



Vitruvian Cogitationes - RVC

Geometria dos fractais: projetos desenvolvidos por professores da Educação Básica

Geometría fractal: proyectos desarrollados por docentes de Educación Básica

Fractal Geometry: projects developed by basic Education Teachers

Geralda de Fatima Neri Santana

Universidade Estadual de Maringá – UEM; pipo_ziga@hotmail.com

 <https://orcid.org/0000-0002-7387-8098>

Mariana Moran

Universidade Estadual de Maringá – UEM; mbarroso@uem.br

 <https://orcid.org/0000-0001-8887-8560>

Polonia Altoé Fusinato

Universidade Estadual de Maringá – UEM; altoepoly@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0002-7387-8098>

Raquel Polizeli

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR; raquelpolizeli@utfpr.edu.br

 <https://orcid.org/0000-0002-0615-3716>

Resumo: Este artigo tem por objetivo identificar e analisar projetos que abordam a Geometria dos Fractais e que foram desenvolvidos e implementados por professores da Educação Básica no decorrer do Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE. A abordagem dos fractais é um assunto recomendado em documentos oficiais. A pesquisa é de cunho qualitativo, no paradigma interpretativo e a modalidade é a análise documental. Os dados foram coletados nos Cadernos PDE. Para análise foram agrupados em relação ao público indicado pelos docentes. Nesse sentido, foram analisados os artigos elaborados pelos professores no período de 2007, 2008, 2009, 2010, 2012, 2013, 2014 e 2016. Constatou-se que as produções analisadas sobre o assunto representam 0,69% dos artigos produzidos. Pode-se inferir que o público em que houve maior ocorrência de implementação foi no Ensino Médio. Os professores demonstraram interesse em explorar o tema, até então, apresentado como um assunto pouco divulgado e abordado nos livros didáticos.

Palavras-chave: cadernos PDE; matemática; fractais.

Resumen: Este artículo tiene como objetivo identificar y analizar proyectos que aborden la Geometría de los Fractales y que hayan sido desarrollados e implementados por profesores de Educación Básica en el transcurso del Programa de Desarrollo Educativo - PDE. El enfoque de los fractales es un tema recomendado en documentos oficiales. La investigación es de

naturaleza cualitativa, en el paradigma interpretativo, y la modalidad es el análisis documental. Los datos fueron recopilados en los Cuadernos PDE. Para el análisis, se agruparon según el público indicado por los docentes. En este sentido, se analizaron los artículos elaborados por los profesores en los años 2007, 2008, 2009, 2010, 2012, 2013, 2014 y 2016. Se encontró que las producciones analizadas sobre el tema representan el 0,69% de los artículos producidos. Se puede inferir que el público en el que hubo una mayor incidencia de implementación fue en la Enseñanza Media. Los profesores mostraron interés en explorar el tema, hasta entonces, presentado como un tema poco difundido y abordado en los libros de texto.

Palabras clave: cuadernos PDE; matemáticas; fractales.

Abstract: This article aims to identify and analyze projects addressing the Geometry of Fractals developed and implemented by teachers in Basic Education throughout the Educational Development Program - PDE. The approach to fractals is a recommended subject in official documents. The research is qualitative in nature, following the interpretative paradigm, and the modality is documentary analysis. Data were collected from the PDE Notebooks. For analysis, they were grouped according to the audience indicated by the teachers. In this sense, articles written by teachers in the years 2007, 2008, 2009, 2010, 2012, 2013, 2014, and 2016 were analyzed. It was found that the analyzed productions on the subject represent 0,69% of the articles produced. It can be inferred that the audience with the highest incidence of implementation was in High School. Teachers showed interest in exploring the topic, which until then was presented as a less widespread and addressed subject in textbooks.

Keywords: PDE notebooks; mathematics; fractals.

1 INTRODUÇÃO

O Currículo da Rede Estadual Paranaense – CREP tem por objetivo auxiliar na construção do Plano de Trabalho Docente – PTD e também na elaboração dos Planos de Aula, entre outros. Trata-se de um documento que apresenta os conteúdos, as competências gerais e específicas que orientam o trabalho dos professores em suas atividades pedagógicas. Neste documento o estudo da Geometria dos Fractais é indicado para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Está estruturado conforme o código PR.EF09MA17.d.9.64¹. De acordo com o referido código o objetivo da aprendizagem, ou seja, a habilidade que se espera ao desenvolver o conteúdo, pauta-se em “Identificar formas fractais e as características de autossimilaridade e complexidade infinita” (Paraná, 2021, p.44). E conforme a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) há orientações para abordagem do assunto no Ensino Médio e pode se ler da seguinte forma

¹ Estrutura do código: PR.EF09MA17.d.9.64 (PR, refere-se ao estado da federação; EF09MA17; refere-se a habilidade da BNCC; d; caso de mudança; 9, indicação do ano no Referencial; 64, Posição no ano no CREP).

