadrado, se traçarmos segmentos de reta ligando os pontos médios de seus lados, obteremos um novo quadrado; ligando os pontos médios dos lados desse novo quadrado, obteremos outro quadrado. Esse processo pode ser realizado indeterminadas vezes, gerando uma sequência de quadrados. Considerando o quadrilátero inicial com lado unitário, o comprimento do lado de um quadrado é dado pela fórmula $m = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$, em que n é a posição do quadrado na sequência.

Com o auxílio de uma calculadora científica, determine quais quadrados dessa sequência têm lados com comprimento entre $\frac{\sqrt{2}}{50}$ e $\frac{2}{25}$ unidades de comprimento.

98, 108 e 118 quadrados



Fonte: Teixeira (2020, p. 145).

Observamos que o exercício anterior instiga o aluno a determinar a iteração do fractal com base nas medidas disponibilizadas. Assim, classificamos a tarefa como:

Quadro 7 – Tipo de Tarefa 6

Tipo de Tarefa	T6: Determinar a iteração de um fractal a partir de uma medida de uma grandeza dada.
----------------	--

Fonte: Autoras (2023).

Logo, no que diz respeito aos exercícios propostos do LD1-I, dos 6 exercícios observados, foi possível analisarmos onze Tarefas. Dentre essas Tarefas, encontramos 6 Tipos de Tarefas distintos, presentes nos seguintes capítulos: Equação e inequação exponencial, Progressão geométrica e Logaritmo, em que o capítulo de progressão geométrica contemplou mais exercícios que os demais capítulos, com 4 atividades analisadas.

Com relação aos Tipos de Tarefas classificados, o T3: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa, abrangeu o maior número de tarefas. Mas discutiremos isso adiante.

Em nossa análise observamos que o autor explorou brevemente os aspectos da geometria dos fractais, abordando os conceitos relacionados a esta geometria nos enunciados dos exercícios e utilizando de tarefas que possibilitam aos alunos identificarem as propriedades de autosemelhança e complexidade infinita dos fractais.

A seguir apresentaremos as discussões referente ao LD1-II.

5.2 DISCUSSÕES SOBRE O LD1-II

Neste livro encontramos o maior número de informações referente a geometria dos fractais, sendo também o único livro didático analisado que contempla a categoria de teoria. No LD1-II apenas as categorias teoria e exercícios propostos foram contempladas.

5.2.1 TEORIA

O LD1-II inicia o capítulo 13 - Transformações geométricas - abordando a geometria dos fractais e os padrões hipnotizantes encontrados na natureza que se assemelham com os

fractais. Também são apresentados três fractais famosos: triângulo de Sierpinski, floco de neve de Koch e poeira de Cantor, conforme as imagens a seguir.

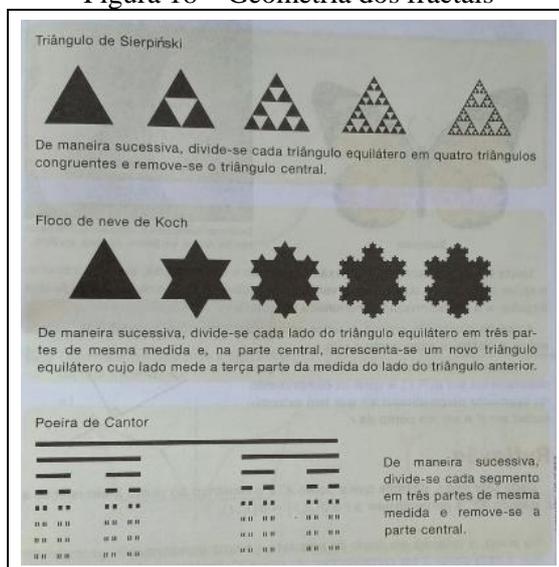
Figura 17 – Transformações geométricas



Fonte: Teixeira (2020, p. 132).

Na figura acima podemos notar que o autor apresenta alguns exemplos de representações de fractais que podem ser encontrados na natureza como a samambaia e o brócolis romanesco. Também explica que os fractais podem ser entendidos como fragmentos de partes que possuem semelhanças com o objeto inicial, explicando a característica da autossemelhança. Além disso, no livro didático é comentado que esse tema não é exclusivo da área da matemática, pois também existem estudos relacionados nas áreas da Biologia e da Arte.