(EM13MAT105). Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (Brasil, 2018, p. 533).

Desse modo, afim de assegurar o ensino deste conteúdo, deve-se seguir as diretrizes indicadas nos documentos. Por ocasião da elaboração e implementação dos projetos analisados nesta pesquisa, as orientações tinham como suporte teórico, entre outros, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica, onde se pode ler.

O conhecimento geométrico ganhou mais uma face no final do século XVIII e início do século XIX, com os estudos de Bolyai, Lobachevsky, Riemann e Gauss. Surgiam as geometrias não-euclidianas, que trouxeram uma nova maneira de ver e conceber o conhecimento geométrico. Muitos problemas do cotidiano e do mundo científico só são resolvidos pelas geometrias não-euclidianas. Um exemplo são os estudos que resultaram na Teoria da Relatividade, em que a geometria do espaço, usada por Albert Einstein, foi uma geometria não-euclidiana [...] (Paraná, 2008, p. 54-55).

Além dos documentos relacionados CREP (Paraná, 2021), BNCC (Brasil, 2018), outros da mesma natureza como, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática – DCEs (Paraná, 2008), Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) e Ensino Fundamental de Nove Anos Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais (Brasil, 2010) estão citados, neste texto, como orientadores para organização das atividades pedagógicas. Neste artigo, além dos documentos oficiais, pesquisas no formato de artigos e dissertação serão mencionados afim de constatar o interesse em ascensão pelo tema.

Estudos a respeito da inclusão das geometrias não euclidianas, especificamente, os fractais em documentos oficiais nacionais e paranaenses, referentes a Educação Básica foram realizados por Silva, Sinada e Luccas (2017). Era do interesse dos pesquisadores “investigar como os documentos oficiais orientam a inserção da Geometria Não-Euclidiana, mais especificamente, os Fractais na Educação Básica” (Silva, Sinada e Luccas, 2017, p. 2). Os documentos pesquisados foram os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN; Diretrizes Curriculares do Paraná - DCEs e Ensino Fundamental de Nove Anos Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais. Nos referidos documentos fica esclarecido a relevância da abordagem dos Fractais, mais especificamente para os anos finais do Ensino Fundamental, bem como o aprofundamento dos conteúdos no Ensino Médio.

Após análise dos documentos oficiais: BNCC; PCN's; DCEs e Referencial Curricular do Estado do Paraná, Lopes e Barrére (2023) organizaram um material para ser trabalhado em diferentes contextos e modalidades de ensino a respeito da Geometria dos Fractais, pontuando

que, mesmo com a orientações dos documentos citados, percebe-se que os conhecimentos geométricos desenvolvidos em salas de aula, priorizam a geometria euclidiana.

Em relação à Geometria dos Fractais, Lopes e Barrère (2023) utilizaram tópicos da geometria fractal, para auxiliar na preparação das aulas de Matemática, servindo como apoio para desenvolver este conteúdo. O material elaborado é composto por 5 Objetos de Aprendizagem (vídeos animados). Os vídeos são denominados: Fractais gerados por funções; Fractais na natureza; Fractais e a beleza do infinito; Dimensão fractal: a dimensão oculta; Dimensão fractal e o método da contagem de caixas. Além dos vídeos há outros produtos educacionais que podem ser utilizados em cursos de formação continuada para professores.

Em relação a abordagem do tema fractais em livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático - PNLD adotados em alguns estabelecimentos de ensino, de acordo com busca pelo assunto, nos anos de 2011 e 2012, a dissertação de Moura (2011), intitulada “O conceito fractal e sua presença pedagógica na Educação Básica” aborda o assunto. O pesquisador analisou as atividades apresentadas em coleções do Ensino Fundamental e Ensino Médio, afim de investigar o seguinte questionamento: Como o conceito fractal vem se estabelecendo na Educação Básica? (Moura, 2011, p. 121). Feita as devidas análises, o pesquisador conclui, “Enfim, é oportuno ressaltar que os textos apresentados nos livros didáticos ainda não apresentam uma organização sistemática nos tratamentos dos assuntos dos fractais, como fazem com os temas da Matemática convencional (Moura, 2011, p. 123).