Figura 18 – Geometria dos fractais



Fonte: Teixeira (2020, p. 133).

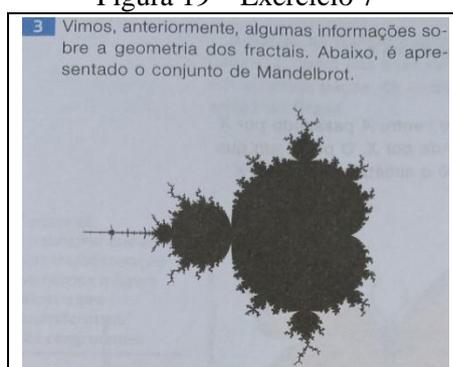
Na figura 18 encontramos a representação e explicação da construção de três fractais, o triângulo de Sierpinski, o floco de neve de Koch e poeira de Cantor com o objetivo de introduzir o conteúdo de transformações isométricas e homotéticas. Esses conceitos teóricos podem auxiliar os alunos na compreensão de conceitos distintos da geometria euclidiana.

5.2.2 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Encontramos 3 exercícios propostos no LD1-II, todos no capítulo de Transformações Geométricas. Em dois exercícios o autor apresenta explicitamente que se tratam de fractais, no entanto no terceiro exercício não fica explicitado.

A primeira Tarefa analisada encontra-se na seção que estuda o conceito de reflexão e expressa a figura correspondente ao conjunto de Mandelbrot. Observe a imagem abaixo:

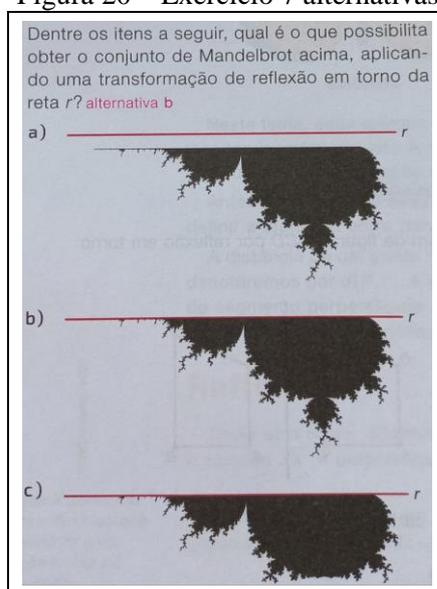
Figura 19 – Exercício 7



Fonte: Teixeira (2020, p. 136).

Na sequência o autor questiona com qual das 3 alternativas pode-se obter o conjunto de Mandelbrot, utilizando a transformação de reflexão em torno de uma reta dada. Veja a figura 22.

Figura 20 – Exercício 7 alternativas



Fonte: Teixeira (2020, p. 136).

O exercício 7 instiga o aluno a identificar a figura que forma o fractal dado, a partir de uma transformação geométrica. Assim, classificamos a tarefa de acordo com o quadro abaixo:

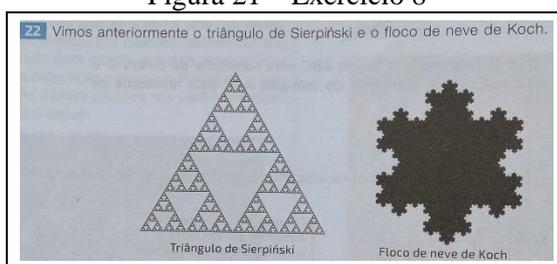
Quadro 8 – Tipo de Tarefa 7

Tipo de Tarefa	T7: Identificar a figura correspondente a um nível aleatório de um fractal a partir de transformações geométricas.
----------------	--

Fonte: Autoras (2023).

Os próximos 2 exercícios aparecem no final do capítulo 13 do LD1-II, na seção que apresenta conceitos de *Homotetia*. A tarefa a seguir apresenta a imagem de dois fractais conhecidos, o triângulo de Sierpinski e o floco de neve de Koch. Vejamos:

Figura 21 – Exercício 8



Fonte: Teixeira (2020, p. 148).

Dando continuidade no exercício, o autor propõe dois questionamentos aos alunos. O primeiro promove ao aluno identificar as transformações geométricas presentes nas figuras dadas. Veja a figura a seguir.

Figura 22 – Exercício 8 item a)

a) Ao analisar esses fractais, é possível identificar transformações geométricas? Em caso afirmativo, quais? *Sim. Algumas possíveis respostas: homotetia, rotação, translação e reflexão.*

Fonte: Teixeira (2020, p. 148).

Classificamos a tarefa anterior como:

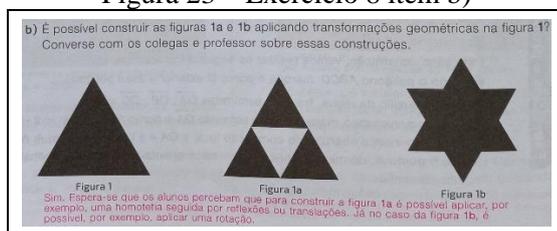
Quadro 9 – Tipo de Tarefa 8

Tipo de Tarefa	T8: Identificar transformações geométricas a partir do fractal dado.
----------------	--

Fonte: Autoras (2023).

O item b) do exercício 8 aborda mais 3 imagens, sendo uma delas um triângulo equilátero e a pergunta é referente à construção das outras duas imagens. Observe:

Figura 23 – Exercício 8 item b)



Fonte: Teixeira (2020, p. 148).

Como o item anterior relaciona a construção das duas figuras dadas com o estudo das transformações geométricas, categorizamos essa tarefa como:

Quadro 10 – Tipo de Tarefa 9

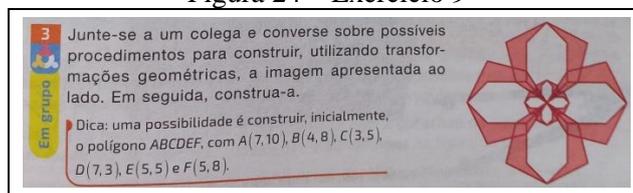
Tipo de Tarefa	T9: Construir a figura correspondente a um nível aleatório de um fractal a partir de transformações geométricas.
----------------	--

Fonte: Autoras (2023).

A última tarefa analisada no LD1-II encontra-se na seção denominada “Acessando Tecnologias”, na qual o autor propõe a construção de polígonos utilizando o software *GeoGebra*. Após descrever de forma breve algumas funcionalidades e ferramentas do aplicativo, o livro apresenta 3 tarefas. Nossa análise será restrita apenas ao terceiro exercício, que apesar de não citar o termo fractal, apresenta as propriedades de um objeto fractal.

O autor exhibe uma imagem e solicita aos alunos que, utilizando de transformações geométricas, reproduzam a imagem dada. Veja a figura 26.

Figura 24 – Exercício 9



Fonte: Teixeira (2020, p. 149).

De acordo com nossa análise, classificamos esta tarefa da seguinte maneira:

Quadro 11 – Tipo de Tarefa 10

Tipo de Tarefa	T10: Construir a representação do fractal dado utilizando pontos cartesianos.
----------------	---

Fonte: Autoras (2023).

Portanto, o LD1-II explora a geometria dos fractais de maneira contextualizada e completa, apresentando conceitos teóricos e exemplos de fractais conhecidos. Observamos que o autor atribui muita ênfase e dedica quase um capítulo do livro a este conteúdo, também notamos que o foco se estabelece sobre os aspectos figurais dos fractais para explicar os conceitos estudados.

Por fim, com relação as Tarefas analisadas, dos 3 exercícios propostos encontrados, obtemos outros 4 Tipos de Tarefas distintas do LD1-I, a maioria envolvendo o conteúdo de Transformações Geométricas. E, ao contrário do que analisamos no livro anterior, no LD1-II não temos um Tipo de Tarefa que se sobressai aos outros.

Adiante faremos as discussões e análises da segunda coleção escolhida.