Desta forma, busca-se compreender o fazer pedagógico utilizado por professores da rede estadual do estado do Paraná ao abordarem Fractais. O empenho em investigar sobre o tema, emergiu de uma pesquisa mais abrangente que buscou compreender a prática de professores que ensinam matemática, egressos do Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE. O referido programa se apresenta como uma política de estado e foi implementado a partir do ano de 2007. Tem como público os profissionais da educação que atuam em escolas estaduais paranaenses. Como parte das atividades elaboradas pelo programa, cabe ao professor, elaborar um Projeto de Intervenção Pedagógica na Escola. Após implementação do projeto, redigir um artigo² decorrente das ações desenvolvidas. Este material é que constitui o *corpus* a ser investigado neste artigo.

² [...] o artigo é por excelência, a produção científica. É no artigo que o pesquisador expõe seus resultados (e se expõe) à comunidade científica. [...] Cabe destacar que a comunidade acadêmico-científica, usualmente, só reconhece o valor acadêmico-científico de artigos publicados em revistas arbitradas, ou seja, revistas que só publicam artigos que passaram por um processo de revisão, às cegas, por, pelo menos, dois pesquisadores experientes, preferencialmente especialistas na área em questão (Moreira, 2011, p. 207-208). Este processo não

O estudo, aqui apresentado, trata-se de uma pesquisa qualitativa, do tipo documental. Evidencia os projetos implementados por professores PDE, no período de ocorrência de turmas regulares ofertadas entre os anos de 2007 a 2016, com exceção dos anos 2011 e 2015, anos em que não houve oferta para formação de novas turmas. Em um universo de 1895 artigos produzidos, no período mencionado, destacamos os que apontam a Geometria dos Fractais.

Analisaremos de acordo com as categorias: projetos implementados em turmas do Ensino Médio; projetos implementados em turmas do Ensino Fundamental; projetos implementados em turmas do Ensino Fundamental e Médio, projetos implementados para professores de matemática; projetos implementados em turmas da modalidade EJA e projetos implementados em turmas de alunos do magistério.

2 PERCURSO METODOLÓGICO

Para identificar os artigos que tratam sobre a Geometria dos Fractais, utilizou-se dados pesquisados e disponibilizados em pesquisa de doutorado cujo interesse era investigar a prática de professores egressos do PDE. Neste sentido foi realizado um levantamento dos projetos implementados pelos professores e que estão disponibilizados no site³ oficial do governo do estado do Paraná, na coleção Cadernos PDE. O material mencionado foi salvo e arquivado numa pasta na área de trabalho do computador e para visualização mais prática, foi impresso e encadernado. Realizada uma leitura dos resumos, ficou contabilizado 1895 resumos.

Para localização dos projetos implementados, no formato de artigos, usou-se as palavras chave “Geometria dos fractais”, “Fractais” e “Fractal”. Foram identificados 13 artigos, e apresentados no Quadro1, a quantidade anual.

QUADRO 1 – QUANTIDADE DE PROJETOS IMPLEMENTADO ABORDANDO GEOMETRIA DOS FRACTAIS

Ano	2007	2008	2009	2012	2014	2016
Quantidade de projetos	1	3	2	4	2	1

Fonte: Autoras (2024).

ocorreu com a produção final do PDE, embora nos documentos PDE estas produções sejam tratadas por artigo científico. Esclarecido isto, fica convencionado que nesta tese será mantida a nomenclatura “artigo” ao referir-se a estes trabalhos de conclusão produzidos pelo professor PDE.

³ www.diadiaeducacao.gov.br

De acordo com os dados disponibilizados no Quadro 1, a maior ocorrência de implementação de projetos foi no ano de 2012, seguido de 2008 com 3 projetos, 2014 com 2 e 2007 e 2016 um projeto em cada respectivo ano.

Conforme o Quadro 2, em seguida, tem-se o título do artigo, o nome do professor PDE, a Instituição de Ensino Superior – IES, ou seja, local de participação do professor cursista, ano de implementação do Projeto de Intervenção Pedagógica e o público com o qual o projeto foi desenvolvido.