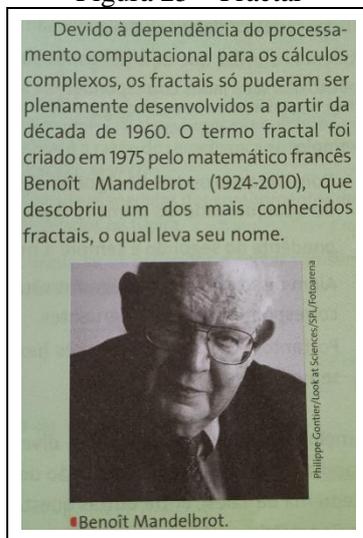
5.3 DISCUSSÕES SOBRE O LD2-I

Neste livro observamos duas curiosidades e um exercício proposto. As outras duas categorias não foram encontradas, sendo que este livro didático é o único analisado que contempla a categoria curiosidades.

5.3.1 CURIOSIDADES

O LD2-I apresenta um quadro com algumas informações sobre o surgimento do termo fractal, uma imagem do Benoit Mandelbrot e algumas figuras que relacionam composições da natureza com objetos fractais, conforme as imagens a seguir.

Figura 25 – Fractal



Fonte: Andrade (2020, p. 91).

Figura 26 – Semelhança



Fonte: Andrade (2020, p. 99).

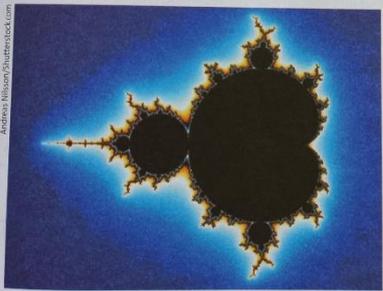
Na figura anterior podemos observar 3 imagens, a primeira à esquerda é uma planta em formato espiral que o autor relaciona com padrões de rotação, a imagem do meio apresenta um pavão com a calda aberta, exemplificando novamente um padrão de rotação. E na última imagem, à direita, é possível notar um brócolis romanesco que se trata de uma representação comum de fractal na natureza. Logo abaixo, o autor representa a configuração do brócolis.

5.3.2 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

O único exercício encontrado no LD2-I apresenta em seu enunciado uma contextualização referente a geometria dos fractais, uma imagem e em seguida uma pergunta. Veja a figura a seguir.

Figura 27 – Exercício 10

8. Os fractais são figuras geométricas complexas que podem descrever fenômenos naturais aparentemente irregulares. A partir de cálculos matemáticos realizados em computador, são gerados padrões que se repetem infinitamente. Em um fractal, a figura se assemelha a pequenas partes de si mesma. Veja o exemplo ao lado. Os fractais são importantes representações de processos naturais e expressões matemáticas, porém também podem ser utilizados para fins artísticos, pois formam imagens muito interessantes. Veja a seguir a representação de um fractal, conhecida como conjunto de Mandelbrot.



Conjunto de Mandelbrot.

Nessa representação, qual transformação isométrica é possível perceber? [transformação de reflexão](#)

Fonte: Andrade (2020, p. 91).

Este exercício expressa que os fractais podem ser utilizados para descrever fenômenos irregulares, também é mencionado que com cálculos computacionais é possível gerar padrões que vão se repetir infinitamente. Na sequência o autor questiona qual transformação isométrica pode ser observada na imagem dada. Assim, classificamos esta tarefa como:

Quadro 12 – Tipo de Tarefa 11

Tipo de Tarefa	T11: Identificar transformações isométricas a partir do fractal dado.
----------------	---

Fonte: Autoras (2023).

Observamos no LD2-I que o autor abordou a geometria dos fractais de forma bem sucinta, apresentando apenas um exercício envolvendo esse conteúdo, ainda assim, as informações expressas no enunciado do exercício possibilitam aos alunos identificarem as propriedades de um objeto fractal.

No livro didático identificamos um novo Tipo de Tarefa, distinto dos classificados na primeira coleção analisada. A seguir apresentamos a discussão do último livro analisado.