QUADRO 2 – Projetos PDE que abordam Fractais

Título do Artigo	Professor PDE IES/Ano de implementação	Público alvo
Uma mudança nas relações entre a Arte e a Matemática estabelecidas pelos alunos do Ensino Médio	Tânia Borreiro Sanches UEL/2007	Ensino Médio
Fractais: Muito além do que se pode ver	Eny Canalli FAFIPA/ 2009	Ensino Médio
Geometrias não euclidianas – a superfície esférica, os fractais e a topologia	Rozi Aparecida de Marchi UEM/ 2012	Ensino Médio
Geometria fractal na natureza	Gilberto Comiram UNIOESTE/2012	Ensino Médio
Fractais – Uma abordagem em sala com o auxílio de softwares geométricos	Julia Satiko K. Macedo UEM/2008	Ensino Fundamental e Médio
Geometria não- euclidiana/ geometria dos fractais	Margareth Pangoni Vejan UEM/ 2008	Ensino Fundamental
Investigação matemática: uma proposta metodológica para o ensino de fractais construídos através do software Geogebra	Cláudia Tratch UNICENTRO/2012	Ensino Fundamental
A integração da matemática e a natureza por meio da geometria	Luciany Salvetti Loureiro UNESPAR/2013	Ensino Fundamental
Etnomatemática e relações étnico-raciais na educação de jovens e adultos: trabalhando fractais como possibilidade de implementação da lei 10.639/03 nas aulas de matemática	Ronaldo T. de Andrade Silva UTFPR/2014	Educação de Jovens e Adultos _ EJA
O ensino de geometria fractal por meio da utilização do software Geogebra: descobertas e construções.	Adriana F. de Matto UNICENTRO/2012	Professores de Matemática
O ensino de geometria fractal por meio da utilização do software Geogebra e da lousa digital	Celço Luiz de Araújo UNESPAR/ 2014	Professores de Matemática
A geometria dos fractais para o Ensino Fundamental	João Vieira Berti UNIOESTE/2008	Professores de Matemática
Contribuições de Oficinas Pedagógicas sobre conhecimentos geométricos para o desenvolvimento dos níveis de compreensão segundo Van Hiele	Márcia Salete Grenteski UNICENTRO/2016	Alunos do Curso de Magistério

Fonte: Autoras (2024).

No Quadro 2, estão identificados o título do artigo, autor e o público. Assim, professores egressos do Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE cursistas do programa no período de 2007 a 2016, desenvolveram projetos que abordam Fractais. A seguir, passaremos a discutir os resultados destas implementações, conforme cada um dos projetos implementados.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

De acordo com a pesquisa realizada, a Geometria dos Fractais foi abordada em contextos do Ensino Médio, Ensino Fundamental e Médio, Ensino Fundamental, modalidade EJA, para grupos de Professores que ensinam matemática e para futuros professores. Deste modo, será apresentado um breve relato de cada implementação.

3.1 GRUPO 1 – ABORDAGENS NO ENSINO MÉDIO:

Afim de estabelecer a relação entre a Arte e a Matemática, Sanches (2007) utilizando atividades e questionário, propiciou aos alunos do Ensino Médio, por meio de pesquisas e propostas investigativas, uma abordagem do conteúdo fractais, de modo a estabelecerem se o tema em questão está direcionado a Arte ou a Matemática. As atividades foram implementadas no laboratório de informática. Conforme, relato da professora PDE, “[...] todos os alunos conceberam as figuras fractais como sendo compostas por arte e matemática simultaneamente. Também perceberam as várias relações entre arte e matemática, estudadas [...]” (Sanches, 2007, p. 24).

A partir de um estudo teórico sobre fractais, Canalli (2009) introduziu o assunto, traçando o seguinte objetivo

[...] desenvolver e experimentar atividades que possibilitem ao aluno o aprimoramento do pensamento geométrico e a compreensão dos avanços científicos e tecnológicos viabilizados a partir do estudo das geometrias não-euclidianas e a percepção da existência de ordem em situações aparentemente caóticas (Canalli, 2009, p. 12).

As atividades foram orientadas conforme estudos do pesquisador Barbosa (2002) e as construções geométricas realizadas com auxílio de materiais manipuláveis. Assim, o triângulo de Sierpinski, o fractal Triminó, e o cartão Degraus Centrais puderam ser explorados tanto em relação aos conceitos, bem como, conteúdos matemáticos correlatos.

Por meio de construções de fractais com uso de materiais concretos, Marchi (2012) demonstrou duas características dos fractais, ou seja, a auto-semelhança (autossimilaridade) e a complexidade infinita. As atividades elaboradas conforme as orientações da investigação matemática, permitiram questionamentos que possibilitaram elaboração de estratégias gerando discussões, o que propiciou aprofundamento dos conceitos tanto da geometria euclidiana como dos fractais, deste modo, relata a professora PDE.

O trabalho foi desenvolvido por meio de uma sequência de atividades com objetos manipuláveis para apresentar os conceitos de Topologia na perspectiva da Metodologia da Investigação Matemática levando o aluno a fazer conjecturas, testar as hipóteses iniciais, comunicar descobertas e construir justificativas para os fatos observados (Marchi, 2012, p. 14).

O projeto, Geometrias não euclidianas – a superfície esférica, os fractais e a topologia, Marchi (2012), implementado em turmas do Ensino Médio, favoreceu a compreensão dos conceitos topológicos tendo por evidência a Geometria dos Fractais.

Comiram (2012), revisou e explorou conteúdos matemáticos especificamente relacionado aos conceitos da Geometria dos Fractais. Por meio das atividades desenvolvidas foi possível estabelecer o entendimento a respeito da Geometria Fractal, nos aspectos que a difere da geometria euclidiana, sendo uma forma que melhor descreve os objetos naturais. Dentre os conteúdos estudados, foram abordados: Logaritmos, Progressão Aritmética e Geométrica, Números Complexos, Triângulo de Pascal, entre outros. Os aspectos visuais observados e apreciados nas imagens de fractais, de acordo com Comiram (2012) pode despertar o desejo pela pesquisa e aprofundamento de textos de matemática, mas somente a apreciação e o fascínio que emergem do visual não “[...] substitui a aprendizagem dos fundamentos abstratos da Matemática” (Comiram, 2012, p. 14).

3.2 GRUPO 2 – ABORDAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Em forma de minicurso Macedo (2008), utilizando o software GeoGebra, apresentou a construção e exploração de conceitos de alguns dos famosos fractais, como Curva de Koch, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, entre outros, sendo estes, os entes matemáticos precursores e “[...] propostos por matemáticos, de notável projeção científica, com finalidades diversas” (Barbosa, 2002, p. 23). A implementação do projeto elaborado por Macedo (2008), ocorreu em dois momentos distintos, em sala de aula e no Paraná Digital. Primeiro, foram realizadas construções geométricas com auxílio de régua e compasso explorando conceitos da

Geometria dos Fractais pontuando os entes geométricos necessários para construção de fractais, tais como: “ponto, reta, semi-reta, segmento de reta, divisão de segmento de reta em 10 partes iguais, polígono, polígono regular, ponto médio, mediatriz de um segmento, retas paralelas, retas perpendiculares, baricentro, circunferência, raio” (Macedo, 2008, p. 9). Nas aulas utilizando o Paraná Digital, ou seja, no laboratório de informática, com acesso a computadores e internet e com auxílio do software Geogebra, foram desenvolvidas as ações relacionadas ao desenvolvimento do conteúdo proposto, conforme relata a professora PDE.

Aprenderam a tirar o sistema cartesiano da tela, inserir um ponto, construir uma reta, uma reta paralela a ela, uma reta perpendicular a ela, como desenhar uma circunferência dado um raio e também, uma circunferência dado o centro e um ponto desta, como desenhar um polígono qualquer, um polígono regular, enfim, alguns recursos necessários para a construção dos fractais (Macedo, 2008, p. 10).

Desta forma, utilizando materiais manipuláveis e por meio de recursos digitais foram construídos Triângulo de Sierpinski, Curva de Koch e o Tapete de Sierpinski.