5.4 DISCUSSÕES SOBRE O LD2-II

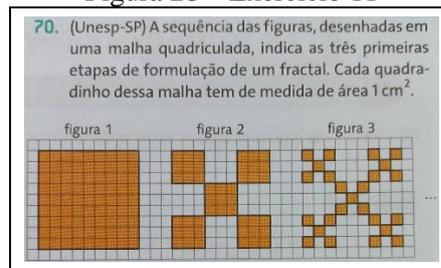
O LD2-II contempla o menor número de categorias analisadas entre os 4 livros, exibindo apenas exercícios propostos.

5.4.1 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Neste livro encontramos 2 exercícios propostos, ambos em um único capítulo, denominado de Progressão Geométrica (PG). Nos dois o autor apresenta o termo fractal, além disso, ambos abordam questionamentos referente a conceitos de área.

A primeira Tarefa observada representa uma sequência de figuras desenhadas em malha quadriculada. Observe:

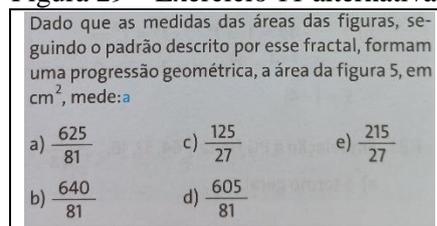
Figura 28 – Exercício 11



Fonte: Andrade (2020, p. 89).

Após o enunciado o autor questiona sobre a medida da área da iteração 5 do fractal e disponibiliza 5 alternativas para a possível resposta. Veja a seguir.

Figura 29 – Exercício 11 alternativas

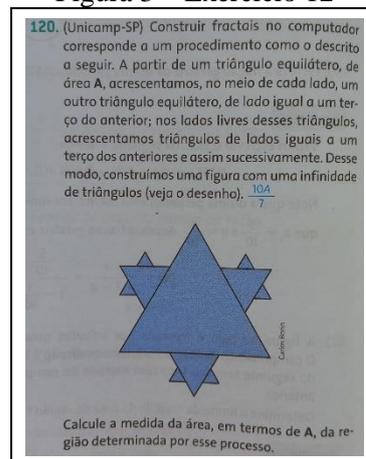


Fonte: Andrade (2020, p. 89).

Como o exercício 11 questiona a medida da área, uma grandeza, a partir da iteração do fractal dado, classificamos a tarefa como o Tipo de Tarefa T4, apresentado no Quadro 5.

O último exercício analisado descreve o processo de construção de um fractal utilizando um computador. Observe a figura a seguir:

Figura 3 – Exercício 12



Fonte: Andrade (2020, p. 100).

O autor questiona a medida da área do fractal dado. Assim, classificamos o exercício anterior como o T4: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.

Observamos que o LD2-II foi o livro analisado que menos explorou a geometria dos fractais, com dois exercícios breves, descontextualizados e com uma abordagem algébrica, apresentando de forma resumida as características dos objetos fractais.

No que diz respeito aos Tipos de Tarefas, os dois exercícios apresentaram a mesma classificação que também foi identificada no LD1-I. Assim, podemos notar que o Tipo de

Tarefa que contemplou o maior número de exercícios foi o T4, presente em 4 tarefas distintas, na próxima seção discutiremos mais a respeito desta conclusão.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, esta pesquisa nos possibilitou analisar, com base na Teoria Antropológica do Didático, as variações dos Tipos de Tarefas presentes nas abordagens de geometria dos fractais encontrados nos livros didáticos das coleções **Diálogo** (LD1) e **Matemática Interligada** (LD2). As análises de ambas coleções apontam particularidades interessantes, quando comparadas, a respeito da geometria dos fractais nos livros didáticos.

Isto posto, apresentaremos, no quadro a seguir, todos os Tipos de Tarefas analisados.