3.3 GRUPO 3 – ABORDAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL

A partir de cenas do cotidiano, como construção civil, formato de plantas e vegetais, aspectos do céu, entre outros, o desafio da professora PDE, Tratch (2009), consistiu em relatar sobre as imagens possíveis de serem observadas. Desta forma, a professora PDE, revisou conceitos da geometria euclidiana, como ponto, reta, plano, polígonos regulares e irregulares, ponto médio, perímetro e área. E em relação as imagens que não se aplicam a geometria euclidiana, foi apresentado e desenvolvido estudos relacionados a Geometria dos Fractais. As atividades seguiram as orientações da investigação matemática e com a utilização do software Geogebra permitiu aos alunos um ambiente favorável potencializando este contexto pedagógico. Antes de iniciar a construção dos fractais foram retomados conceitos de elementos geométricos. Com o auxílio dos recursos digitais foram construídos a Curva de Koch, (nível 3) o Floco de Neve (nível 2) e o fractal Triângulo de Sierpinski (nível 3). Todas as atividades foram observadas, discutidas e registradas a lei de formação da área e perímetro de cada fractal.

O projeto de Loureiro (2013) aplicado a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, foi elaborado em três blocos de atividades, todos relacionados ao conteúdo estruturante, geometrias. No bloco 3, as atividades tinham por objetivo, “Conhecer os fractais, através da visualização e manipulação de materiais e discussão de suas propriedades; e Conhecer os conceitos básicos da Geometria dos Fractais” (Loureiro, 2013, p. 14). A apresentação de vídeos

sobre o assunto e a construção do Floco de Neve e a Ilha de Koch oportunizou o contato com a geometria não euclidiana. Utilizando os cálculos relacionados a quantidade de lados e perímetro até a quarta iteração, acrescidos dos questionamentos realizados pela professora, pode-se observar as características dos fractais, ou seja, a autosemelhança e complexidade infinita.

Voltado para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, Vejan (2008) manipulando materiais concretos trabalhou em sala de aula a construção de fractais pelo procedimento de dilatação. Desta forma, além de apresentar o assunto, explorou conteúdos relacionados a geometria euclidiana. Das atividades elaboradas e aplicadas pode-se destacar: Fractal Triminó, Fractal Heptaminó em H, Fractal Pentaminó em T e a Relação entre o Triângulo de Sierpinski e o Triângulo de Pascal e o cartão Degraus Centrais. Durante as construções geométricas ocorreram questionamentos para estabelecer a relação matemática com as ações de manipulação.

3.4 GRUPO 4 – ABORDAGEM NA MODALIDADE EJA

De acordo com a proposta apresentada e desenvolvida por Silva (2014), com alunos da modalidade EJA, um dos objetivos foi estabelecer as relações étnico-raciais entrelaçadas aos conteúdos matemáticos, baseados no estudo e discussão da Lei 10.639/03. Silva (2014) elaborou 4 unidades didáticas com atividades para articular questões étnico-raciais alinhadas a conteúdos matemáticos com abordagem da Geometria dos Fractais. Conforme relato de Silva (2014) pode-se ler:

A unidade 3, intitulada: Trabalhando conteúdos matemáticos nos tecidos de Gana, apresenta atividades que articulam conteúdos matemáticos (tais como: vértice, bissetriz, mediana, classificação dos triângulos em relação à medida dos seus lados e à medida de seus ângulos) com a cultura de Gana, a partir do processo de fabricação dos tecidos Kente. As imagens dos tecidos mostram sua beleza, seu colorido e permitem conhecer um pouco de sua simbologia. A unidade 4, denominada “Figuras geométricas e estrutura de fractais, na cultura afro-brasileira”, traz atividades que permitem identificar estruturas fractais e conteúdos geométricos, nas tranças nagô e nas obras de dois ícones da arte afro-brasileira, Aluísio Carvão e Emanuel Araújo (Silva, 2014, p. 4).

As atividades desenvolvidas, foram socializadas com outros professores, promovendo a interdisciplinaridade.

3.5 GRUPO 5 – ABORDAGEM NAS FORMAÇÕES INICIAL E CONTINUADA

Os projetos anunciados a seguir estão direcionados a cursos para professores de matemática. A proposta de Berti (2008) foi desenvolver um curso de 40 horas destinado à formação de professores da rede estadual do Paraná e que ensinam matemática. Entre outros, um dos objetivos foi apresentar/utilizar formas didáticas de ensinar Geometria dos Fractais, com a utilização de softwares matemáticos de geometria dinâmica, quais sejam, GeoGebra, Cabri Géomètre e Winplot. Assim, com intuito de esclarecer, divulgar e discutir pontos fundamentais do trabalho em sala de aula relacionado aos fractais, Matto (2012), propôs a 20 professores um curso com duração de 32 horas/aula. O recurso tecnológico utilizado foi o software Geogebra e foram explorados conteúdos relacionados à dimensão, perímetro e área dos seguintes fractais: Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Curva de Koch, Floco de Neve de Koch, Quadrado de Koch, Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski. Mediante aplicação da geometria fractal. Araujo (2014) disponibilizou tutorial sobre a lousa digital, e softwares como o Geogebra e sequencia de atividades relacionadas a Geometria dos Fractais, para que professores fizessem uso destas ferramentas em aulas de matemática.

Grenteski (2016) desenvolveu oficinas para explorar conteúdos de PA (progressão aritmética) e PG (progressão geométrica) por meio das construções do Floco de Neve, do Triângulo de Sierpinski, da Curva de Koch e da Árvore Bifurcada entre outros. O público foi constituído por alunos do curso de Formação de Docentes, de uma escola pública. As oficinas, foram além dos conteúdos específicos de matemática, outros componentes curriculares como química, arte e biologia também foram contemplados. De modo a investir em capacitações para o aprimoramento profissional, dentre outras, sobre a oficina denominada Fractais, Grenteski (2016) relata:

Pretendemos também nesta oficina, que aborda a Geometria Não Euclidiana, possibilitar uma visualização das diferenças entre a Geometria Euclidiana e Não Euclidiana favorecendo, discussões com os educandos sobre aplicação de fractais, com o intuito de oportunizar, descobrir e analisar sua importância na nossa vida atual (Grenteski, 2016, p. 3).

Grenteski (2016) ao apresentar esta possibilidade de ensino de conceitos geométricos, abre-se espaço de discussão entre os alunos, que se preparam para o exercício da docência, o que pode favorecer a aprendizagem deste conteúdo e possivelmente pode ser revertido como forma de ensino.

Assim, Berti (2008), Matto (2012), Silva (2014) e Grenteski (2016) ofereceram curso de capacitação, tanto para professores em exercício, quanto para futuros professores. O recurso utilizado priorizou as tecnologias digitais, tendo por destaque o acesso e uso de software de

Geometria dinâmica Geogebra, para a apresentação e exploração dos conhecimentos relacionados a construção de fractais, como: Conjunto de Cantor, Curva de Peano, Curva de Koch, Floco de Neve de Koch, Quadrado de Koch, Triângulo de Sierpinski e Tapete de Sierpinski.

De acordo com as pesquisas apresentadas e que estão direcionadas aos alunos da Educação Básica, bem como a formação inicial e continuada de professores pode-se constatar as múltiplas possibilidades de exploração de conteúdos de matemática abordando o ensino da dos Fractais. Nota-se trabalhos que tratam da Geometria dos Fractais, abordando a autosemelhança e complexidade infinita destes, há trabalhos em que a estrutura de um fractal é utilizada como base para a exploração de conceitos de Geometria euclidiana, como área, perímetro entre outros; sendo assim explorada a geometria no fractal. E também, há trabalhos que mesclam a Geometria dos Fractais e a geometria no fractal. Pode-se inferir ainda que este é um conteúdo que pode ser explorado tanto com uso de material concreto, bem como com as ferramentas digitais.

Nos projetos analisados e conforme orientações das Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática (Paraná, 2008), de modo a explorar a Geometria dos Fractais, Marchi (2012), elaborou e implementou atividades relacionadas as características de autossimilaridade e complexidade infinita por meio da construção de fractais com materiais manipuláveis. Nesse mesmo sentido, Loureiro (2013), afirma que “[...] após construirmos o Floco de Neve de Koch, calculamos a quantidade de lados e perímetro até a quarta iteração, evidenciando a auto semelhança e complexidade infinita” (Loureiro, 2013, p. 15). Desse modo, dois professores PDE, conforme os artigos analisados, abordaram a Geometria dos Fractais, atendendo as demandas dos documentos oficiais vigentes.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve por objetivo identificar e analisar projetos que abordam a Geometria dos Fractais e que foram desenvolvidos e implementados por professores da Educação Básica no decorrer da participação destes, no Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE. De acordo com os dados apresentados neste artigo, constata-se que as produções analisadas sobre o assunto, neste período, (2007-2016), em questão de quantidade, foram pouco expressivas, representando 0,69% dos artigos produzidos.

Possivelmente a abordagem relacionada aos Fractais, mesmo que pouco expressiva em relação a quantidade de artigos sobre este assunto, por professores de matemática, egressos do programa de formação continuada, o PDE, pode estar relacionada com o período de publicação dos documentos oficiais citados, especialmente os documentos paranaenses, ou seja, as DCEs em 2008 e Ensino Fundamental de Nove Anos Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais em 2010.