Quadro 13 – Tipos de Tarefas

Tipos de Tarefas	LD1		LD2	
	I	II	I	II
T1: Construir a figura correspondente ao próximo nível da sequência.	Ex.1a) e Ex.3			
T2: Determinar a expressão algébrica que indica a quantidade de subfiguras em um nível aleatório de um fractal.	Ex.1b) e Ex.2c)			
T3: Determinar a quantidade de subfiguras da sequência a depender do nível desejado do fractal e vice-versa.	Ex.1c), Ex.4a) e Ex.4b)			
T4: Determinar a medida de uma grandeza a partir da iteração de um fractal.	Ex.2a) e Ex.5			Ex.11 e Ex.12
T5: Identificar uma progressão geométrica a partir da iteração de um fractal.	Ex.2b)			
T6: Determinar a iteração de um fractal a partir de uma medida de uma grandeza dada	Ex.6			
T7: Identificar a figura correspondente a um nível aleatório de um fractal a partir de transformações geométricas.		Ex.7		
T8: Identificar transformações geométricas a partir do fractal dado.		Ex.8a)		
T9: Construir a figura correspondente a um nível aleatório de um fractal a partir de transformações geométricas.		Ex.8b)		
T10: Construir a representação do fractal dado utilizando pontos cartesianos.		Ex.9		
T11: Identificar transformações isométricas a partir do fractal dado.			Ex.10	

Fonte: Autoras (2023).

Observando o Quadro 13, notamos algumas informações pertinentes para nossa conclusão. Primeiramente, é possível verificar que o Tipo de Tarefa T4 foi o que contemplou o maior número de exercícios e o único encontrado em dois livros didáticos distintos. Também analisamos que o LD1 é a coleção com maior variação de Tipos de Tarefas, em termos da geometria dos fractais, enquanto que o LD2 é o menor.

Com base nas análises efetuadas, podemos afirmar que o LD1 aborda a geometria dos fractais de maneira contextualizada e além da vasta gama de exercícios, o autor propõe conceitos teóricos relacionados a esta geometria. Diferente do que foi analisado na coleção do

LD2, que utiliza da geometria dos fractais apenas como uma ferramenta presente em poucos exercícios.

Outra conclusão que decorre da nossa análise é a variação dos assuntos trabalhados utilizando a geometria dos fractais. No LD2 os assuntos abordados foram progressão geométrica e transformações geométricas. No LD1 observamos uma variedade maior de assuntos, sendo estes: equações e inequações exponencial, logaritmo, progressão geométrica e transformações geométricas. Outrossim, de acordo com os objetos de conhecimento propostos pela BNCC, observamos que ambos os livros apresentam as competências de “Números e Álgebra” e “Geometria e Medidas”, ainda que o LD1 desenvolva mais a geometria dos fractais nos capítulos.

Por fim, este trabalho nos possibilitou observar como o assunto de geometria dos fractais tem sido desenvolvido no âmbito da Educação Básica, uma vez que os livros didáticos proporcionam subsídios para a atuação dos professores em sala de aula. Além disso, partimos da premissa, que foi comprovada, de que o trabalho com a geometria dos fractais possibilita abordar uma variedade de assuntos matemáticos em sala de aula e não somente a própria Geometria.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, T. M. **Matemática Interligada: grandezas, sequências e matemática financeira**, manual do professor. São Paulo: Scipione, 2020.

ANDRADE, T. M. **Matemática Interligada: matrizes, sistemas lineares e geometria analítica**, manual do professor. São Paulo: Scipione, 2020.

BARBOSA, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal: para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BITTAR, M. **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos**. Campinas, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M. E. D. A. **Abordagens qualitativas de pesquisa: a pesquisa etnográfica e o estudo de caso**, p. 11-24, São Paulo: EPU, 1986.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba: Secretária de Estado da Educação do Paraná, 2008. p. 81.

PARANÁ. Secretaria de Educação e do Esporte do Estado do Paraná. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Curitiba: Sistema Estadual de Ensino do Paraná, 2021. Disponível:

https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-08/referencial_curricular_novoem_11082021.pdf. Acesso em: 26 jan. 2022.

TEIXEIRA, L. A. **Diálogo: Matemática e suas tecnologias, funções e progressões**, manual do professor. São Paulo: Moderna, 2020.

Submetido em: 12/09/23
Aprovado em: 12/09/23
Publicado em: 12/09/23



Todo o conteúdo deste periódico está sob uma licença [Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), exceto onde está indicado o contrário.