Conforme análise dos dados, pode-se inferir que o público em que houve maior ocorrência de implementação foi no Ensino Médio. Nas demais categorias analisadas, Ensino Fundamental e Professores de matemática (3 projetos em cada); no ensino na modalidade EJA, Ensino Fundamental e Médio simultaneamente e alunos do Curso de Magistério houve a implementação de um projeto em cada categoria.

Pode-se inferir que os professores que elaboraram e implementaram os projetos priorizando a Geometria dos Fractais demonstraram interesse em explorar o tema, até então, apresentado como um assunto pouco divulgado e abordado nos livros didáticos. O que reforça este parecer está demonstrado nas pesquisas sobre o assunto, tanto no que diz respeito em relação as orientações apresentadas nos documentos oficiais, bem como nas coleções didáticas. Ainda que o assunto Geometria dos Fractais apresentou número reduzido em relação ao montante pesquisado neste artigo, fica certificado que o trabalho pedagógico desenvolvido pelos professores PDE, constitui fonte de pesquisa sobre o assunto, que até então, tem sido pouco explorado tanto nos livros didáticos e até mesmo aplicado em salas de aula da Educação Básica, conforme os dados evidenciados.

REFERÊNCIAS

- ARAUJO, C.L. O ensino de geometria fractal por meio da utilização do software Geogebra e da lousa digital. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1- 59, 2014.
- BARBOSA, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002
- BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- CANALLI, E. Fractais: Muito além do que se pode ver. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1-15, 2007.
- COMIRAM, G. Geometria fractal na natureza. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1-15, 2012.
- GRENTESKI, M.S. Contribuições de Oficinas Pedagógicas Sobre Conhecimentos Geométricos para o Desenvolvimento dos Níveis de Compreensão Segundo Van Hiele. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1-24, 2016.

LOPES, R.A.; BARRÉRE, E. Conhecendo a geometria fractal: conhecimentos específicos. **Produto Educacional**. PPG em Educação Matemática – Universidade Federal de Juiz de Fora, 2023. Disponível em: <https://www2.ufjf.br/ppgedumat/wp-content/uploads/sites/134/2023/10/Produto-3-Renata-Conhecimentos-Espec%C3%ADficos.pdf>. Acesso em: 11 de jan.2023.

LOUREIRO, L.S. A integração da matemática e a natureza por meio da geometria. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1-22, 2013.

MACEDO, J. S. K. Fractais - Uma abordagem em sala com auxílio dos softwares geométricos. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1-16, 2008.

MARCHI, R. A. Geometrias não-euclidianas: a superfície esférica, os fractais e a topologia. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1-17, 2012

MATTO, A. F. O ensino de geometria fractal por meio da utilização do software Geogebra: descobertas e construções. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1-19, 2012

MOURA, E. **O conceito fractal e sua presença pedagógica na Educação Básica**. 2011, 127f. (Dissertação em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2011.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba: Secretária de Estado da Educação do Paraná, 2008.

SANCHES, T. B. Uma mudança nas relações entre a arte e a matemática estabelecidas pelos alunos do Ensino Médio. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1-28, 2007.

SILVA, R.T. A. Etnomatemática e relações étnico-raciais na educação de jovens e adultos: trabalhando fractais como possibilidade de implementação da lei 10.639/03 nas aulas de matemática. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1-18, 2014.

SILVA, F. H; SINADA, F. K. S.; LUCCAS, S. O ensino de fractais no Ensino Fundamental I: um estudo nos documentos oficiais do Paraná. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática – EPREM, 2017, Cascavel. **Anais [...]**. Cascavel: Editora Brasil, 2017, p. 1-10. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/schedConf . Acesso em: 22 mai. 2024.

TRATCH, C. Investigação matemática: uma proposta metodológica para o ensino de fractais construídos através do software Geogebra. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1-27, 2009.

VEJAN, M.P. Geometria não-euclidiana/geometria dos fractais. **Cadernos PDE**, v. 1, p. 1-29, 2008.

Submetido em: 16/05/24
Aprovado em: 17/05/24
Publicado em: 04/06/24



Todo o conteúdo deste periódico está sob uma licença [Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/), exceto onde está indicado o contrário.